SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE SECONDA

VOL. XI.

CON 12 TAVOLE

NAPOLI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE
DIRETTA DA E. DE RUBERTIS FU MICHELE
1902

ELENCO DEI PRESIDENTI

DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

1862. Costa Oronzio Gabriele
1863. Capocci Ernesto
1864. Gasparrini Guglielmo
1865. Padula Fortunato
1866. De Luca Sebastiano
1867. De Gasparis Annibale
1868. Palmieri Luigi
1869. Trudi Nicola
1870. De Martini Antonio
1871. Padula Fortunato
1872. Guiscardi Guglielmo
1873. Fergola Emanuele
1874. Palmieri Luigi
1875. Padula Fortunato
1876. Panceri Paolo
1877. Trudi Nicola
1878. Cesati Vincenzo
1879. De Gasparis Annibale
1880. Costa Achille
1881. Padula Fortunato
1882. Albini Giuseppe
1883. Trudi Nicola
1884. De Martini Antonio
1885. Fergola Emanuele
1886. Govi Gilberto
1887. Battaglini Giuseppe
1888. De Martini Antonio
1889. Padelletti Dino
1890. Costa Achille
1891. Fergola Emanuele
1892. Palmieri Luigi
1893. Battaglini Giuseppe
1894. Trinchese Salvatore
1895. Fergola Emanuele
1896. Villari Emilio
1897. Siacci Francesco
1898. Albini Giuseppe
1899. Fergola Emanuele
1900. Nicolucci Giustiniano
1901. Capelli Alfredo
1902. Delpino Federico

ELENCO DEI SOCII

NEL DICEMBRE DEL 1902

UFFICIO DI PRESIDENZA

Presidente — DELPINO FEDERICO

Vice-Presidente — FERGOLA EMANUELE

Segretario — BASSANI FRANCESCO

Tesoriere — OGLIALORO-TODARO AGOSTINO

SOCII ORDINARII

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

Socii residenti

con la data della loro nomina

1. DE MARTINI ANTONIO; 24 settembre 1861.
2. NICOLUCCI GIUSTINIANO; 24 settembre 1861.
3. ALBINI GIUSEPPE; 13 giugno 1868.
4. OGLIALORO-TODARO AGOSTINO; 12 agosto 1882.
5. BASSANI FRANCESCO; 10 dicembre 1887.
6. VILLARI EMILIO; 14 dicembre 1889.

7. Paladino Giovanni; 10 giugno 1893.

8. Delpino Federico; 2 giugno 1894.

9. Grassi Guido; 20 febbraio 1897.

10. Della Valle Antonio; 12 febbraio 1898.

11. . . . .

12. . . . .

Socii non residenti

13. Cannizzaro Stanislao; 10 febbraio 1872.

14. Taramelli Torquato; 10 dicembre 1892.

15. Pacinotti Antonio; 9 aprile 1898.

16. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

Socii residenti

17. Fergola Emanuele; 19 novembre 1861.

18. Capelli Alfredo; 12 marzo 1887.

19. Pinto Luigi; 8 giugno 188[illegible].

20. Cesàro Ernesto; 3 dicembre 1892.

21. Siacci Francesco; 17 novembre 1894.

22. Del Pezzo Pasquale; 20 novembre 1897.

Socii non residenti

23. Cremona Luigi; 12 febbraio 1881.

24. Schiaparelli Giovanni; 9 aprile 1898.

SOCII STRANIERI

1. Lord Kelvin (Thomson Guglielmo); 1° aprile 1893.

2. Weismann Augusto; 1° aprile 1893.

3. Auwers Arturo; 9 marzo 1895.

4. Gaudry Alberto; 9 novembre 1895.

5. Poincaré Giulio Enrico; 20 novembre 1897.

6. Dohrn Antonio; 4 dicembre 1897.

7. Mittag-Leffler Gustavo; 13 luglio 1901.

8. Retzius Gustavo; 13 luglio 1901.

SOCII CORRISPONDENTI NAZIONALI

SEZIONE DELLE SCIENZE FISICHE

1. Palmeri Paride; 10 dicembre 1870.

2. Gemmellaro Gaetano Giorgio; 8 dicembre 1877.

3. Comes Orazio; 10 novembre 1883.

4. PATERNÒ EMANUELE; 10 novembre 1883.

5. CAPELLINI GIOVANNI; 14 febbraio 1885.

6. BLASERNA PIETRO; 2 marzo 1889.

7. SCACCHI EUGENIO; 13 luglio 1889.

8. SEMMOLA EUGENIO; 16 dicembre 1893.

9. PIUTTI ARNALDO; 4 dicembre 1897.

10. MOSSO ANGELO; 9 aprile 1898.

11. JATTA GIUSEPPE; 9 aprile 1898.

12. DE LORENZO GIUSEPPE; 14 luglio 1900.

13. . . . .

SEZIONE DELLE SCIENZE MATEMATICHE

14. D'OVIDIO ENRICO; 12 febbraio 1881.

15. SALVATORE-DINO NICOLA; 12 febbraio 1881.

16. TORELLI GABRIELE; 14 dicembre 1889.

17. BIANCHI LUIGI; 9 agosto 1890.

18. ANGELITTI FILIPPO; 9 aprile 1898.

19. MASONI UDALRIGO; 9 luglio 1898.

20. MONTESANO DOMENICO; 13 luglio 1901.

Indice delle Materie

ATTI DELLA R. ACCADEMIA
DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA TOTALITÀ DEI NUMERI PRIMI FINO A UN LIMITE ASSEGNATO

MEMORIA

del socio corrispondente GABRIELE TORELLI, a Palermo

premiata nell'adunanza del 15 Dicembre 1900.

> Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaft, aber die Arithmetik ist die Königin der Mathematik!
>
> Gauss
>
> (Sartorius von Walterhausen — *Gauss-Zum Gedächtniss.* Leipzig, 1856).

CAPITOLO I.

1. Tre diverse vie per iniziare le ricerche. — Il probléma della determinazione della totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato fu virtualmente posto da Euclide quando, nella proposizione ventesima del libro IX, stabilì « Vi è sempre un numero primo maggiore di ciascuno di quelli compresi in una quantità di numeri primi prefissati ».

Ma solo molto tardi i matematici rilevarono l' enunciato della quistione, e iniziarono ricerche per risolverla.

Tre vie si presentavano per queste:

1.ª Procedere alla effettiva enumerazione, mediante la conoscenza di tutti i numeri primi fino al limite assegnato.

2.ª Escogitare un metodo, il quale, servendosi della effettiva conoscenza di solo una parte dei numeri primi fino al limite dato, offra la totalità di detti numeri primi.

3.ª Costruire una funzione di x, senza bisogno della conoscenza dei numeri primi, la quale, per x eguale al limite dato, abbia per valore la totalità dei numeri primi fino a questo limite.

Il metodo, puramente empirico, tracciato nella prima via pare che ceda man mano il passo al procedimento razionale nelle altre: non pertanto anche le ricerche indicate nella terza si mantennero per un pezzo in uno stadio del tutto sperimentale (confronta III, 15 a 17). Al contrario le investigazioni nel secondo indirizzo sono state adoperate a controllare i risultati dell'esperienza e a correggere errori, che s'erano introdotti nelle osservazioni fatte per mezzo di questa (cfr. I, 3).

2. Metodo della enumerazione. Tavole dei numeri primi. — Il materiale occorrente per procedere col metodo empirico è fornito dalle tavole dei numeri primi, o da quelle dei più piccoli divisori di tutti i numeri, le quali contengono in sè le predette.

Senza parlare delle pubblicazioni al riguardo di Peel e Brancker (1668), Lambert (1770), Eulero (1774), Felkel (1776), Vega (1797), Chernac (1811) ed altre minori, che si trovano indicate nella introduzione al I volume del libro di Glaisher più sotto citato, dico solo che attualmente nelle opere:

Burckhardt — Table des diviseurs pour tous les nombres des 1er, 2e et 3e million (ou plus exactement depuis 1 à 3 036 000) avec les nombres premiers qui s'y trouvent. Paris, 1814-17, volume uno.

Glaisher — Factor Table for the fourth, fifth, sixth Million. London, 1879-83, volumi tre.

Dase — Factoren Tafeln für alle Zahlen der siebenten, achten, neunten Million. Hamburg 1862-65, volumi tre.

Dase und Rosenberg — Factoren Tafeln für alle Zahlen der zehnte Million *depositate nell'Archivio dell'Accademia di Berlino* (cfr. Volume I di Glaisher, Introduction, p. 28),

e nell'articolo:

Davis — Les nombres premiers de 100 000 001 à 100 001 699. *Liouville, Journal de mathématiques*, série 2e, vol. 11, p. 188, 1866,

si possiede una non interrotta tavola di numeri primi da 1 a 10 milioni, oltre una successione di 99 numeri primi in una regione ben più avanzata nella serie naturale.

Nella introduzione del suo terzo volume Glaisher ha aggiunto i risultati di una enumerazione molto accurata dei numeri, che nella tavola fino al 9° milione sono indicati come primi.

Nella tabella situata in fine del presente lavoro si trovano iscritti alla 7a colonna parte dei risultati della enumerazione di Glaisher, cioè le totalità dei numeri primi inferiori ai limiti iscritti nella 1a colonna, i quali costituiscono una progressione aritmetica avente per primo termine e per ragione 200 000. L'unità non è contata frai numeri primi.

Il molto, che ho da dire, non mi consente di accennare ai procedimenti, quasi meccanici, mediante i quali, per costruire la tavola, si è cercato di semplificare alquanto il metodo primitivo del crivello di Eratostene, e i mezzi più sicuri per eseguire, con poca probabilità di sviste, l'enumerazione. Rimando perciò alle introduzioni delle opere citate, a varii articoli del Glaisher (*Proceding of Cambridge Philos. Soc.*, t. III, 1876-78, *Messenger of Math.*, t. VII, neu series, 1877), e all'opuscolo

Le besgue — Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers. Paris, 1864.

Per ulteriori perfezionamenti sono da consultare:

Tuxen — Bidrag til Lären om Primtallene. *Tidsskrift for Mathematik* (4) V p. 16, 1881.

Laisant — Sur une méthode pour la construction d'une table

de nombres premiers. *Association Française pour l'avancement des sciences. Comptes rendus de la 20^me session. Congrès de Marseille*, 2^e partie, p. 165, 1891-92.

Schapira — Cribrum algebraicum, oder die cofunctional Entstehung der Primzahlen. *Jaresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.* V Band, p. 69, 1897.

3. Errori nelle Tavole dei numeri primi. — Ciò che non può tacersi è che le tavole dei divisori, malgrado la grande diligenza dei calcolatori, che hanno contribuito a formarle, non sono scevre da errori, sia relativi alla classificazione di primo, sia relativi a falsa indicazione del più piccolo divisore. Finora ne sono stati segnalati 39 nella parte dovuta a Burckhardt, 3 soli in quella costruita da Glaisher, e 99 nella terza di Dase fino al 9° milione. Queste segnalazioni sono dovute a Oppermann, Meissel, e più di tutti a Bertelsen, del quale i procedimenti pazienti e ingegnosi consistono per lo più (almeno per quanto riguarda le false indicazioni di primo) in un'acconcia comparazione frai risultati della enumerazione effettiva di Glaisher, e della calcolazione di formole, che si trovano nel Capitolo seguente *).

Detti procedimenti si leggono insieme alla lista degli errori scoverti, e a quanto finoggi si possiede di più completo, e più corretto in fatto di valori della totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato, nell'articolo:

Gram — Rapport sur quelques calculs entrepris par M. Bertelsen, et concernant les nombres premiers. *Acta Mathematica*, vol. 17, p. 301, 1893.

4. Lavori sul problema di riconoscere se un numero composto di molte cifre sia o no primo. — Malgrado l'esistenza delle pubblicazioni sopra indicate, si potrà nulladimeno aver bisogno di assicurarsi da sè medesimo se un intero composto di molte cifre sia o no primo, o più generalmente di cercare il minimo divisore di esso; e ciò o per non possedere le tavole, o perchè il numero in quistione supera l'estremo limite delle stesse.

Si dovrà usare il metodo penoso dell'aritmetica elementare, o potrà l'aritmetica superiore agevolare i calcoli?

Di tal problema, oltre Eulèro, si sono occupati varii scrittori moderni. La teoria delle congruenze viene in ajuto; giacchè per essa si può determinare, dalla forma di un numero dato, quella di tutti i suoi divisori: così non si dovranno provare che numeri di forme determinate.

Gauss consacra alla quistione in parola le pag. da 329 a 334 delle Disquisitiones arithmeticae, e nel libro:

Tchebichef — Teoria delle congruenze, traduttrice I. Massarini. Roma, 1895, si rinviene a pag. 183 un capitolo dedicato a tale quistione.

Si possono ancora al riguardo consultare utilmente le memorie:

---

*) Da un confronto della lista di Bertelsen colle tavole può dedursi che in queste

fino al 3° milione	sono dati come primi	13	numeri composti,	e come composti	13	nnmeri primi
dal 3° » 6°	» » »	2	»	» »	1	» »
dal 6° » 9°	» » »	81	»	» »	4	» »

THAARUP — Undersogelse af om et givet Tal er et Primtal. *Tidsskrift for Mathematik.* (4) V p. 77, 1881.

SEELHOFF — Prüfung grösseren Zahlen auf ihre Eigenschaft als Primzahlen *American Journal of Mathematics.* Vol. VII, p. 264 e vol. VIII, p. 26, 1885-86.

IDEM — Nova methodus numeros compositos a primis dignoscendi, illorumque factores inveniendi. *Ibidem.* Vol. VIII, p. 39, 1886.

PEPIN — Extension de la méthode d'Euler pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers. *Atti dell'Accademia Pontificia dei nuovi Lincei.* Vol. IX, p. 47, 1893.

BIDDLE — On Factorization. A few Methods of factorizing composite Numbers of unknown Form. *The Messenger of Mathematics.* New series, tom. XXVIII, p. 116, 1899.

In Francia, oltre qualche autore più antico, si è occupato con alacrità della questione in parola E. Lucas negli scritti:

LUCAS E. — Sur la théorie des nombres premiers. *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.* Vol. XI, p. 928, 1875-76.

IDEM — Théorèmes d'arithmétique. *Ibidem.* Vol. XIII, p. 271, 1877-78.

IDEM — Sur le neuvième nombre parfait. *Mathesis.* Vol. VII, p. 45, 1887.

IDEM — Théorie des nombres. T. I, p. 350, Paris, 1891.

In essi l'autore perviene ad una serie di verità, le quali permettono di appurare, in un tempo relativamente breve, se un dato numero m, di venti o trenta cifre sia primo o no, allorchè si conosce la decomposizione in fattori primi dei numeri $m \pm 1$. Poi prende specialmente in mira i numeri della forma $2^n + 1$, o $2^n - 1$.

Gli uni si presentano nel problema della divisione del circolo; non possono essere primi, se non quando l'esponente n è una potenza di 2, e quando lo sono, vengono detti numeri primi di Gauss. EISENSTEIN (*Crelle Journal für d. r. u. a. M.* Bd. XXVII, p. 86, 1844) annunziò di possedere la prova della proposizione che vi sono infiniti numeri primi della forma $2^{2^v} + 1$; ma non si conosce nè la sua, nè altra dimostrazione del detto enunciato.

Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinchè $2^n - 1$ sia primo, è che l'esponente n eguagli esso stesso un numero primo p. I numeri primi della forma $2^p - 1$ occorrono nella ricerca dei numeri perfetti.

Nella prefazione dell'opera

MERSENNE — Cogitata phisico-mathematica. Paris, 1644,

fu affermato che per p compreso fra 31 e 257 non vi sono che i valori di p eguali a 31, 67, 127, 257 pei quali $2^p - 1$ sia primo.

Finora quest'asserzione si è verificata per tutti i valori di p inferiori a 61, e per 14 frai 38 esponenti primi maggiori di 61 e non superiori a 257; s'è trovata fallace per $p = 61$, essendosi accertato prima di PERWOUCHINE, poi da SEELHOFF, e infine da HUDELOT che

$$2^{61} - 1 = 2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$$

è un numero primo. Esso è il più gran numero primo finoggi conosciuto, e fornisce il 9° numero perfetto.

Non voglio omettere di segnalare ancora l'articolo

LAWRENCE — Factorisation of Numbers. *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.* Vol. XXVIII, p. 285, 1896,

il quale s'occupa del problema di trovare il minimo divisore d'un numero e termina colla proposta d'una machina, che, se fosse messa in moto per mezzo dell'elettricità, e lasciata a sè stessa, si arresterebbe appena trovata la soluzione.

5. Lavori sui posti della serie naturale, dove più rari sono i numeri primi. — Pongo fine a questo rapido cenno dei lavori del genere, di quelli, su cui mi sono intrattenuto in questo primo capitolo, col notare che, se occorre conoscere posti della serie naturale, dove più rari sono i numeri primi, li si rinverrebbero negli scritti:

LE BESGUE — Exercices d'Analyse numérique, p. 116. Paris, 1859 e *Nouvelles Annales de Mathématique,* p. 130, 1856.

GLAISHER — On long Successions of composite Numbers. *The Messenger of Mathematics.* New series, t. VII, p. 102, 1877, e Vol. III, p. 33 e s. della *Factor Table* etc.

CAPITOLO II.

6. Procedimento di Legendre, mediante il quale si calcola la totalità $\vartheta(m)$ dei numeri primi non superiori ad m, quando sono noti solo i numeri primi non superiori a $\sqrt{m}$. — Passo ora ad esporre le soluzioni escogitate seguendo il secondo indirizzo.

LEGENDRE nell'Essai sur la Théorie des nombres, IV partie, § XI, 1808 tratta la quistione:

Dati gli m numeri in progressione aritmetica

$$(1) \qquad A - C\,,\ 2A - C\,,\ 3A - C\,,\ \dots\,,\ mA - C\,,$$

dove A e C sono interi primi fra loro, e quanti si vogliano numeri primi

$$(2) \qquad q_1\,,\ q_2\,,\ \dots\,,\ q_n\,,$$

di cui nessuno divida A, cercare quanti vi sono frai numeri (1), che non siano divisibili per nessuno dei numeri (2).

Con elementari considerazioni deduce che se s'indica in generale con $q^{(0)}$ l'intero più piccolo di q, tale che $Aq^{(0)} + C$ sia divisibile per q, e con $E\left(\frac{q}{r}\right)$ il massimo intero non superiore al quoziente $\frac{q}{r}$, il numero cercato è fornito dall'espressione

$$m - \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{m + q_i^{(0)}}{q_i}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} E\left(\frac{m + (q_i q_j)^{(0)}}{q_i q_j}\right) - \sum_{i,j,h=1}^{n} E\left(\frac{m + (q_i q_j q_h)^{(0)}}{q_i q_j q_h}\right) + \cdots\,,$$

dove i termini debbono continuare fino a tanto che i divisori non eccedono $mA - C$.

Se m è divisibile pel prodotto $q_1 q_2 \dots q_n$ la precedente espressione si riduce a

$$m - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{q_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{m}{q_i q_j} - \sum_{i,j,h=1}^{n} \frac{m}{q_i q_j q_h} + \dots = m\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{q_n}\right).$$

Posto $A = 1$, $C = 0$ segue che

a) *Frai numeri della serie naturale*

$$1, 2, 3, \dots, m$$

ve ne sono

$$m - \sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{m}{q_i}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} E\left(\frac{m}{q_i q_j}\right) - \sum_{i,j,h=1}^{n} E\left(\frac{m}{q_i q_j q_h}\right) + \dots \tag{3}$$

non divisibili pei numeri primi

$$q_1, q_2, \dots, q_n.$$

E posto $A = 2$, $C = 1$, segue che

b) *Frai numeri dispari*

$$1, 3, 5, \dots, 2m - 1$$

ve ne sono

$$m - \sum_{i=2}^{n} E\left(\frac{m + \frac{1}{2}(q_i - 1)}{q_i}\right) + \sum_{i,j=2}^{n} E\left(\frac{m + \frac{1}{2}(q_i q_j - 1)}{q_i q_j}\right) - \sum_{i,j,h=2}^{n} E\left(\frac{m + \frac{1}{2}(q_i q_j q_h - 1)}{q_i q_j q_h}\right) + \dots \tag{4}$$

non divisibili per alcuno dei numeri primi dispari $q_2, q_3, \dots, q_n$.

Quanto precede fornisce delle vie per calcolare la totalità dei numeri primi non superiori a un limite dato x, la quale in tutto questo scritto indicherò costantemente col simbolo $\vartheta(x)$.

Così se $2m - 1$ è il limite dato, o il numero dispari, che immediatamente precede questo limite, e se $3, 5, 7, \dots, q_n$ sono tutti i numeri primi dispari non superiori a $\sqrt{2m-1}$, la 4) dà 1 più la totalità dei numeri primi, che superano $\sqrt{2m-1}$, e non sorpassano $2m - 1$; aggiungendo $n - 1$ al risultato si ottiene il numero cercato, non contando l'unità frai numeri primi, e tenendo invece conto del numero primo 2.

Esempio: $\vartheta(500)$; $m=250$, $n=8$;

$$q_2=3 \;,\; q_3=5 \;,\; q_4=7 \;,\; q_5=11 \;,\; q_6=13 \;.\; q_7=17 \;,\; q_8=19 \;.$$

$$\begin{aligned}\vartheta(500)=250&-\Big(E\frac{251}{3}+E\frac{252}{5}+E\frac{253}{7}+E\frac{255}{11}+E\frac{256}{13}+E\frac{258}{17}+E\frac{259}{19}\Big)\\
&+\Big(E\frac{257}{15}+E\frac{260}{21}+E\frac{266}{33}+E\frac{269}{39}+E\frac{275}{51}+E\frac{278}{57}\\
&\qquad+E\frac{267}{35}+E\frac{277}{55}+E\frac{282}{65}+E\frac{292}{85}+E\frac{297}{95}\\
&\qquad+E\frac{288}{27}+E\frac{295}{91}+E\frac{309}{119}+E\frac{316}{133}\\
&\qquad+E\frac{321}{143}+E\frac{344}{189}+E\frac{354}{209}\\
&\qquad+E\frac{360}{221}+E\frac{373}{247}\\
&\qquad+E\frac{411}{323}\Big)\\
&-\Big(E\frac{302}{105}+E\frac{332}{165}+E\frac{342}{195}+E\frac{377}{255}+E\frac{444}{385}\\
&\qquad+E\frac{365}{231}+E\frac{386}{273}+E\frac{423}{357}+E\frac{450}{401}\\
&\qquad+E\frac{364}{229}+E\frac{442}{385}+E\frac{477}{455}\Big)\\
&+7\\
&=250-239+91-14+7=95\,;\end{aligned}$$

dunque la totalità dei numeri primi non superiori a 500 è 95.

7. Lo stesso Legendre insegna a semplificare questo computo: s'indichi con $T(2m-1\,,n)$ la espressione (4). E facilmente verificabile mediante la

$$T(2m-1\,,n)=m-\sum_{i=2}^{n}E\left(\frac{m+\frac{1}{2}(q_i-1)}{q_i}\right)+\sum_{i,j=2}^{n}E\left(\frac{m+\frac{1}{2}(q_iq_j-1)}{q_iq_j}\right)+\cdots \tag{5}$$

che

$$T(2m-1\,,n)=T(2m-1\,,n-1)-T\left[2E\left(\frac{m+\frac{1}{2}(q_n-1)}{q_n}\right)-1\,,n-1\right].$$

Questa formola di riduzione agevola il calcolo di $T(2m-1\,,n)$. Così nel caso dell'esempio precedente si ha

$$\begin{aligned}T(499{,}8)&=T(499{,}7)-T(25{,}7)\\
T(499{,}7)&=T(499{,}6)-T(29{,}6)\\
T(499.6)&=T(499{,}5)-T(37{,}5)\\
T(499{,}5)&=T(499{,}4)-T(45{,}4)\;.\end{aligned}$$

Sommando si ricava

$$T(499,8) = T(499,4) - T(25,7) - T(29,6) - T(37,5) - T(45,4) .$$

Per la (5) è

$$\begin{aligned} T(499,4) = 250 &- \left(E\frac{251}{3} + E\frac{252}{5} + E\frac{253}{7}\right) \\ &+ \left(E\frac{264}{15} + E\frac{260}{21} + E\frac{267}{35}\right) \\ &- E\frac{302}{105} \\ &= 250 - 169 + 36 - 2 = 115 . \end{aligned}$$

Ora tenendo presente la tavola dei numeri primi fino a 45 si ha

$T(25,7) = 1 +$ totalità dei numeri primi superiori a 17, e che non sorpassano $25 = 3$
$T(29,6) = 1 +$ » » » 13, » » $29 = 5$
$T(37,5) = 1 +$ » » » 11, » » $37 = 8$
$T(45,4) = 1 +$ » » » 7, » » $45 = 11$;

donde

$$T(499,8) = 115 - 27 = 88 ;$$

perciò

$$\vartheta(500) = 88 + 7 = 95 .$$

8. Lavori strettamente connessi col procedimento di Legendre. — Sopra le formole di Legendre qui esposte al § 6 si aggirano varie comunicazioni di Jonquières, Lipschitz, e Sylvester pubblicate nei volumi 95 e 96 (1882-83) dei *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, e la nota del D.r Paci Sul numero dei numeri primi inferiori a un dato numero. Parma, 1879; ma nulla di sostanzialmente nuovo aggiungono, almeno relativamente alla quistione qui contemplata.

È notevole per altro l'aspetto sotto al quale Sylvester considera il teorema *a*) del § 6, riguardandolo quale corollario d'un teorema logico, che messo sotto forma sensibile equivale a dire che:

Se A, B, C, ... *sono dei corpi con facoltà di compenetrarsi contenuti in un vaso d'acqua, e se* a, ab, abc, ... *rappresentano simbolicamente i volumi di* A, *della parte comune ad* A *e* B, *di quella comune ad* A, B, C, ...; *allora il volume di liquido spostato dall'assieme dei corpi sarà*

$$\sum a - \sum ab + \sum abc - \dots .$$

Questo modo di considerare però già non era nuovo: esso si riscontra in una nota di Smith pubblicata nel 1857, della quale parlerò nel (Cap. VI, § 41).

9. Soggiungo ancora che senza che ne sia accorto il Vollprecht, nell'ar-

ticolo Ueber die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen bis zu einer gegebenen Zahl N, mit Helfe der Primzahlen, welche kleiner als $\sqrt{N}$ sind. *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* Vol. XL, p. 118, 1895, non propone in sostanza, sotto forma non preferibile, che il procedimento di Legendre qui esposto nel § 7.

Maggiore originalità si riscontra nello scritto:

GRAEFE — Bestimmung der Anzahl unter einer gegebenen Zahl m liegenden Primzahlen, wenn die unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzahlen bekannt sind. *Zeitschrift für Math. u. Ph.* Vol. XXXIX, p. 38, 1894.

In fondo, sebbene non lo si dica esplicitamente, la formola fondamentale di Legendre è quella che campeggia; ma è combinata colla osservazione che i numeri primi, eccetto 2 e 3, appartengono all'una o all'altra delle due forme $6n+1$, $6n+5$. Per mezzo di tale combinazione il Graefe immagina delle tavole, mediante le quali i varii termini della formola di Legendre possono senza molto lavoro calcolarsi, e le costruisce fino ad $m=10000$.

10. Procedimento di Meissel. — Un progresso notevole segna nell'indirizzo, che ora sto esaminando, la memoria

MEISSEL — Berechnung der Menge der Primzahlen innerhalb gegebenen Grenze. *Mathematische Annalen*, t. II, p. 636; t. III, p. 523; t. XXI, p. 302; t. XXV, p. 251, 1871-85.

In questa l'autore comincia dallo stabilire una formola in ispecial modo adatta alla calcolazione in cifre, e poi l'applica a varii esempii. Indicando da ora in poi con p_n l'n^{mo} numero primo, quindi ponendo

$$p_1=2\ ,\ p_2=3\ ,\ p_3=5\ ,\ p_4=7\ ,\ p_5=11\ ,\ p_6=13\ ,\ p_7=17\ ,\ p_8=19\ ,\ \ldots$$

si denoti con $\Phi(m\,,n)$ il valore, che acquista l'espressione (3), supponendo, quale che sia i, $q_i=p_i$; cioè si ritenga

$$\Phi(m\,,n)=m-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{m}{p_i}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{m}{p_ip_j}\right)-\sum_{i,j,h=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{m}{p_ip_jp_h}\right)+\cdots. \tag{6}$$

Per la funzione Φ sussiste, analogamente a quanto già dissi per la funzione T del § 7, una formola di riduzione facilmente verificabile per mezzo di (6), cioè

$$\Phi(m\,,n)=\Phi(m\,,n-1)-\Phi\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_n}\,;n-1\right). \tag{7}$$

Denoto inoltre con n_1 un intero compreso fra $\vartheta(m)$ e $\vartheta(\sqrt{m})$ potendo, raggiungere questi limiti. Allora $\Phi(m\,,n_1)$, esprimendo la totalità dei numeri della successione $1,2,3,\ldots,m$ non divisibili per $p_1,p_2,\ldots,p_{n_1}$, equivale alla totalità dei numeri

$$1\ ,\ p_{n_1+1}\ ,\ p_{n_1+2}\ ,\ \ldots\ ,\ p_{\vartheta(m)}\ ,$$

cioè a $\vartheta(m)-n_1+1$. Dunque:

Se l'intero n_1 *verifica le ineguaglianze*

$$\vartheta(m) \geqq n_1 \geqq \vartheta(\sqrt{m})$$

si ha

$$\vartheta(m) = \Phi(m, n_1) + n_1 - 1 . \tag{8}$$

II. Per la definizione del simbolo ϑ si hanno

$$p_{\vartheta(\sqrt{m})} \leqq \sqrt{m} \quad , \quad \sqrt[3]{m} < p_{\vartheta(\sqrt[3]{m})+1} ,$$

le quali possono anche scriversi

$$\frac{1}{p_{\vartheta(\sqrt{m})}} \geqq \frac{1}{\sqrt{m}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt[3]{m}} > \frac{1}{p_{\vartheta(\sqrt[3]{m})+1}} ;$$

moltiplicando ambedue queste per m, e in seguito estraendo nella seconda le radici quadrate da ambo i membri, si hanno

$$\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt{m})}} \geqq \sqrt{m} \quad , \quad \sqrt[3]{m} > \sqrt{\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt[3]{m})+1}}} ,$$

donde

$$\vartheta\left(\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt{m})}}\right) > \vartheta(\sqrt{m}) - 1 \quad , \quad \vartheta(\sqrt[3]{m}) \geqq \vartheta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt[3]{m})+1}}}\right) .$$

Ora chiamando n_2 un intero, che soddisfaccia alle ineguaglianze

$$\vartheta(\sqrt{m}) > n_2 \geqq \vartheta(\sqrt[3]{m}) ,$$

si ha

$$\vartheta\left(\frac{m}{p_{n_2+1}}\right) \geqq \vartheta\left(\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt{m})}}\right) \quad , \quad \vartheta(\sqrt{m}) - 1 \geqq n_2 \geqq \vartheta(\sqrt[3]{m}) \quad , \quad \vartheta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{\vartheta(\sqrt[3]{m})+1}}}\right) \geqq \vartheta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n_2+1}}}\right) ;$$

dunque

$$\vartheta\left(\frac{m}{p_{n_2+1}}\right) > n_2 \geqq \vartheta\left(\sqrt{\frac{m}{p_{n_2+1}}}\right) ,$$

e quindi anche

$$\vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}\right) > n_2 \geqq \vartheta\left(\sqrt{\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}}\right) .$$

Perciò alla funzione $\Phi\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}, n_2\right)$ si può applicare la (8), e risulta

$$\vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}\right) = \Phi\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}, n_2\right) + n_2 - 1 ,$$

la quale, in virtù della (7), può scriversi:

$$\vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_{n_2+1}}\right)=\Phi(m,n_2)-\Phi(m,n_2+1)+n_2-1 .$$

Mutando in questa successivamente, la n_2 in $n_2+1, n_2+2, \ldots, \vartheta(\sqrt{m})-1$, ed aggiungendo ad essa le eguaglianze così ricavate, e l'altra

$$\vartheta(m)=\Phi(m,\vartheta(\sqrt{m}))+\vartheta(\sqrt{m})-1 ,$$

compresa nella (8), si deduce dopo facili riduzioni la formola fondamentale di Meissel, che dà luogo al teorema:

Se l'intero n_2 *verifica le ineguaglianze*

$$\vartheta(\sqrt{m})>n_2\geqq\vartheta(\sqrt[3]{m}) ,$$

si ha

$$\vartheta(m)=\Phi(m,n_2)-\sum_{i=n_2+1}^{\vartheta(\sqrt{m})}\vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_i}\right)+\frac{(\vartheta(\sqrt{m})+1)(\vartheta(\sqrt{m})-2)}{2}-\frac{n_2(n_2-3)}{2} . \tag{9}$$

Nelle applicazioni ad esempii Meissel assegna ad n_2 il minimo valore, che può avere, cioè $\vartheta(\sqrt[3]{m})$, e calcola il primo termine del secondo membro $\Phi(m,\vartheta(\sqrt[3]{m}))$ sia giovandosi della (7), sia dell'osservazione che se il numero m diviso pel prodotto $p_1p_2\ldots p_n$ dà per quoziente intero q e per resto μ, si ha per la (6)

$$\begin{aligned}\Phi(m,n)&=\Phi(qp_1p_2\ldots p_n,n)+\Phi(\mu,n)\\&=qp_1p_2\ldots p_n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)+\Phi(\mu,n)\\&=q(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_n-1)+\Phi(\mu,n) .\end{aligned}$$

Tale osservazione gli consiglia di costruire tavole ausiliarie, contenenti i valori di un certo numero di funzione Φ e ϑ, mediante le quali il computo risulta notevolmente abbreviato. Per tale via egli ottiene

$$\begin{aligned}\vartheta(20\,000)&=2\,262\\\vartheta(500\,000)&=41\,538\\\vartheta(1\,000\,000)&=78\,498\\\vartheta(10\,000\,000)&=664\,579\\\vartheta(100\,000\,000)&=5\,761\,455\\\vartheta(1\,000\,000\,000)&=50\,847\,478 .\end{aligned}$$

Nella 6ª colonna della tabella, che si trova in fine del presente lavoro, sono stati iscritti parte dei risultati ottenuti da Bertelsen applicando la formola di Meissel. Essi vanno considerati come assolutamente corretti, mentre nol possono

essere quelli della diretta enumerazione di Glaisher, a causa degli errori scoverti nelle tavole (cfr. I, 3). Le deviazioni dei risultati ottenuti mediante le formole di altri autori le ho perciò calcolate riferendomi ai numeri della 6ª colonna ritenuti come i valori esatti.

Applico la formola di Meissel al solito esempio $\vartheta(500)$.

Si ha

$$\vartheta(\sqrt{500}) = 8 \quad , \quad \vartheta(\sqrt[3]{500}) = 4 \; ;$$

$$\vartheta(500) = \Phi(500, 4) - \left[\vartheta\left(E\frac{500}{11}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{13}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{17}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{19}\right)\right] + 25 \, ,$$

$$\Phi(500, 4) = 2 . 2 . 4 . 6 + \Phi(80, 4)$$

$$\Phi(80, 4) = \Phi(80, 1) - \Phi(11, 3) - \Phi(16, 2) - \Phi(26, 1) = 40 - 3 - 5 - 13 = 19$$

$$\vartheta\left(E\frac{500}{11}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{13}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{17}\right) + \vartheta\left(E\frac{500}{19}\right) = \vartheta(45) + \vartheta(38) + \vartheta(29) + \vartheta(26) =$$

$$14 + 12 + 10 + 9 = 45$$

$$\vartheta(500) = 2 . 2 . 4 . 6 + 19 - 45 + 25 = 95 \, .$$

12. Lavori strettamente connessi con quello di Meissel. — Col lavoro di Meissel intimamente si collegano due note di Lugli e Baranowsky, ma prima occorre che io menzioni che la comunicazione

Piarron de Mondésir — Formules pour le calcul exact de la totalité des nombres premiers compris entre 0 et un nombre pair quelconque 2N. *Association Française pour l'avancement des sciences. Comptes rendus de la 6ᵉ session. Congrès de Le Havre*, p. 79, 1877-78,

contiene una investigazione simile alla precedente, in cui l'autore determina col suo procedimento il numero dei primi inferiori a 100, 1000, 10000, 100000, 1000000; e aggiunge che queste determinazioni le avea fatte fin dal 1864 (cfr. § 14).

Ed ora noto che nell'articolo

Lugli — Sul numero dei numeri primi da 1 ad *n*. *Giornale di Matematiche Battaglini*. Vol. XXVI, p. 86, 1888.

l'autore riproduce le precedenti ricerche di Meissel leggermente modificando il metodo, e la equazione finale; ma io reputo più conveniente la forma adoperata da Meissel, giacchè il numero s, che secondo Lugli bisogna andar determinando col criterio di essere il più piccolo numero, pel quale si abbia la relazione

$$p_s > E\left(\sqrt{\frac{m}{p_s}}\right),$$

nella memoria di Meissel si trova già semplicissimamente determinato ed eguaglia $\vartheta(\sqrt[3]{m}) + 1$. Nella nota

Baranowsky — Ueber die Formeln zur Berechnung der Anzahl der eine gegebene Grenze nicht übersteigenden Primzahlen. *Rozprawy Wydzial matematyczno-przyrodniczy Akademii Umiejetnoss'ci w Krako-*

wie. Ser. II, tom. VIII, p. 192, 1895 (sunto in tedesco nel *Bulletin* della medesima Accademia per l'anno 1894, p. 280)

si applica la formola (9) per $n_2 = \vartheta(\sqrt[3]{m})$ al caso di $m = 100\,000$, e trovato

$$\vartheta(100\,000) = 9592$$

si stabilisce il confronto frai calcoli fatti o partendo direttamente dalla (8), o per mezzo della (9), si giudica essere essi egualmente laboriosi, e si conchiude che in grazia della semplicità merita preferenza la (8).

Ora a ciò io mi permetto di soggiungere la seguente osservazione. Che la (9) non indica che un modo di aggruppare i termini, che si introducono nella (8) mediante la replicata applicazione della (7), risulta dallo stesso procedimento adoperato per rinvenirla. Però a giudicare della convenienza di usare la (9) non si può farlo guardando un esempio isolato; ma occorre tener conto che, nell'impiego sistematico di essa, si può ricorrere alle tavole ausiliarie consigliate da Meissel, più sopra accennate, e che agevolano il penoso lavoro.

13. Procedimento di Rogel. — Nel medesimo ordine di idee di Meissel è entrato il Rogel per mezzo degli articoli:

Die Bestimmung der Anzahl Primzahlen, welche nicht grösser als eine gegebene Zahl sind. *Archiv der Math. u. Phys.* 2ᵉ Reihe, Bd. VII, p. 381, 1887.

Zur Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grezen. *Matematische Annalen*, Bd. XXXVI, p. 304, 1896.

Die Bestimmung der Anzahl der unter einer gegebenen Grenze liegenden Primzahlen. *Archiv. der Math. u. Phys.*, 2ᵉ Reihe, Bd. XVII, p. 225, 1890 (quasi identico al precedente)

nei quali l'autore, dopo aver esposto con altre notazioni e con ragionamenti alquanto differenti i risultati più sopra riferiti, procede ad una estensione, che tradotta nella forma da me adottata si riduce a questo: Come servendosi di (8) si perviene a (9), nella quale la funzione $\Phi(m, n_1)$ coll'argomento n_1 si è ridotta a $\Phi(m, n_2)$ coll'argomento minore n_2, così da (9) si può passare analogamente ad una formola contenente una funzione $\Phi(m, n_3)$ con argomento n_3 minore di n_2. Ed invero considerando $\sqrt[3]{m}$ e $\sqrt[4]{m}$ in luogo di $\sqrt{m}$ e $\sqrt[3]{m}$, e seguendo un ragionamento del tutto simile a quello del § 11 si perviene alla conchiusione:

Se l'intero n_3 *verifica le ineguaglianze*

$$\vartheta(\sqrt[3]{m}) > n_3 \geq \vartheta(\sqrt[4]{m}),$$

si ha

$$\begin{aligned}\vartheta(m) = \Phi(m, n_3) - \sum_{i=n_3+1}^{\vartheta(\sqrt{m})} \vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_i}\right) - \sum_{j=n_3+1}^{\vartheta(\sqrt[3]{m})} \sum_{i=j}^{\vartheta\left(\sqrt{\mathrm{E}\frac{m}{p_j}}\right)} \vartheta\left(\mathrm{E}\frac{m}{p_i p_j}\right) \\ + \sum_{i=n_3+1}^{\vartheta(\sqrt[3]{m})} \left\{ \frac{\left[\vartheta\left(\sqrt{\mathrm{E}\frac{m}{p_i}}\right)+1\right]\left[\vartheta\left(\sqrt{\mathrm{E}\frac{m}{p_i}}\right)-2\right]}{2} - \frac{i(i-3)}{2} \right\} + \frac{[\vartheta(\sqrt{m})+1][\vartheta(\sqrt{m})-2]}{2} - \frac{n_3(n_3-3)}{2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Il procedimento si presta ad essere esteso ancora, cosa che il Rogel fa; ma io qui m'arresto, limitandomi ad applicare la (10) al solito esempio $\vartheta(500)$.

Si ha

$$\vartheta(\sqrt[3]{500}) = 4 \quad , \quad \vartheta(\sqrt[4]{500}) = 2 \; ;$$

laonde

$$\begin{aligned}\vartheta(500) &= \Phi(500,2) - [\vartheta(100) + \vartheta(71) + \vartheta(45) + \vartheta(38) + \vartheta(29) + \vartheta(26)] \\ &\quad - [\vartheta(20) + \vartheta(14) + \vartheta(10)] + 36 \\ &= 167 - (25 + 20 + 14 + 12 + 10 + 9) - (8 + 6 + 4) + 36 = 95 \; .\end{aligned}$$

La medesima ricerca è pure riprodotta da Rogel in altro suo lavoro, però con una soggiunta, che meglio si riattacca coll'argomento del Cap. XII: ecco perchè io parlerò di tale scritto nel § 122.

14. Parziale priorità di Hargreave. — Ma senza nulla detrarre al merito di Meissel e Rogel, non può tacersi che il loro metodo non è interamente nuovo, essendo essi stati prevenuti, in parte, dal giurista matematico HARGREAVE, il quale fin dal 1854 nella sua memoria On the Law of Prime Numbers, *The Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4ª serie, vol. VIII, p. 114, espone un procedimento, forse più intuito che dimostrato, il quale tradotto in formole dà luogo proprio alle (9) e (10) ed analoghe. Soltanto Hargreave non determina esattamente i limiti, frai quali possono scegliersi i numeri qui dinotati con $n_2, n_3, \ldots$; e crede che essi possano assumersi in ogni caso eguali a 8 o 9, o, se è il bisogno, a 10 o 11. Egli applica il procedimento colla formola, che immediatamente seguirebbe la (10), e trova

$$\begin{aligned}\vartheta(1\,000\,000) &= 78\,494 \\ \vartheta(5\,000\,000) &= 348\,527 \\ \vartheta(10\,000\,000) &= 664\,632 \; .\end{aligned}$$

In tali casi la limitazione risultante dal ragionamento sopra indicato darebbe rispettivamente

$$11 > n_4 \geq 6 \quad , \quad 15 > n_4 \geq 8 \quad , \quad 16 > n_4 \geq 9 \; .$$

Il valore $n_4 = 9$ scelto da Hargreave soddisfa a queste ineguaglianze, dunque non sono da attribuirsi a questa causa le lievi differenze trai valori trovati da Meissel e Hargreave.

CAPITOLO III.

15. Primi tentativi per costruire la funzione $\theta(x)$ esprimente la totalità dei numeri primi inferiori ad x, senza bisogno della conoscenza dei numeri primi. Formola di Legendre.—La terza via indicata nel (I, 1) è, senza dubio, la più importante; ma nel percorrerla si sono trovate tante difficoltà che più d'un valente dubitò che, coi mezzi, a disposizione dell'Analisi, si fosse potuto raggiungere la meta.

Come ho detto nel citato §, nel fare i primi passi per detta via si prese per guida l'esperienza.

Infatti Legendre nel § VIII della IV Parte dell'Essai sur la Théorie des Nombres, 1808, osservando in un certo numero di esempii il valore della totalità $\theta(x)$ *) dei numeri primi inferiori ad x trovato mediante l'enumerazione sulle tavole di Wega, e paragonandolo col valore corrispondente della frazione

$$\frac{x}{\log x - 1{,}08366},$$

in cui $\log x$ dinota il logaritmo neperiano di x, conchiude che la formola, la quale risolve la quistione per x abbastanza grande, è

$$\theta(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}. \qquad (11)$$

Egli si spiega le differenze, che si notano nella maggior parte dei casi frai due membri, colla frase:

« È impossibile che una formola rappresenti più fedelmente una serie di nu-
« meri d'una così grande estensione, e soggetta necessariamente a delle frequenti
« anomalie ».

Poi si propone di dar qualche saggio di una dimostrazione di questa eguaglianza; ma la esposizione degli argomenti, che adduce, mal cela la poca fiducia, che egli stesso aveva nel loro valore.

Passa in ultimo ad applicare la sua formula a problemi, dei quali a tempo opportuno parlerò (Cap. VII). Stimo inutile rilevare i punti deboli delle argomentazioni su accennate, poichè da quanto appresso dirò (IV, 24) risulterà il conveniente apprezzamento della (11).

Una osservazione però credo opportuno premettere fin da ora; $\theta(x)$ è una funzione discontinua, i punti di discontinuità essendo i numeri primi; invece la funzione $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ è continua; dunque eguaglianza fra esse, e in generale fra $\theta(x)$ e qualsiasi funzione continua, non vi potrà essere. Tuttavia l'intuito di Legendre scorse che fra la $\theta(x)$ e $\frac{x}{\log x - 1{,}08366}$ esiste intimo legame, come altri furono resi edotti che la stessa cosa avviene fra $\theta(x)$ e qualche altra funzione continua; ma fino a quando non si comincia dal porre in chiara luce la natura esatta di questo legame, non vi potrà essere ragionamento rigoroso.

Nella seconda colonna della tabella, che si trova in fine del presente lavoro, ho iscritti i risultati ottenuti secondo la formola di Legendre, insieme colle deviazioni, per ogni 100 000, dai risultati secondo la formola di Meissel; queste deviazioni sono date perciò dalla formola

$$\frac{\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \theta(x)}{\theta(x)} . 100\,000 .$$

*) Dei due simboli ϑ e θ si potrebbe evitarne uno, giacchè è $\vartheta(x) = \theta[E(x+1)]$; ma le notazioni diventerebbero fastidiose. Ho creduto perciò opportuno adoperare i due simboli differenti, ma affini, $\vartheta(x), \theta(x)$ per indicare rispettivamente le totalità dei numeri primi non superiori, o inferiori ad x.

Il paragone, che in seguito sarà fatto (cfr. III, 17; V, 37 e 38), coi risultati di altre formole fornirà al lettore il giusto giudizio sulla formola di Legendre.

16. Modifica apportata da Drach. — Il Drach nel breve articolo On the empirical Law in the Enumeration of prime Number. *The Philosophical Magazine and Journal of Science*. Serie 3ª, vol. XXIV, pag. 192, 1844 si preoccupò di fornire una genesi del numero 1,08366, che comparisce in (11), per mezzo di qualcuno dei numeri trascendenti, che d'ordinario si presentano nelle ricerche numeriche.

Per trovarla trasformò la (11) in

$$x e^{-\frac{x}{\theta(x)}} = e^{1,08366} = 2,95548 \ ,$$

ed osservò poi che

$$\frac{5}{3} \sqrt{\pi} = 2,95482 \ ;$$

ciò gli bastò per credere probabile che la formola dovesse esser corretta così:

$$x e^{-\frac{x}{\theta(x)}} = \frac{5}{3} \sqrt{\pi} \ ,$$

ossia

$$\theta(x) = \frac{x}{\log x + \log \frac{3}{5\sqrt{\pi}}} \ . \tag{12}$$

Calcolò quindi in 22 esempii le deviazioni dei risultati delle formole (11) e (12) da quello della diretta enumerazione sulle tavole e notò che la (12) riduceva di qualchè unità le massime deviazioni positive. Risulterà vano l'artifizio proposto quando si vedrà che il numero 1,08366 è messo fuori da una critica più acuta [cfr. IV, 21 *c*), 22 *e*)].

In fine Drach fece una osservazione più assennata, che suona presso a poco così: Se si assume come formola rappresentante $\theta(x)$ la frazione $\frac{x}{\log x - G}$, e, assegnando varii valori ad x, si eguaglia la frazione ai risultati della effettiva enumerazione, si ottengono per G valori, che decrescono al crescere di x; dunque in fondo G non è costante, ma funzione di x. Eguale osservazione si trova nella lettera di Gauss ad Enke, che fra poco citerò.

Il Glaisher a pag. 77 della introduzione al vol. III delle sue Tavole fa variare x da 50 000 a 9 000 000 di 50 000 unità per volta, calcola per ogni valore di x la quantità G, e trova che essa decresce lentamente da 1,08078 a 1,07666; per $x = 10\,000\,000$ scende a 1,07110, e per $x = 100\,000\,000$ a 1,06397. Fra breve (V, 36 a 39) saranno trovate formole nelle quali in luogo della pseudocostante figurano opportune funzioni della x, che mettono in piena luce quanto si riferisce al termine — G.

17. Formole di Gauss e di Enke. — Più fortunata di quella di Legendre, sebbene a prima giunta non paja, fu la ricerca anch'essa empirica di Gauss, il quale

nella sua lettera ad Enke del 24 dicembre 1849 (WERKE, vol. II, p. 444) *) così si esprimeva:

« Fin dal 1792 o 93 io avevo diretta la mia attenzione sulla decrescente fre-« quenza dei numeri primi, e a questo scopo avevo calcolata questa in ciascuna « chiliade. Io riconobbi subito che tale frequenza, in tutte le fluttuazioni, all'in-« grosso, è prossimamente proporzionale all'inverso del logaritmo, cosicchè il nu-« mero di tutti i numeri primi al di sotto di un dato numero x, è espresso dal-« l'integrale $\int \frac{dx}{\log x}$, se i logaritmi s'intendono iperbolici ». Il fatto, che si assume come frutto dell'esperienza, e la conseguenza

$$(13) \qquad \theta(x) = \int_2^x \frac{dx}{\log x}.$$

che se ne trae, sono ben lungi dal potersi considerare, mediante il passo surriportato, come acquisiti alla scienza. Basta l'osservazione fatta a proposito della formola (11) per poterli infirmare. Ma si vedrà in seguito quanto felice sia stato l'intuito, che condusse Gauss sulle tracce della verità.

La lettera di Gauss rispondeva ad una di Enke (in data del 4 dicembre 1849), in cui questi manifestava l'opinione della convenienza di sostituire la formola di Legendre coll'altra

$$\theta(x) = \frac{x}{\log x} . 10^{\frac{1}{2\log x}} .$$

Gauss, dichiarando che prima non gli era noto che Legendre s' era occupato di tale soggetto, paragona in sei esempii la propria formola alle altre due. Cinque dei sei risultati dànno la preferenza alla formola di Gauss su quella di Enke; e, in quanto a quella di Legendre, egli trova che i numeri ottenuti con questa deviano meno che i valori trovati colla sua. Tale fatto potrebbe, a prima giunta, far giudicare preferibile la formola di Legendre; ma Gauss osserva che le deviazioni offerte da tale formola, per x crescente, aumentano più rapidamente di quelle della sua; sicchè, soggiunge egli, « sarebbe facilmente possibile che, dopo molto « procedere, le prime sorpassino le seconde ».

Agevolmente si riscontra che la previsione di Gauss perfettamente si avvera. Nella solita tabella ho iscritti alla terza colonna i valori di $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$, insieme alle deviazioni relative corrispondenti date da $\frac{\int_2^x \frac{dx}{\log x} - \theta(x)}{\theta(x)} . 100\,000$. Fino ad $x = 4800$

*) Nel libro LE BESGUE Exercices d'Analyse numérique Paris, 1859 p. 123 è riferito che una corrispondenza fra Bessel e Olbers del settembre 1810 prova che già prima d'allora Gauss era in possesso della proposizione da lui poi annunziata nella lettera ad Enke del 1849 (cfr. anche OPPERMANN, Om vor Kundskab om Primtallenes Maengde mellem givne Graendser. *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*. 1882, p. 169).

questa deviazione è superiore a quella

$$\frac{\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \theta(x)}{\theta(x)} \, . \, 100\,000$$

del risultato corrispondente secondo la formola di Legendre; ma per $x = 5\,000\,000$ la prima è diventata inferiore alla seconda, e tale si mantiene per tutta la rimanente estensione della tabella. Ma è poi definitivo il vantaggio offerto dal valore $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$?

Tchebichef, nella memoria qui sotto esaminata nel (Cap. IV, § 21 a 23) considera la differenza $\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \int_2^x \frac{dx}{\log x}$, e trova che da $x = 1\,247\,646, \ldots$ fino ad $x = \infty$, essa è sempre crescente, perciò si deduce che a partire dal valore di x compreso fra 4 800 000 e 5 000 000, pel quale essa si annulla, resterà sempre positiva, sicchè sarà

$$\frac{x}{\log x - 1{,}08366} - \theta(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \theta(x) \, .$$

Null'altro questo ci autorizza a conchiudere che dal predetto valore di x in poi, e fino a quando il secondo membro della diseguaglianza resterà positivo la formola di Legendre darà un risultato più lontano dal vero di quella di Gauss. Non risulta da quanto precede che la medesima conchiusione permarrebbe, se il detto secondo membro diventasse negativo. La quistione se il valore fornito da Gauss meriti la preferenza su quello esibito da Legendre, rimasta lungamente sospesa, non è stata risoluta che recentissimamente a favore del primo, mercè un teorema generale di de la Vallée Poussin, del quale in seguito sarà discorso (cfr. X, 90), sicchè il vantaggio della formola di Gauss, se già non lo è, dovrà finire per diventare permanente. Onde formarsi una idea più chiara del modo di comportarsi reciprocamente delle due formole (11) e (13) giova l'ispezione del diagramma, che segue la tabella, del quale più sotto (V, 38) parlerò.

18. Ricerche di Lejeune Dirichlet. — Ma mentre Gauss pensava a rispondere alla quistione con metodo empirico, altri tentavano di risolverla col puro raziocinio. Lejeune Dirichlet nell'articolo:

Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres. *Crelle Journal für die r. u. a. M.*, vol. XVIII, p. 257, 1838

annunzia che in una memoria da lui letta nel febbrajo di quell'anno all' Accademia di Berlino, egli, come applicazione dei principii esposti per determinare le espressioni limiti dei valori medii di certe funzioni, avea dimostrata la formola di Legendre.

Però della memoria, data come letta in Accademia, non si trova che una breve notizia nei *Monatsberichte der Berlin. Akad.*, dove non vi è traccia dell' annunciata dimostrazione. Nulladimeno a p. 372 del Vol. I delle Opere di Lejeune Dirichlet, nella riproduzione dell'articolo citato sopra, si trova la seguente nota:

« La formola di Legendre non è esatta che nel suo primo termine, la vera « espressione limite essendo $\sum \frac{1}{\log n}$.

« (Osservazione di mano di Lejeune Dirichlet nell'esemplare inviato a Gauss) ».

Da ciò von Mangoldt in una memoria, che in seguito (cfr. X, 89) citerò, argomenta che Dirichlet fosse, fin dal 1838, già in possesso della proposizione che la funzione $\theta(x)$ possa essere espressa dall'integrale $\int \frac{dx}{\log x}$, (cfr. V, 31 a 40).

Dal non essere stata pubblicata la ricerca si può arguire che Dirichlet non era contento del suo procedimento, o che sperava poter raggiungere altro risultato più soddisfacente.

19. Ricerche di Hargreave. — Al principio del 2° semestre dello stesso anno 1849, in fine del quale Gauss scriveva la sua lettera, Hargreave pubblicava l'articolo

Analitical Researches concerning Numbers. *The Philosophical Magazine and Journal of Science.* Serie 3ª, vol. XXXV, p. 36.

In esso l'autore mediante un ragionamento, invero poco soddisfacente, perviene alla formola (13). Dopo un'arbitraria e non chiaramente definita estensione di un simbolo, egli in una equazione, la cui incognita è la differenza Δx di due numeri primi successivi $x, x + \Delta x$, sostituisce ai termini di un rapporto dei loro valori approssimati, e cerca poi un valore approssimato dell'ignota, senza darsi pensiero di esaminare l'errore, che queste varie approssimazioni producono sul risultato finale: così trova $\Delta x = \log x$.

Dopo ciò, chiamata y la totalità dei numeri primi inferiori al numero qualunque x, e posto $x = \varphi(y)$ assume $\log x = \varphi(y+1) - \varphi(y)$, e ritenendo poter scrivere $\varphi'(y)$ invece del secondo membro, ricava

$$\log x = \varphi'(y) = \frac{dx}{dy},$$

donde

$$y = \int \frac{dx}{\log x} + C,$$

e

$$\theta(x) - \theta(x') = \int_{x'}^{x} \frac{dx}{\log x}.$$

risultati, che egli enuncia così:

a) La distanza attendibile (*average*) fra due numeri primi successivi al punto x della serie ordinale è $\log x$;

b) Il numero attendibile dei primi fra x' ed x è $\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\log x}$.

Dopo lette le memorie di Tchebichef, delle quali parlerò al Capitolo IV, egli credette nel 1854 di ritornare sulla proposizione *a*), e nello scritto già citato in (II, 14) ne esibì una nuova dimostrazione, però non più convincente della prima. Stabilita la eguaglianza [cfr. V, 31 eq. (26)]

$$\lim_{x=1}\left(\sum_m \frac{1}{m^x \log m} - \sum_p \frac{1}{p^x}\right) = \text{costante finita},$$

dove la prima somma è estesa a tutti i numeri interi, e la secondo a tutti i numeri primi, e richiamato dal lavoro precedente che $\sum \frac{1}{m \log m}$ è la somma dei reciproci di una serie di numeri, che chiama numeri primi teoretici, ciascuno dei quali è eguale al precedente aumentato del logaritmo di questo, procede colla seguente molto discutibile argomentazione:

« Poichè assegnato un valor conveniente al numero primo teoretico iniziale, si può asserire che la somma degl' inversi dei numeri primi teoretici è eguale alla somma degl' inversi dei numeri primi effettivi, si potrà conchiudere che per questi la distanza attendibile fra due di essi al punto x è $\log x$ ».

20. Nota di Glaisher. — Passati poco meno che quarant'anni, durante i quali, come si vedrà, molto cammino si è fatto con metodi di ragionamento ben più corretti, è comparso un articolo, che si ricongiunge ai precedenti, cioè

GLAISHER — Note on the Law of Frequency of prime Numbers. *The Messenger of Mathematics.* New series, Vol. XXIII, p. 97, 1893.

In esso l'autore si dichiara convinto che il problema è di natura sì intricata, che è veramente difficoltoso il dedurre una investigazione sufficientemente soddisfacente della legge di frequenza, mediante un ragionamento generale, con considerazioni elementari. Nulladimeno gli sembra interessante di registrare la sua, che conduce alla legge $\log x$, o ad una equazione funzionale soddisfatta da $\log x$. Ma varie pecche di ragionamento rendono molto scarso il valore delle argomentazioni dell'autore.

CAPITOLO IV.

21. Prima memoria di Tchebichef. I primi risultati di essa contradicono alla formola di Legendre. — Per la determinazione della funzione $\theta(x)$ le ricerche seriamente razionali furono inaugurate dalla memoria

TCHEBICHEF — Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée,

presentata all'*Accademia imperiale di S. Pétersbourg* il 24 maggio 1848, e pubblicata nella raccolta di detta Accademia, *Mémoires présentés par divers savants,* t. VI, p. 141 anno 1851, e nel *Journal de mathématiques pures et appliquées* di *Liouville,* I série, t. XVII, p. 341, anno 1852.

Le verità, che furono acquisite, mediante questo lavoro, alla scienza, rientrano nel complesso di quelle, che in appresso saranno riferite, e che rispondono in modo più completo alla quistione; perciò io ora nel rendere conto di questa memoria mi limito a riassumere i risultati, rimandando per le dimostrazioni alla Teoria delle Congruenze del medesimo autore tradotta dalla Dott.[a] I. MASSARINI, Roma, 1895, dove la predetta memoria è riprodotta, e corredata di note esplicative.

Soggiungerò solo qualche cenno delle dimostrazioni, quando esso mi debba servire di addentellato a osservazioni successive.

Il punto di partenza consiste nel teorema

a) *Supposto* x $>$ 1 , *la somma*

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left[\theta(m+1)-\theta(m)-\frac{1}{\log m}\right]\frac{(\log m)^n}{m^x},$$

coll'avvicinarsi di x *ad* 1, *converge a un limite finito e determinato.*

La dimostrazione comincia col provare che questa proprietà è posseduta dalle funzioni, che s' ottengono derivando più volte rispetto ad x le espressioni

$$(14)\qquad \sum_m \frac{1}{m^x}-\frac{1}{x-1}\ ,\quad \log(x-1)-\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^x}\right)\ ,\quad \sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^x}\right)+\sum_p \frac{1}{p^x}\ ,$$

dove la prima sommatoria va estesa a tutti i numeri interi m, e le altre a tutti i numeri primi p. La funzione $\theta(m)$ è introdotta nel ragionamento mediante la proprietà che la differenza $\theta(m+1)-\theta(m)$ è nulla, se l' intero m non è primo, è invece eguale ad 1, se m è un numero primo. Si deducono successivamente dal teorema a) due altri, che stimo bene esprimere così:

b) *Non esiste limite, al di là del quale cessino di trovarsi numeri* m *soddisfacenti alle inequazioni*

$$\theta(m)>\int_2^m \frac{dx}{\log x}-\frac{\alpha m}{(\log m)^n},$$

$$\theta(m)<\int_2^m \frac{dx}{\log x}+\frac{\alpha m}{(\log m)^n},$$

comunque piccola sia la quantità α, *ma positiva, e comunque grande sia il numero* n, *ma positivo, e altresì finito.*

c) *Dato che l'espressione* $\frac{m}{\theta(m)}-\log m$, *per* $m=\infty$, *tende a un limite, questo è* -1.

Tale risultato già mostra non essere accettabile la proposizione di Legendre empiricamente dedotta, ed espressa dall'eguaglianza (11); giacchè secondo questa il limite di $\frac{m}{\theta(m)}-\log m$ dovrebbe essere $-1{,}08366$ invece di -1. Si vedrà tra poco in qual senso occorre interpretare la su ricordata proposizione, o meglio come essa possa opportunamente modificarsi, in modo da restar nel vero.

22. Espressione di $\theta(m)$ fino agl'infiniti dell'ordine di $\frac{m}{(\log m)^n}$. Espressione per mezzo del logaritmo integrale. — Da quanto precede si raccoglie che a sinistra di $m=\infty$, l' infinito $\theta(m)-\frac{m}{\log m}$ è di ordine inferiore a quello comune a $\theta(m)$ ed $\frac{m}{\log m}$.

Allo scopo di procedere oltre nella valutazione di questa differenza, giova introdurre la seguente locuzione: Se una funzione $f(m)$ è tale che sia

$$\lim_{m=\infty}\left\{[\theta(m)-f(m)]\frac{(\log m)^n}{m}\right\}=0,$$

dicesi che $f(m)$ esprime $\theta(m)$ esattamente fino agl' infiniti dell' ordine di $\frac{m}{(\log m)^n}$ inclusivamente.

Ecco ora una condizione necessaria, cui deve adempire la ora menzionata funzione $f(m)$.

d) *Se l'espressione*

$$\left[f(m) - \int_2^m \frac{dx}{\log x}\right] \frac{(\log m)^n}{m}$$

er $m = \infty$ *ha un limite diverso da* 0, *la* f(m) *non può esprimere* $\theta(m)$ *esattamente fino agl' infiniti dell'ordine di* $\frac{m}{(\log m)^n}$ *inclusivamente.*

L'utilità del teorema consiste in ciò, che permette paragonare la funzione $f(m)$ non alla $\theta(m)$, di cui è ignota la espressione analitica, ma all' integrale $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$, del quale si sa calcolare con quell'approssimazione, che si desidera, il valore numerico per ogni m dato.

Sono corollarii immediati di questa verità:

e) *La frazione* $\frac{m}{\log m - 1{,}08366}$ *non può esprimere* $\theta(m)$ *fino agl' infiniti dell'ordine di* $\frac{m}{(\log m)^2}$ *inclusivamente.*

f) *Acciocchè la frazione* $\frac{m}{A \log m + B}$ *rappresenti* $\theta(m)$ *fino agl' infiniti dell'ordine di* $\frac{m}{(\log m)^2}$, *è necessario che sia* $A = 1$, $B = -1$.

Per tal riguardo si può dire che deve finire per trovarsi una m, sia pur molto grande, dalla quale in poi la frazione $\frac{m}{\log m - 1}$ sarà preferibile al valore (11) fornito da Legendre. L'esperienza però ci avverte che questo valore di m è abbastanza lontano dalla regione della serie naturale, alla quale pervengono le tavole di numeri primi finoggi costruite (cfr. V, 37).

23. Ecco ora il teorema più saliente della memoria in esame:

g) *Ammesso per ipotesi che* $\theta(m)$ *sia esprimibile fino agl' infiniti dell' ordine di* $\frac{m}{(\log m)^n}$ *inclusivamente mediante una funzione algebrica di* e^m, m, $\log m$, *fino ad essi può scriversi*

$$\theta(m) = \frac{m}{\log m} + \frac{1!\,m}{(\log m)^2} + \frac{2!\,m}{(\log m)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,m}{(\log m)^n}.$$

Sicchè si ha successivamente

$$\lim_{m=\infty} \frac{\theta(m) - \frac{m}{\log m}}{\frac{1!\,m}{(\log m)^2}} = 1$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{\theta(m) - \frac{m}{\log m} - \frac{1!\,m}{(\log m)^2}}{\frac{2!\,m}{(\log m)^3}} = 1.$$

. . . .

Poichè l'espressione

$$\frac{m}{\log m}+\frac{1!\,m}{(\log m)^2}+\frac{2!\,m}{(\log m)^3}+\cdots+\frac{(n-1)!\,m}{(\log m)^n}$$

differisce da $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$ per un infinito dell'ordine di $\frac{m}{(\log m)^{n+1}}$ (cfr. § seguente, nota), ne segue che, nell'ipotesi del teorema g)

l'integrale $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$ *rappresenta anch'esso* $\theta(m)$ *sino agl'infiniti di quell'ordine, fino al quale* $\theta(m)$ *può esprimersi algebricamente mediante* e^m, m, *log* m.

Dimodo che, data l'esistenza del limite, si ha non solo

$$\lim_{m=\infty}\frac{\theta(m)}{\int_2^m \frac{dx}{\log x}}=1\ ,$$

ma quanto, supposto che quella ipotesi permanga qualunque sia n, la differenza $\theta(m)-\int_2^m \frac{dx}{\log x}$ sarà di ordine inferiore a quello di $\frac{m}{(\log m)^n}$, comunque grande sia n.

Il valore principale dell' integrale

$$\int_0^m \frac{dx}{\log x}\ ,\qquad \text{cioè}\quad \lim_{\varepsilon=0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\log x}+\int_{1+\varepsilon}^m \frac{dx}{\log x}\right),$$

il quale non differisce che per un numero finito, indipendente da m, dall' integrale fin qui considerato $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$, si chiama *logaritmo integrale*, si indica col simbolo $\mathrm{Li}(m)$, e rappresenta una parte importantissima in questa teoria.

In virtù del principio che il limite del rapporto di due infiniti non muta, se questi si aumentano di infiniti di ordine inferiore, e in particolare di quantità finite, il precedente risultato può scriversi

$$\lim_{m=\infty}\frac{\theta(m)}{\mathrm{Li}(m)}=1\ .$$

Il resto della memoria è dedicato ad applicazioni, di cui più in là terrò parola (Capitolo VII).

24. Nuova enunciazione dei precedenti risultati. Esatto apprezzamento delle formole di Legendre e Gauss. — Ricordando le definizioni di funzioni *assintotiche* fra loro, e di *espressione* o *legge assintotica* di una funzione (CESÀRO, Elementi di Calcolo infinitesimale, III, 19, p. 73) i precedenti risultati possono enunciarsi così:

Ammessa l'esistenza dei limiti, per $m=\infty$, dei rapporti

$$\frac{\theta(m)}{\frac{m}{\log m}}\ ,\quad \frac{\theta(m)}{\frac{m}{\log m-1{,}08366}}\ ,\quad \frac{\theta(m)}{\frac{m}{\log m-1}}\ ,\quad \frac{\theta(m)-\frac{m}{\log m}}{\frac{1!\,m}{(\log m)^2}}\ ,\ \ldots\ ,\quad \frac{\theta(m)}{\int_2^m \frac{dx}{\log x}}\ ,\quad \frac{\theta(m)}{\mathrm{Li}(m)}\ ,$$

le funzioni

$$\frac{m}{\log m}\ ,\quad \frac{m}{\log m - 1{,}08366}\ ,\quad \frac{m}{\log m - 1}\ ,\quad \int_2^m \frac{dx}{\log x}\ ,\quad \mathrm{Li}(m)$$

sono tutte assintotiche a $\theta(m)$, o sono valori assintotici di $\theta(m)$, ed

$$\frac{m}{\log m} + \frac{1!\,m}{(\log m)^2} + \frac{2!\,m}{(\log m)^3} + \frac{3!\,m}{(\log m)^4} + \dots\dots$$

fornisce una rappresentazione o legge assintotica di $\mathrm{Li}(m)$, e di $\theta(m)$ *).

---

*) Per quel che riguarda la funzione $\theta(m)$ saranno esposti in seguito ragionamenti, dai quali i precedenti risultati emergeranno in piena luce. Il fatto che

$$\frac{m}{\log m} + \frac{1!\,m}{(\log m)^2} + \frac{2!\,m}{(\log m)^3} + \dots + \frac{n!\,m}{(\log m)^{n+1}} + \dots$$

fornisce una rappresentazione assintotica di $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$, o di $\mathrm{Li}(m)$, vale a dire che, ***malgrado che il*** *precedente sviluppo sia divergente*, si può scrivere l'eguaglianza assintotica,

$$\int_2^m \frac{dx}{\log x}\ ,\qquad \text{oppure}\qquad \mathrm{Li}(m) = \frac{m}{\log m} + \frac{1!\,m}{(\log m)^2} + \frac{2!\,m}{(\log m)^3} + \dots + \frac{n!\,m}{(\log m)^{n+1}} + \dots\ ,$$

sarà in prosieguo più volte invocato; e giacchè la dimostraziane, che se ne trova nella nota a piè della pagina 236 della traduzione della Teoria delle congruenze su citata, sembra attaccabile stimo bene soggiungere un ragionamento, che lo prova.

Mediante successive integrazioni per parti si deduce

$$\int_2^m \frac{dx}{\log x} = \frac{m}{\log m} + \frac{1!\,m}{(\log m)^2} + \frac{2!\,m}{(\log m)^3} + \dots + \frac{n!\,m}{(\log m)^{n+1}} + (n+1)!\int_2^m \frac{dx}{(\log x)^{n+2}} + \text{Cost.}\ ,$$

essendo

$$\text{Cost.} = \frac{2}{\log 2} + \frac{1!2}{(\log 2)^2} + \frac{2!2}{(\log 2)^3} + \dots + \frac{n!2}{(\log 2)^{n+1}}\ .$$

Ora

$$\lim_{m=\infty} \frac{(n+1)!\int_2^m \frac{dx}{(\log x)^{n+2}} + \text{Cost.}}{\frac{n!\,m}{(\log m)^{n+1}}} = \lim_{m=\infty} \frac{(n+1)!\,\frac{1}{(\log m)^{n+2}}}{n!\,\frac{(\log m)^{n+1} - (n+1)(\log m)^n}{(\log m)^{2(n+1)}}} = \lim_{m=\infty} \frac{n+1}{\log m - (n+1)} = 0,$$

quindi

$$\lim_{m=\infty} \frac{\int_2^m \frac{dx}{\log x} - \frac{m}{\log m} - \frac{1!m}{(\log m)^2} - \frac{2!\,m}{(\log m)^4} - \dots - \frac{(n-1)!\,m}{(\log m)^n}}{\frac{n!\,m}{(\log m)^{n+1}}} = 1\ ,$$

e resta provato l'asserto per $\int_2^m \frac{dx}{\log x}$. Poichè $\mathrm{Li}(m)$ differisce da questo per una costante, è anche per esso vera la proposizione.

Le formole (11) e (13) di Legendre e Gauss reggono dunque, *ma considerate come eguaglianze assintotiche.*

25. Con lieve modifica il procedimento di Tchebichef conduce a un risultato più completo trovato poi da Riemann. — Come più in là sarà esposto, il problema in esame ha fatto un gran passo quando è stata chiamata in ajuto la teoria delle funzioni di variabile complessa. Non per tanto è da osservarsi che il notevole valore approssimato di $\theta(x)$, cui per tale via si perviene, può agevolmente ottenersi mediante il procedimento di Tchebichef; e poco mancò che questi non l'avesse rinvenuto, come ha osservato il Gram a pag. 301 della sua memoria premiata:

Undersogelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense. *Vidensk. Selsk. Skr., 6te Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afd.* 2det, Bd. VI, Kjobenhavn, 1884.

In effetti considero la funzione

$$\theta_1(m) = \theta(m) + \frac{1}{2}\theta(m^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(m^{\frac{1}{3}}) + \dots .$$

Essa gode della proprietà che la differenza $\theta_1(m+1) - \theta_1(m)$ è nulla, se l'intero m non è una potenza intera qualunque d'un numero primo; è invece eguale ad $\frac{1}{\nu}$, se m eguaglia la potenza ν^{ma} di un numero primo.

Noto dippiù che, essendo

$$\log\left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = -\frac{1}{p^x} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^{2x}} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^{3x}} - \dots ,$$

la espressione

$$\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^x}\right) + \sum_p \frac{1}{p^x} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2x}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3x}} + \dots , \tag{15}$$

dove le sommatorie sono estese a tutti i numeri primi, è nulla identicamente, insieme a tutte le sue derivate. Se si sostituisce la (15) all'ultima delle espressioni (14), il medesimo procedimento, col quale Tchebichef provò il teorema a), conduce invece all'altro:

Supposto $x > 1$, *la somma*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left[\theta_1(m+1) - \theta_1(m) - \frac{1}{\log m}\right] \frac{(\log m)^n}{m^x} ,$$

coll'avvicinarsi di x *ad* 1, *converge a un limite finito e determinato.*

E poichè il teorema a), senza bisogno di altra proprietà speciale della funzione $\theta(m)$, condusse Tchebichef a conchiudere che questa funzione può essere rappresentata mediante il logaritmo integrale; così la osservazione fatta abilita, nella ipotesi analoga a quella di g), ad argomentare lo stesso per la funzione $\theta_1(m)$. Da ciò, come si vedrà più sotto (cfr. VIII, 69), si deduce per $\theta(m)$ una formola di approssimazione, trovata poi da Riemann, più completa che $\mathrm{Li}(m)$.

26. Seconda memoria di Tchebichef. Funzioni $\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\vartheta(x)} \log p_n$, e $\psi(x)$. Postulato di Bertrand. — Non si può passare oltre senza dar conto qui dell' altro lavoro dello stesso TCHEBICHEF:

Sur les nombres premiers. *Mémoires présentés à l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg par divers savants* t. VII, p. 17, 1854 e *Journal de mathématiques p. et a. de Liouville*, t. XVII, p. 366, 1852.

Sebbene molto complicate siano le espressioni dei limiti, fra i quali il dotto russo in questa ulteriore memoria racchiude la funzione $\theta(x)$, pure il principio, da cui parte, è estremamente importante, e a questo mettono capo, come s'avrà spesso in seguito occasione di verificare, interessanti ricerche sui numeri primi. Esso si enuncia

h) *Indicata con* $\lambda(x)$ *la somma dei logaritmi neperiani di tutti i numeri primi, che non sorpassano* x, *e posto*

$$\lambda(x) + \lambda(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots = \psi(x),$$

si ha

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots = \log[1.2.3\ldots E(x)]. \tag{16}$$

Questa eguaglianza si dimostra facilissimamente, giacchè è agevole il vedere che se p è un numero primo, che non supera x, ed è

$$p^\nu \leqq x < p^{\nu+1},$$

ambedue i membri dell'eguaglianza (16) equivalgono alla sommatoria

$$\sum \left[E\left(\frac{x}{p}\right) + E\left(\frac{x}{p^2}\right) + \cdots + E\left(\frac{x}{p^\nu}\right) \right] \log p$$

estesa a tutti i numeri primi non superiori ad x.

Partendo da questo teorema, con un procedimento abbastanza lungo, si trovano due limiti, che comprendono fra loro la funzione $\psi(x)$, e poi si fa lo stesso per $\lambda(x)$, cioè si ricava:

i) *Posto*

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{3}} . 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0.92129202\ldots = D,$$

si hanno per $\psi(x)$ *le due limitazioni*

$$\psi(x) < \frac{6}{5} Dx + \frac{5}{4\log 6} (\log x)^2 + \frac{5}{4} \log x + 1$$

$$\psi(x) > Dx - \frac{5}{2} \log x - 1 \quad ,$$

e per $\lambda(x)$ *le altre due*

$$\lambda(x) < \frac{6}{5} Dx - Dx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6} (\log x)^2 + \frac{5}{2} \log x + 2$$

$$\lambda(x) > Dx - \frac{12}{5} Dx^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8\log 6} (\log x)^2 - \frac{15}{4} \log x - 3 .$$

Quindi per la totalità dei numeri primi compresi fra due limiti si trae:

j) *La totalità* $\vartheta(H) - \vartheta(h)$ *dei numeri primi più grandi di* h, *e che non sorpassano* H, *verifica le ineguaglianze*

$$\vartheta(H) - \vartheta(h) < \frac{D\left(\frac{6}{5} H - h\right) - D\left(H^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5} h^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\log 6}[2(\log H)^2 + (\log h)^2] + \frac{5}{4}(2\log H + 3\log h) + 5}{\log h}$$

$$\vartheta(H) - \vartheta(h) > \frac{D\left(H - \frac{6}{5} h\right) - D\left(\frac{12}{5} H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\log 6}[(\log H)^2 + 2(\log h)^2] - \frac{5}{4}(3\log H + 2\log h) - 5}{\log H} .$$

Da questo enunciato si deduce, come corollario, il postulato di Bertrand (Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle referme. *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXX, p. 123, 1845):

A partire da $m = 4$ *vi è sempre un numero primo più grande di* m *e più piccolo di* $2m - 2$.

27. Nuovi limiti racchiudenti $\vartheta(x)$ **e fornenti un valore approssimato di questa funzione con un errore minore del 10 per cento.** — Infine il Tchebichef si propone di trovar due limiti più ristretti di quelli esibiti dal teorema *j)*, e per far ciò esamina le serie della forma $\sum_p F(p)$, dove la sommatoria è estesa a tutti i numeri primi. Trova due limiti frai quali è racchiusa la somma di quanti si vogliano termini consecutivi di detta serie, e deduce poi il teorema:

k) *Se la funzione* F(x), *da un certo valore di* x *in poi, resta positiva, la convergenza della serie*

$$\sum_m \frac{F(m)}{\log m} = \frac{F(2)}{\log 2} + \frac{F(3)}{\log 3} + \frac{F(4)}{\log 4} + \cdots$$

(*dove la sommatoria è estesa a tutti i numeri interi maggiori di* 1) *è condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie*

$$\sum_p F(p) = F(2) + F(3) + F(5) + \cdots$$

(*dove la sommatoria è estesa a tutti i numeri primi*) *sia convergente.*

Dopo ciò, applicate le due limitazioni trovate alla somma dei termini di $\sum_p F(p)$ corrispondenti a tutti i numeri primi non superiori ad x, vi suppone $F(p) = 1$, e perviene alla proposizione:

l) *Posto per brevità*

$$F_1(m)=\frac{6}{5}\,Dm-Dm^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{4\log 6}(\log m)^2+\frac{5}{2}\log m+2$$

$$F_2(m)=Dm-\frac{12}{5}Dm^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{8\log 6}(\log m)^2-\frac{15}{4}\log m-3\ ,$$

si ha

$$\frac{F_2(1)}{\log 2}-\frac{F_1(1)}{\log 2}+\sum_{m=2}^{x}\frac{F_2(m)-F_2(m-1)}{\log m}<\vartheta(x)<\frac{F_1(1)}{\log 2}-\frac{F_2(1)}{\log 2}+\sum_{m=2}^{x}\frac{F_1(m)-F_1(m-1)}{\log m}\ .$$

La differenza di questi due limiti, fra cui s'è racchiusa $\vartheta(x)$, è minore di $\frac{1}{10}$ del limite inferiore; sicchè, se si sceglie come valore approssimato di $\vartheta(x)$ la semisomma dei due limiti, l'errore è minore del 10 per cento.

Difficilmente però da queste due formole si può trarre qualche utile conchiusione circa la frequenza dei numeri primi.

28. Complementi di Sylvester e di Gram. — A queste ricerche fa seguito la memoria

Sylvester — On Tchebichef's Theory of the Totality of the Prime Numbers comprised within given Limits. *American Journal of Mathematics.* Vol. IV, p. 230, 1881.

In essa l'autore comincia dal notare che, sebbene non esplicitamente enunciata dal Tchebichef, pure è immediata conseguenza di quella parte del teorema *i)*, assegnante due limiti per la funzione $\psi(x)$, che la totalità dei numeri primi compresi fra $x+H$ e $(1+\varepsilon)x+K$ diventa infinitamente grande con x, per piccolo che sia ε. Però ivi la proposizione non resta provata per tutti i valori di ε, ma soltanto per quelli, che eccedono $\frac{1}{5}$. Lo scopo della memoria di Sylvester è di fare un passo avanti nella stessa direzione, e di mostrare, seguendo i principii di Tchebichef, che la proposizione è pur vera quando ε è compresa fra $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}+\frac{1}{4642\frac{10}{11}}$; cosicchè la regione dell'incertezza è ridotta a poco più che $\frac{5}{6}$ di quella, che era secondo Tchebichef.

Mi astengo dal riassumere qui la lunga e minuta analisi del Sylvester, e mi limito a questo rapido cenno per la considerazione che la importanza del progresso realizzato da Sylvester è scemata, quando il teorema in discorso è stato completamente, e senza lasciare nessuna regione di incertezza, dimostrato, come sarà esposto nel Capitolo X (§ 87). Quivi (§ 84 a 86) sarà ripreso pure lo studio delle funzioni $\lambda(x)$, $\psi(x)$ definite nel § 26.

Anche un lavoro di Poincaré si connette colle ricerche di Tchebichef; ma di esso sarà più opportuno parlare in seguito (XI, 95).

Invece si connette più direttamente colle ricerche sopra esposte di Tchebichef e di Sylvester lo scritto

Gram — Note sur le problème des nombres premiers. *Oversight over det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*, Annata 1897, p. 235.

Nel teorema più sopra indicato con *i)* considerando le limitazioni di $\psi(x)$, non tenendo conto dei termini logaritmici, e sostituendo per D il suo valore, le ineguaglianze di Tchebichef possono scriversi

$$1,10555x > \psi(x) > 0,92129x .$$

Ora Gram va più oltre in questa via, e perviene a dimostrare le ineguaglianze

$$1,07745x > \psi(x) > 0,93447x ;$$

così l'intervallo frai due limiti è ridotto a circa tre quarti della sua ampiezza originale.

È bene però riflettere che già Sylvester, lungo l'articolo or ora mentovato, allo scopo di restringere i limiti racchiudenti $\psi(x)$, avea stabilita una serie di di diseguaglianze

$$\mu_i x + R_i \log x > \psi(x) > \nu_i x + S_i \log x \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots.) ,$$

e dedotto

$$\mu_\infty = 1,006774 \ldots \quad , \quad \nu_\infty = 0,992612 \ldots .$$

In nessuno dei due lavori si scorge come i rispettivi procedimenti vadano continuati in modo da poter dimostrare $\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$, come d'altronde si sa per altra via (X, 85).

Questa investigazione di Gram è preceduta da un'altra ricerca di due nuovi limiti comprendenti fra loro $\vartheta(x)$, nel caso particolare di $x = 2^n$.

Costruiscasi la succession dei numeri interi povitivi

$$t_1 = 2, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 3, t_5 = 6, t_6 = 9, t_7 = 18, t_8 = 30, t_9 = 56,$$
$$t_{10} = 99, t_{11} = 186, t_{12} = 335, \ldots,$$

il cui termine generale è fornito dalla eguaglianza

$$n t_n = \sum \mu(d_i) 2^{\frac{n}{d_i}} ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i divisori $d_1, d_2, \ldots,$ di n, e il simbolo μ dinota la funzione numerica, che si troverà definita più sotto nel Cap. VIII, § 69.

Dopo ciò il Gram con un ragionamento, che egli stesso dichiara insufficiente, perviene alle ineguaglianze

$$1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1} + t_n > \vartheta(2^n) > t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{n-1} .$$

Inoltre per la funzione

$$\vartheta_1(x) = \vartheta(x) + \frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

trova

$$\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}>\mathfrak{S}_1(2^n)>\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{n-1}.$$

La media aritmetica dei due limiti offre un valore molto approssimato di $\mathfrak{S}_1(2^n)$.

CAPITOLO V.

29. Ricerche di Cesàro. Teorema sul limite del rapporto delle somme di due serie di funzioni pel massimo valore della variabile, pel quale esse sono divergenti. — A parecchi valori assintotici della funzione $\mathfrak{S}(m)$ perviene il Cesàro, con un metodo notevole per la sua fecondità, nella memoria

Nuova contribuzione ai principii fondamentali dell'aritmetica assintotica. *Atti della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli.* Serie 2ª, vol. VI, n. 11, 1893.

dalla quale riassumo quanto concerne l'argomento qui in esame.

Da un teorema fondamentale stabilito nei preliminari della memoria si trae la seguente proposizione:

Supposto $u_0(x)>u_1(x)>u_2(x)>\ldots$, *consideriamo le due serie di funzioni*

$$\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n u_n(x) \quad , \quad \beta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n u_n(x)$$

convergenti a destra di x_0, *e tali che per* x *tendente ad* x_0 *le loro somme aumentino indefinitamente; si ha*

$$\lim_{x=x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n},$$

se esiste il secondo membro; o più generalmente

$$\lim_{x=x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{n=\infty}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{b_0+b_1+\cdots+b_n},$$

quando esiste il secondo membro, il che può avvenire anche quando non esiste il secondo membro della precedente eguaglianza.

Tale teorema sarà invocato in varie parti di questo scritto.

30. Coefficienti dello sviluppo di $-\frac{1}{x-1}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^x}$ **in serie ordinata secondo le potenze ascendenti di** $x-1$. Dopo ciò l'autore prende a considerare la funzione di x rappresentata dalla serie

$$1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^x},$$

la quale, posto che x sia reale, è convergente per $x > 1$, divergente per $x \leq 1$. Molto ne avrò a discorrere in prosieguo, anche supponendo complessa la variabile; ma, nella memoria in esame, basta pensare la x reale. Generalmente la funzione rappresentata dalla predetta sommatoria viene indicata con $\zeta(x)$, ed io perciò adotto tale simbolo per dinotare la serie.

Una proprietà cardinale di essa è dovuta ad Eulero, ed è espressa dalla eguaglianza

$$\sum_m \frac{1}{m^x} = \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)}, \tag{17}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i numeri interi, e il segno di prodotto a tutti i numeri primi (LEJEUNE-DIRICHLET, Lezioni sulla Teoria dei numeri, trad. Faifofer, p. 336).

Era noto da un pezzo [cfr. la proprietà della prima delle espressioni (14), IV, 21, *a*)] che la funzione $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ è sviluppabile in una serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $x - 1$, sicchè può scriversi

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + C - C_1(x-1) + C_2(x-1)^2 - C_3(x-1)^3 + \dots \tag{18}$$

Il Cesàro nella memoria in discorso determina l'espressione generale dei coefficienti C, stabilendo

$$\begin{cases} C = \lim\limits_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \text{costante d'Eulero} \\ C_r = \frac{1}{r!} \lim\limits_{n=\infty} \left(\frac{(\log 2)^r}{2} + \frac{(\log 3)^r}{3} + \dots + \frac{(\log n)^r}{n} - \frac{(\log n)^{r+1}}{r+1}\right). \end{cases} \tag{19}$$

Questi coefficienti si trovano altrimenti calcolati nelle note

JENSEN — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Comptes rendus d. s. de l'A. d. s.* T. 104, p. 1156, 1887.

FRANEL — Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques. *Mathematische Annalen.* Vol. LI, p. 381, 1899; il primo di questi autori, procedendo alla valutazione numerica, rinvenne

$C =$	0,577 215 664 902 ...	$C_5 =$	0,000 006 611 ......
$C_1 =$	— 0,072 815 845 48	$C_6 =$	— 0,000 000 332 ......
$C_2 =$	— 0,004 845 181 596 ...	$C_7 =$	— 0,000 000 105 ......
$C_3 =$	0,000 342 305 73	$C_8 =$	— 0,000 000 009 ......
$C_4 =$	0,000 096 889		

31. Limite del rapporto per $x=1$ delle somme delle due serie $\sum_p \frac{1}{p^x}$, $\sum_m \frac{1}{m^x \log m}$. Deduzione dei valori assintotici $\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{\log n}$ (Dirichlet), $\frac{m}{\log m}$ di $\vartheta(m)$. — Quando viene

all'applicazione ai numeri primi del teorema del § 29, il Cesàro prende a considerare la serie

$$\varsigma(x)=\sum_p \frac{1}{p^x}=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}+\frac{1}{7^x}+\frac{1}{11^x}+\cdots, \tag{20}$$

la quale in virtù del teorema (IV, 27, k)) è convergente per $x>1$, divergente per $x\leq 1$.

Or dalla (17) si trae

$$\log\zeta(x)=-\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^x}\right)=\varsigma(x)+\frac{1}{2}\varsigma(2x)+\frac{1}{3}\varsigma(3x)+\frac{1}{4}\varsigma(4x)+\cdots. \tag{21}$$

Riflettendo inoltre che la serie

$$\frac{1}{2}\varsigma(2)+\frac{1}{3}\varsigma(3)+\frac{1}{4}\varsigma(4)+\cdots$$

è convergente, giacchè $\frac{1}{m+1}\varsigma(m+1):\frac{1}{m}\varsigma(m)<\frac{1}{2}$, e chiamandone A la somma, si ricava da (21)

$$\lim_{x=1}[\log\zeta(x)-\varsigma(x)]=\mathrm{A}. \tag{22}$$

Moltiplicando per dx la (18), integrando fra 2 e x, e passando al limite si ha

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^x\log m}-\log\frac{1}{x-1}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2\log m}-1+\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}\mathrm{C}_2-\cdots.$$

Ora tenendo conto delle (19) si deduce

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^2\log m}-1+\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{C}_1+\frac{1}{3}\mathrm{C}_2-\cdots=\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{m\log m}-\log\log m\right)$$
$$-\lim_{m=\infty}\left(\log m-\frac{(\log m)^2}{2!2}+\frac{(\log m)^3}{3!3}-\frac{(\log m)^4}{4!4}+\cdots-\log\log m\right);$$

ma si ha per una delle definizioni della costante d'Eulero

$$\lim_{u=\infty}\left(u-\frac{u^2}{2!2}+\frac{u^3}{3!3}-\frac{u^4}{4!4}+\cdots-\log u\right)=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u}-e^{-u}\right)\frac{du}{u}=\mathrm{C},$$

quindi, ponendo

$$\lim_{m=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{m\log m}-\log\log m\right)=\mathrm{B}, \tag{23}$$

si ottiene

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^x\log m}-\log\frac{1}{x-1}\right)=\mathrm{B}-\mathrm{C}. \tag{24}$$

Intanto in virtù di (18) si ha

$$\lim_{x=1}[(x-1)\zeta(x)]=1 , \tag{25}$$

ossia

$$\lim_{x=1}\left[\log\frac{1}{x-1}-\log\zeta(x)\right]=0 ,$$

e, sommando questa con (24) e (22), si ricava

$$\lim_{x=1}\left[\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^x\log m}-\varsigma(x)\right]=\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C} . \tag{26}$$

Infine, notando che $\varsigma(x)$ può scriversi sotto la forma

$$\varsigma(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)-\vartheta(m-1)}{m^x} ,$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i numeri interi, la (26) si trasforma in

$$\lim_{x=1}\left\{\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\log m}\cdot\frac{1}{m^x}-\sum_{m=2}^{\infty}[\vartheta(m)-\vartheta(m-1)]\frac{1}{m^x}\right\}=\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C} . \tag{27}$$

Da quest'ultima si trae

$$\lim_{x=1}\frac{\sum_{m=2}^{\infty}[\vartheta(m)-\vartheta(m-1)]\frac{1}{m^x}}{\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\log m}\cdot\frac{1}{m^x}}=1 ;$$

dunque, applicando il teorema del § 29, si ha che:

Se la funzione

$$\frac{\vartheta(m)}{\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\cdots+\frac{1}{\log m}} ,$$

per m $=\infty$, *tende a un limite, questo è* 1: (cfr. l'enunciato di Dirichlet, III, 18).

Ora con considerazioni elementari si ha

$$\lim_{m=\infty}\frac{\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\cdots+\frac{1}{\log m}}{\frac{m}{\log m}}=\lim_{m=\infty}\frac{\frac{1}{\log m}}{\frac{m}{\log m}-\frac{m-1}{\log(m-1)}}=1 ;$$

dunque si conchiude che

$$\lim_{m=\infty} \frac{\frac{\vartheta(m)}{m}}{\log m} \quad \textit{non può essere diverso da } 1\,;$$

cioè che, nell' ipotesi dell'esistenza del limite, si ha *assintoticamente*

$$\vartheta(m) = \frac{m}{\log m}\,,\ [\,\text{IV}, 21\ c), 24\,]\ .$$

32. Proposta dell'autore del presente scritto di una nuova segnatura. — Or qui, nell' intento di rendere più evidenti alcuni passaggi successivi della memoria in istudio, stimo opportuno avvalermi di una nuova segnatura, e soggiungere qualche schiarimento. Convengo che Ω indichi una funzione di x tale che essa e tutte le sue derivate assumano valori finiti per $x = 1$. Questa proprietà certamente ha luogo se la funzione nell'intorno del punto 1, o almeno da una banda di questo, ammette lo sviluppo

$$\omega_0 + \omega_1(x-1) + \omega_2(x-1)^2 + \ldots\,,$$

essendo $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$ costanti finite.

Col simbolo Ω intendo porre in luce *soltanto* il detto carattere della funzione; epperò, nelle successive eguaglianze, funzioni aventi valori diversi, ma sempre tale proprietà, si troveranno indicate tutte collo stesso simbolo. Nè v'è a temere che ciò debba generare equivoci, giacchè non se ne generano allorchè s' indicano le costanti, che completano varii integrali definiti colla stessa lettera C, senza che questa sia astretta nelle varie formole, in cui figura, a prendere lo stesso valore. Si potrebbero rappresentare le varie Ω colla stessa lettera munita d'un indice progressivo; ma sarebbe penoso seguire il successivo aumento di quest' indice. Di tali funzioni se ne sono incontrate nelle pagine precedenti; così in virtù della (18) si potrà scrivere

$$\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \Omega\,, \tag{28}$$

ed ancora

$$\log(x-1) + \log\zeta(x) = \Omega\,. \tag{29}$$

Un'altra se ne ricava dalla eguaglianza (21). Infatti questa può scriversi

$$\log\zeta(x) - \varsigma(x) = \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^x}\, e^{-2(x-1)\log p} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^3}\, e^{-3(x-1)\log p} + \ldots\,.$$

Sviluppando in serie le esponenziali, si ha

$$\log\zeta(x) - \varsigma(x) = \sum_m \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^m} \sum_r (-1)^r\, \frac{m^r(x-1)^r(\log p)^r}{r!}\,.$$

La serie dei valori assoluti dei termini di questa serie tripla, cioè

$$\sum_m \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^m} \sum_r \frac{m^r(x-1)^r(\log p)^r}{r!}$$

può scriversi

$$\sum_m \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^m} e^{m(x-1)\log p} = \sum_m \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^{m(2-x)}} = \frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{2(2-x)}} + \frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3(2-x)}} + \frac{1}{4} \sum_p \frac{1}{p^{4(2-x)}} + \cdots .$$

Ora, per la convergenza di ognuna delle $\sum_p \frac{1}{p^{2m-mx}}$, basta che sia

$$2m - mx > 1 \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots) ,$$

cioè $x < \frac{3}{2}$; e, posta questa condizione, la serie

$$\frac{1}{2} \sum_p \frac{1}{p^{2(2-x)}} + \frac{1}{3} \sum_p \frac{1}{p^{3(2-x)}} + \frac{1}{4} \sum_p \frac{1}{p^{4(2-x)}} + \cdots$$

è convergente, giacchè

$$\frac{m}{m+1} \frac{\sum_p \frac{1}{p^{(m+1)(2-x)}}}{\sum_p \frac{1}{p^{m(2-x)}}} < \frac{m}{m+1} \frac{\sum_p \frac{1}{2^{2-x}} \cdot \frac{1}{p^{m(2-x)}}}{\sum_p \frac{1}{p^{m(2-x)}}} = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{2^{2-x}} .$$

In conseguenza (Burkhardt und Meyer, Encyklopädie der Math. Wiss, p. 99, 100) è permessa l'inversione delle Σ nella serie tripla primitiva, e, supposto $1 < x < \frac{3}{2}$, si potrà scrivere

$$\log \zeta(x) - \varsigma(x) = k_0 + k_1(x-1) + k_2(x-1)^2 + k_3(x-1)^3 + \cdots ,$$

essendo

$$k_r = \frac{(-1)^r}{r!} \left(2^{r-1} \sum_p \frac{(\log p)^r}{p^2} + 3^{r-1} \sum_p \frac{(\log p)^r}{p^3} + 4^{r-1} \sum_p \frac{(\log p)^r}{p^4} + \cdots \right) ,$$

e quindi

$$\log \zeta(x) - \varsigma(x) = \Omega . \tag{30}$$

33. Considerazione della serie $\sigma(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\vartheta(m)}{m^{x+1}}$, e dimostrazione del fatto che la differenza $\varsigma(x) - x\sigma(x)$ gode della proprietà caratterizzata dal proposto simbolo Ω. Conseguenze. — Allo scopo di procedere alla ricerca d'una legge assintotica per la funzione $\vartheta(m)$, giova introdurre un'altra funzione godente della pro-

prietà caratterizzata dal simbolo Ω. Si consideri la nuova serie

$$\sigma(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)}{m^{x+1}}\,.$$

Scrivendola sotto la forma

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)}{m}\cdot\frac{1}{m^{x}}\,,$$

apparisce che i suoi termini sono minori rispettivamente dei corrispondenti termini di $\zeta(x)$; perciò $\sigma(x)$ è convergente per $x>1$. Richiamando alla mente la serie (20), si vede che questa può trasformarsi come segue

$$\varsigma(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)-\vartheta(m-1)}{m^{x}}=\sum_{m=2}^{\infty}\vartheta(m)\left(\frac{1}{m^{x}}-\frac{1}{(m+1)^{x}}\right)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)}{m^{x}}\left[1-(1+m^{-1})^{-x}\right]\,.$$

Mediante l'applicazione dello sviluppo binomiale si ricava

$$1-(1+m^{-1})^{-x}=xm^{-1}-\frac{x(x+1)}{2!}m^{-2}+\frac{x(x+1)(x+2)}{3!}m^{-3}-\ldots\,.$$

Sostituendo nella precedente eguaglianza si ha

$$\varsigma(x)=x\sigma(x)-\frac{x(x+1)}{2!}\sigma(x+1)+\frac{x(x+1)(x+2)}{3!}\sigma(x+2)-\cdots\,,$$

che può scriversi

$$\varsigma(x)-x\sigma(x)=\sum_{r}\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\left[(x-1)^{r}+\frac{r(r+1)}{2}(x-1)^{r-1}+\cdots+r!\right]\sum_{m}\frac{\vartheta(m)}{m^{r+1}}\sum_{n}(-1)^{n}\frac{(x-1)^{n}(\log m)^{n}}{n!}\,.$$

La serie dei valori assoluti dei termini di questa serie tripla può scriversi

$$\frac{x(x+1)}{2!}\sigma(3-x)+\frac{x(x+1)(x+2)}{3!}\sigma(4-x)+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{4!}\sigma(5-x)+\cdots$$

Ora per la convergenza di ognuna delle $\sigma(r+1-x)$ basta che sia

$$r+1-x>1\qquad(r=2,3,4,\ldots)\,,$$

cioè $x<2$, e, posta questa condizione, la serie precedente è convergente, giacchè

$$\frac{x+r}{r+1}\,\frac{\sum_{m}\frac{\vartheta(m)}{m^{r+3-x}}}{\sum_{m}\frac{\vartheta(m)}{m^{r+2-x}}}<\frac{x+r}{r+1}\cdot\frac{1}{2}\,.$$

In conseguenza è permessa l'inversione delle Σ nella serie tripla, e, supposto $1 < x < 2$, potrà scriversi

$$\varsigma(x) - x\sigma(x) = g_0 + g_1(x-1) + g_2(x-1)^2 + \cdots ,$$

e quindi anche

$$\varsigma(x) - x\sigma(x) = \Omega . \tag{31}$$

Questa fra le altre cose ci dice che $\sigma(x)$, per $x = 1$, si comporta come $\varsigma(x)$, cioè diverge.

34. Da (29), (30) e (31) si deduce

$$x\sigma(x) + \log(x-1) = \Omega , \tag{32}$$

la quale, derivata, fornisce

$$\sigma(x) + x\frac{d\sigma}{dx} + \frac{1}{x-1} = \Omega . \tag{33}$$

Sommando questa con (28) si trae

$$\sigma(x) + x\frac{d\sigma}{dx} + \zeta(x) = \Omega . \tag{34}$$

Eliminando poi $\sigma(x)$ fra (32) e (33) si ricava

$$(x-1)\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{1}{x} + \frac{(x-1)\log(x-1)}{x^2} + (x-1)\Omega ,$$

donde, riflettendo che $\lim\limits_{x=1} [(x-1)\log(x-1)] = 0$, si deduce

$$\lim_{x=1}\left[(x-1)\frac{d\sigma}{dx}\right] = -1 . \tag{35}$$

35. Valore assintotico $\frac{m}{\log m - 1}$ di $\vartheta(m)$ (Tchebichef). — Considero ora, col Cesàro, l'altra serie

$$\tau(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\vartheta(m)\log m - m}{m^{x+1}} .$$

Essa può scriversi

$$\tau(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{\vartheta(m)}{\frac{m}{\log m}} - 1 \right\} \frac{1}{m^x} ;$$

il fattore fra parentesi, tendendo a 0 per $m = \infty$ (§ 31), finirà per diventare e mantenersi poi sempre minore di 1; laonde la serie $\tau(x)$ è convergente quando lo è $\zeta(x)$, vale a

dire quando è $x > 1$. Ora è

$$\tau(x)=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)\log m}{m^{x+1}}-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m^x},$$

ossia

$$(36)\qquad \tau(x)=-\frac{d\sigma}{dx}-\zeta(x)+1\,.$$

Eliminando $\zeta(x)$ tra questa e la (34), si ottiene

$$(37)\qquad \sigma(x)+(x-1)\frac{d\sigma}{dx}=\tau(x)+\Omega\,,$$

e quindi, in virtù di (35), $\tau(x)$ è divergente per $x=1$, ed è

$$\lim_{x=1}\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}=1\,.$$

Quest'ultima eguaglianza permette di applicare alle due serie $\sigma(x)$, $\tau(x)$ il teorema del § 29; si ha quindi:

Se, per $m=\infty$, *il rapporto*

$$\frac{\vartheta(m)\log m-m}{\vartheta(m)}$$

tende a un limite, questo è 1.

Dunque, nella ipotesi della esistenza del limite, si traggono successivamente

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m)(\log m-1)-m}{\vartheta(m)}=0\quad,\quad \lim_{m=\infty}\left(1-\frac{\frac{m}{\log m-1}}{\vartheta(m)}\right)=0\,,$$

donde

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m)}{\frac{m}{\log m-1}}=1\,,$$

cioè *si ha assintoticamente*

$$\vartheta(m)=\frac{m}{\log m-1}\qquad [\text{cfr. IV, 22, } f), 24].$$

36. Valore assintotico $\frac{m}{\log m-1-\frac{1}{\log m}}$ di $\vartheta(m)$ (Glaisher).— Col metodo fin qui seguito si può progredire nella determinazione assintotica di $\vartheta(m)$. Dalla (28) si ha

$$(x-1)\frac{d\zeta}{dx}+\zeta=\Omega\,.$$

Derivando la (34) si ottiene

$$x\frac{d^2\sigma}{dx^2}+2\frac{d\sigma}{dx}+\frac{d\zeta}{dx}=\Omega\ ;$$

ed eliminando ζ e $\frac{d\zeta}{dx}$ fra le ultime due e la (34) si deduce

$$x(x-1)\frac{d^2\sigma}{dx^2}+(3x-2)\frac{d\sigma}{dx}+\sigma=\Omega\ . \tag{38}$$

La (37), derivata, dà

$$\frac{d(\sigma-\tau)}{dx}=-\frac{d\sigma}{dx}-(x-1)\frac{d^2\sigma}{dx^2}+\Omega\ ,$$

ed eliminando $\frac{d^2\sigma}{dx^2}$ fra questa e la (38) si deduce

$$x\frac{d(\sigma-\tau)}{dx}=\sigma+2(x-1)\frac{d\sigma}{dx}+\Omega\ , \tag{39}$$

e quindi, in virtù di (35), $\frac{d(\sigma-\tau)}{dx}$ è divergente per $x=1$, ed è

$$\lim_{x=1}\frac{\frac{d(\sigma-\tau)}{dx}}{\sigma}=1\ ,$$

ossia

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\log m-1)\vartheta(m)-m}{m^{x+1}}\log m\ :\ \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)}{m^{x+1}}\right)=1\ ;$$

quindi, applicando il teorema del § 29, si conchiude:

Se il rapporto

$$\frac{[(\log m-1)\vartheta(m)-m]\log m}{\vartheta(m)}\ ,$$

per $m=\infty$, *tende a un limite, questo è* 1.

Dunque nella ipotesi dell'esistenza del limite si traggono successivamente

$$\lim_{m=\infty}\frac{[(\log m)^2-\log m-1]\vartheta(m)-m\log m}{\vartheta(m)}=0\ ,\quad \lim_{m=\infty}\left\{1-\frac{\frac{m}{\log m-1-\frac{1}{\log m}}}{\vartheta(m)}\right\}=0\ ;$$

donde

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m)}{\frac{m}{\log m-1-\frac{1}{\log m}}}=1\ ;$$

cioè *si ha assintoticamente*

$$\vartheta(m)=\frac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}}$$

(cfr. Glaisher, Factor Table III, Introduction, p. 79, 1883). Sol che la deduzione ivi eseguita non può considerarsi come rigorosa per la divergenza dello sviluppo del logaritmo integrale.

37. Valore assintotico $\dfrac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}-\dfrac{3}{(\log m)^2}}$ di $\vartheta(m)$ (Cesàro). Illustrazioni numeriche. Vantaggi di questa formola dedotti mediante il confronto dei risultati numerici iscritti nella tabella. — La (39), scritta sotto la forma

$$\frac{d}{dx}(\sigma-\tau)-\sigma=\frac{x-1}{x}\left(2\frac{d\sigma}{dx}-\sigma\right)+\Omega\,,$$

e derivata, dà

$$x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\sigma-\tau)-\sigma\right)=2\frac{d\sigma}{dx}-\sigma+x(x-1)\left(2\frac{d^2\sigma}{dx^2}-\frac{d\sigma}{dx}\right)+\Omega\,,$$

ed, eliminando $\dfrac{d^2\sigma}{dx^2}$ mediante la (38), si ottiene la novella eguaglianza

$$x^2\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\sigma-\tau)-\sigma\right)=-3\sigma-(x+6)(x-1)\frac{d\sigma}{dx}+\Omega\,,\tag{40}$$

che dà

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{[(\log m)^2-\log m-1]\vartheta(m)-m\log m}{m^{x+1}}\log m\ :\ \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta(m)}{m^{x+1}}\right)=3\,;$$

donde, come sopra, si trae che, nella solita ipotesi, *si ha assintoticamente*

$$\vartheta(m)=\frac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}-\dfrac{3}{(\log m)^2}}\,.$$

Il Glaisher, nelle pagine da 79 a 83 della Introduzione al 3° volume delle sue tavole, illustra con calcolazioni numeriche la formola $\dfrac{m}{\log m-1}$ di Tchebichef, e la sua $\dfrac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}}$; ma arriva alla conclusione che, fino all'estremo limite delle tavole sinora pubblicate, la prima dà valori molto lontani dal vero, e l'altra riesce meno soddisfacente di quella di Legendre. Io ho stimato opportuno fare lo stesso colla formola di Cesàro $\dfrac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}-\dfrac{3}{(\log m)^2}}$; ed ho iscritti i risultati nella

4ª colonna della tabella situata in ultimo di questo lavoro coll'aggiunta delle deviazioni relative per 100 000. Il confronto colle altre colonne mostra che la formola di Cesàro vince quella di Legendre dai 2 000 000 in poi, e quella di Tchebichef-Gauss dalla prima fino alla penultima linea della tabella. Al contrario è vinta generalmente, salvo brevi tratti, dalla formola d'approssimazione di Riemann-Gram [VIII, 69, for. (92), (98)]; però durante l'estensione della tabella i risultati delle due formole ultimamente in paragone si mantengono a una distanza non molto notevole. Sicchè, vista la più semplice calcolazione numerica, la formola di Cesàro può, per un buon pezzo, essere utilmente adoperata.

Il vantaggio di essa sulla formola di Legendre si spiega facilmente colle considerazioni del (III, 16). Può maravigliare, a prima giunta però, il vantaggio sulla formola di Tchebichef-Gauss, che come si vedrà nei § 39 e 40, è più completa.

Per spiegare il fatto noto che i due valori possono scriversi sotto le forme

$$\frac{m}{\log m - 1 - \frac{1}{\log m} - \frac{3}{(\log m)^2}}$$

$$= \frac{m}{\log m} + \frac{m}{(\log m)^2} + \frac{2m}{(\log m)^3} + \frac{6m}{(\log m)^4} + \frac{11m}{(\log m)^5} + \frac{23m}{(\log m)^6} + \frac{\frac{52m}{(\log m)^6} + \frac{56m}{(\log m)^7} + \frac{69m}{(\log m)^8}}{\log m - 1 - \frac{1}{\log m} - \frac{3}{(\log m)^2}},$$

$$\mathrm{Li}(m) = \frac{m}{\log m} + \frac{m}{(\log m)^2} + \frac{2m}{(\log m)^3} + \frac{6m}{(\log m)^4} + \frac{24m}{(\log m)^5} + \frac{120m}{(\log m)^6} + 720 \int_0^m \frac{dx}{(\log x)^7}.$$

Laonde il valore fornito dalla prima formola è inferiore a quello dato da $\mathrm{Li}(m)$. Or la tabella numerica mostra che, almeno fino all'estensione di questa, $\mathrm{Li}(m)$ ha bisogno appunto di una correzione negativa, e inoltre la correzione operata su $\mathrm{Li}(m)$ dalla formola di Cesàro comincia col non essere più grande di quella, che compete a $\mathrm{Li}(m)$; ecco perchè l'anzidetta formola, sebbene meno completa, può vincere per un pezzo quella di Tchebichef-Gauss. Che questo poi non debba continuare indefinitamente si scorge dal fatto che la correzione in tal modo operata su $\mathrm{Li}(m)$ è di un ordine di grandezza superiore a quello, che gli occorre secondo il teorema di de la Vallée Poussin (cfr. X, 90) già accennato discorrendo del paragone fra le formole di Legendre e Gauss (III, 17); quindi per m abbastanza grande dovrà finire per prevalere la formola di Tchebichef-Gauss su quella di Cesàro; ed infatti i valori di ϑ iscritti nell'ultima linea della tabella ci dànno indizio che, prima di $m = 1\,000\,000\,000$, questa previsione si è già avverata.

38. Diagramma rappresentante le deviazioni delle formole di Legendre Tchebichef-Gauss, Cesàro, Riemann-Gram. Conferma dell'ordine di preferenza di queste. — A meglio spiegare la maniera, colla quale al crescere di m si comportano le varie formole pel calcolo di $\vartheta(m)$, ho stimato bene alla tabella numerica far seguire un diagramma, che graficamente rappresenti il modo, col quale variano le deviazioni delle formole suddette. Ma a differenza di quanto fa il Glaisher (p. 88 della Introduzione al III vol. delle sue tavole), in luogo delle devia-

zioni assolute, ho considerato le relative, e propriamente quelle riferentisi a ogni centinajo di migliajo del numero da valutarsi; vale a dire, chiamati L, T, C, R i valori forniti per $\vartheta(m)$ rispettivamente dalle formole di Legendre, Tchebichef-Gauss, Cesàro, Riemann-Gram [per quest' ultima, come s'è detto, cfr. VIII, 69, 70 form. (92), (98)] in luogo delle differenze $L-\vartheta(m)$, $T-\vartheta(m)$, $C-\vartheta(m)$, $R-\vartheta(m)$ ho presi in considerazione i rapporti

$$\frac{L-\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\,.\,100\,000\,,\quad \frac{T-\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\,.\,100\,000\,,\quad \frac{C-\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\,.\,100\,000\,,\quad \frac{R-\vartheta(m)}{\vartheta(m)}\,.\,100\,000\,,$$

i quali tendono a zero al crescere indefinitamente di m; e quindi la loro rappresentazione mette in mostra, meglio che quella delle deviazioni assolute, il carattere assintotico delle formole. Ciò a prescindere dall'ovvia osservazione che l'errore relativo offre un criterio più esatto per giudicare d'una formola d'approssimazione, che l'errore assoluto. Ciò premesso sull'asse orizzontale la lunghezza del lato di ognuno dei quadratini, in cui è diviso il foglio, rappresenta un centinajo di migliajo del numero m. Invece sull' altro asse il lato stesso rappresenta due unità dei rapporti esprimenti le deviazioni. Per ognuna delle quattro formole ho segnate le estremità di tutte le ordinate raffiguranti le deviazioni corrispondenti alle diverse m contenute nella tabella numerica e contate sull' asse orizzontale. Tali estremità relative alla stessa formola appartengono alla linea rappresentante la deviazione rispettiva. Ho congiunto ogni coppia di punti successivi mediante un tratto rettilineo, ed ho avuto una linea poligonale iscritta nella curva predetta. Le quattro linee poligonali, disegnate a colori diversi, fanno dunque risaltare il modo di comportarsi delle corrispondenti formole. L'asse orizzontale in nero corrisponde alla formola di Meissel, che non ha deviazioni (II, 11). La linea rossa corrispondente alla formola di Riemann-Gram è generalmente la più vicina all'asse orizzontale, e dà quindi indizio che tale formola è da preferirsi. La segue immediatamente la linea verde corrispondente alla formola di Cesàro. La linea in arancio relativa alla formola di Legendre da principio è intermedia fra le prime due; ma mentre m passa da 1 800 000 a 2 000 000 esce al di là della verde; e mentre m passa da 4 800 000 a 5 000 000 esce anche al di là della linea azzurra corrispondente alla formola di Tchebichef-Gauss. Questa fino ai 9 milioni resta al 3° posto. Se si osservano i pochi valori di $\vartheta(m)$ per $m > 9\,000\,000$, che sono iscritti nella tabella si conchiuderà che, mentre m passa dai 10 ai 20 milioni, la linea verde dovrà traversare la rossa scendendone al di sotto; e la azzurra si accosterà all'asse orizzontale in modo da diventare essa la più prossima alla linea rossa, come risulta dalle considerazioni fatte in fine del § precedente.

Se si compisse il diagramma colle linee poligonali corrispondenti alle successive formole assintotiche per $\vartheta(m)$, che si ricaveranno nel seguente § 39, dette linee verrebbero ordinatamente a scaglionarsi fra la linea verde e la azzurra: esse successivamente intersecando la linea rossa ne scenderanno al di sotto. Quando la formola di Cesàro perderà il vantaggio sulla formola di Tchebichef-Gauss, potrà forse essere rimpiazzata, per un trattato successivo, da quella che la segae, e così appresso.

Non occorre qui avvertire che questo diagramma non ha la pretesa di rappresentare, in tutti i dettagli, il corso delle deviazioni delle quattro formole, giacchè, fra un vertice e il successivo della poligonale iscritta, la curva rappresentante la deviazione spesso incontra più volte l'asse orizzontale. Perchè la poligonale desse più da vicino idea della curva sarebbe necessario far variare m nella tabella numerica per intervalli ben più ristretti, e pel disegno farebbe mestieri un foglio molto più esteso. Così com' è, il diagramma corrisponde ai risultati numerici, che è stato possibile riunire nel tempo rimasto dopo lo sviluppo della teoria: e questi sono sufficienti per dare un' idea sull'ordine di preferenza delle varie formole nelle successive regioni della serie naturale, e per porre in vista che, sebbene secondo il recente ed importante teorema di de la Vallée Poussin (cfr. X, 90) il logaritmo integrale finisce per diventare il valore assintotico più esatto di ciascuna sua espressione sotto forma finita presa isolatamente, pure è possibile che a successivi tratti limitati in grandezza, ma che potrebbero essere pure infiniti in numero, corrispondano altrettante espressioni assintotiche, ciascuna, nel tratto finito corrispondente, preferibile al logaritmo integrale.

39. Prosecuzione del metodo di Cesàro eseguita da Ajello.— Alla formola del § 37 il Cesàro si arresta, indicando che il procedimento può essere continuato, e questo si trova proseguito nella nota:

Ajello — Sul numero dei numeri primi inferiori a un dato limite. *Giornale di Matematiche Battaglini-Capelli*, vol. XXXIV, p. 14, 1896.

Scritta la (40) sotto la forma

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\sigma-\tau)-\sigma\right)+3\sigma=\frac{x-1}{x^2}\left[3(x+1)\sigma-(x+6)\frac{d\sigma}{dx}\right]+\Omega\,,$$

e derivatala si ottiene

$$x^3\frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(\sigma-\tau)-\sigma\right)+3\sigma\right\}=(x+12)\sigma+3(x-1)(x^2+2x+8)\frac{d\sigma}{dx}+\Omega\,,$$

la quale dà

$$\lim_{x=1}\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{[(\log m)^3-(\log m)^2-\log m-3]\,\mathfrak{I}(m)-m(\log m)^2}{m^{x+1}}\log m:\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\mathfrak{I}(m)}{m^{x+1}}\right)=13:$$

donde, come prima, si trae che, nella ipotesi consueta, si ha assintoticamente

$$\mathfrak{I}(m)=\frac{m}{\log m-1-\dfrac{1}{\log m}-\dfrac{3}{(\log m)^2}-\dfrac{13}{(\log m)^3}}\,;$$

e, così via continuando, l'autore perviene fino all'eguaglianza assintotica

$$\mathfrak{I}(m)=m:\left(\log m-1-\frac{1}{\log m}-\frac{3}{(\log m)^2}-\frac{13}{(\log m)^3}-\frac{71}{(\log m)^4}-\frac{461}{(\log m)^5}-\frac{3447}{(\log m)^6}-\frac{29093}{(\log m)^7}\right).$$

Poi riduce al loro semplice e comune schema i procedimenti, che man mano han generato le successive eguaglianze assintotiche dedotte, vale a dire, posto

$$a_0 = 1\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 3\ ,\ a_3 = 13\ ,\ a_4 = 71\ ,\ a_5 = 461\ ,\ a_6 = 3447\ ,\ \ldots,$$

e

$$-\tau = F_0\ ,\ \frac{d}{dx}(F_0 + a_0\sigma) = F_1\ ,\ \frac{d}{dx}(F_1 - a_1\sigma) = F_2\ ,\ \frac{d}{dx}(F_2 + a_2\sigma) = F_3\ ,\ \frac{d}{dx}(F_3 - a_3\sigma) = F_4\ ,\ \ldots,$$

osserva che come tipo delle eguaglianze (37), (39), (40) ed analoghe può assumersi

$$(41)\qquad (-1)^{r+1}x^r F_r = f_r(x)\,\sigma + (x-1)\,g_r(x)\frac{d\sigma}{dx} + \Omega\ ,$$

essendo

$f_0(x) = 1$	$g_0(x) = 1$	$a_0 = f_0(1) = 1$
$f_1(x) = 1$	$g_1(x) = 2$	$a_1 = f_1(1) = 1$
$f_2(x) = 3$	$g_2(x) = x + 6$	$a_2 = f_2(1) = 3$
$f_3(x) = x + 12$	$g_3(x) = 3x^2 + 6x + 24$	$a_3 = f_3(1) = 13$
$f_4(x) = 3x^2 + 8x + 60$	$g_4(x) = 13x^3 + 22x^2 + 36x + 120$	$a_4 = f_4(1) = 71$
$f_5(x) = 13x^3 + 28x^2 + 60x + 360$	$g_5(x) = 71x^4 + 110x^3 + 156x^2 + 240x + 720$	$a_5 = f_5(1) = 461$
. . . .	. . . .	. . . .

Per dimostrare ciò basterà far vedere che il tipo adottato permane applicandovi il procedimento finora adoperato, o in altre parole fare uso del consueto metodo di deduzione da r ad $r+1$, supposto $r \geqq 2$.

Posto $f_r(1) = a_r$, la (41) può scriversi

$$(-1)^{r+2}[F_r + (-1)^r a_r\sigma] = \frac{x-1}{x^r}\left[\frac{f_r(1)x^r - f_r(x)}{x-1}\,\sigma - g_r(x)\frac{d\sigma}{dx}\right] + \Omega\ ,$$

e derivando si ottiene

$$(-1)^{r+2}x^{r+1}F_{r+1} = [r f_r(x) - x f_r'(x) + g_r(x)]\,\sigma$$

$$+ (x-1)\left[(r+2)g_r(x) - x g_r'(x) + x\frac{x^r f_r(1) - f_r(x)}{x-1}\right]\frac{d\sigma}{dx} + \Omega\ ,$$

ossia, posto

$$(42)\qquad r f_r(x) - x f_r'(x) + g_r(x) = f_{r+1}(x)\ ,$$

$$(43)\qquad (r+2)g_r(x) - x g_r'(x) + x\frac{x^r f_r(1) - f_r(x)}{x-1} = g_{r+1}(x)\ ,$$

si ricava

$$(-1)^{r+2}x^{r+1}F_{r+1} = f_{r+1}(x)\,\sigma + (x-1)\,g_{r+1}(x)\frac{d\sigma}{dx} + \Omega\ .$$

Così resta confermato il tipo assunto, ed espressa colle (42) e (43) la legge di formazione dei polinomii f e g. Dopo ciò l'Ajello dimostra varie proprietà dei

numeri a, ed afferma, cosa che già avea fatto il Cesàro, che la legge assintotica, la quale con tal metodo va ottenendosi per $\vartheta(m)$, non differisce sostanzialmente dal noto sviluppo assintotico (cfr. IV, 24, nota) del logaritmo integrale.

Credo pregio dell'opera giustificare questa proposizione, e lo farò nel § seguente.

40. Complemento ulteriore dell'autore del presente scritto per dimostrare che il procedimento di Cesàro conduce al valore assintotico Li(m) di $\vartheta(m)$ e, con lieve modifica, può anche condurre al valore approssimato fornito da Riemann.

Pongo

$$f_r(x)=f_{r-2,r}x^{r-2}+f_{r-3,r}x^{r-3}+\cdots+f_{1,r}x+f_{0,r}$$

$$g_r(x)=g_{r-1,r}x^{r-1}+g_{r-2,r}x^{r-2}+\cdots+g_{1,r}x+g_{0,r}\ ,$$

ed eguaglio in (42) e (43) i coefficienti delle stesse potenze di x. Ho i sistemi

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} g_{0,r+1}&=(r+2)g_{0,r}\\ g_{1,r+1}&=(r+1)g_{1,r}+f_{0,r}\\ g_{2,r+1}&=rg_{2,r}+f_{0,r}+f_{1,r}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ g_{r-1,r+1}&=3g_{r-1,r}+f_{0,r}+f_{1,r}+\cdots+f_{r-3,r}+f_{r-2,r}\\ g_{r,r+1}&=f_{0,r}+f_{1,r}+\cdots+f_{r-3,r}+f_{r-2,r}=f_r(1)=a_r \end{aligned}\right.$$

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} f_{0,r+1}&=rf_{0,r}+g_{0,r}\\ f_{1,r+1}&=(r-1)f_{1,r}+g_{1,r}\\ f_{2,r+1}&=(r-2)f_{2,r}+g_{2,r}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f_{r-2,r+1}&=2f_{r-2,r}+g_{r-2,r}\\ f_{r-1,r+1}&=g_{r-1,r}=a_{r-1}\ . \end{aligned}\right.$$

Da questi posso ricavare successivamente i coefficienti g ed f in funzione dei loro indici.

Infatti dalla prima delle (44) cambiando successivamente l'indice r in $r-1$, $r-2,\ldots,0$ ho un sistema, che fornisce

$$g_{0,r+1}=(r+2)!\ .$$

Allora la prima delle (45) diventa

$$f_{0,r+1}-rf_{0,r}=(r+1)!\ ,$$

e questa, mediante l'assegnazione dei medesimi valori per l'indice, dà un sistema, che porge

$$f_{0,r+1}=\frac{1}{2}(r+2)!\ .$$

Il valore di $f_{0,r}$ portato nella seconda delle (44) muta questa in

$$g_{1,r+1}-(r+1)g_{1,r}=\frac{1}{2}(r+1)!\ ,$$

che dà luogo a un sistema, il quale risoluto rispetto a $g_{1,r+1}$ offre

$$g_{1,r+1} = \frac{1}{2} r \, . \, (r+1)! \, .$$

Sicchè la seconda delle (45) diviene

$$f_{1,r+1} - (r-1) f_{1,r} = \frac{1}{2} (r-1) \, . \, r! \, ,$$

e dal sistema da questa originato si trae

$$f_{1,r+1} = \frac{1}{6} (r-1) \, . \, (r+1)! \; ;$$

e analogamente si ricaverebbero

$$g_{2,r+1} = \frac{1}{6} (r-1)(2r+5) \, . \, r! \quad , \quad f_{2,r+1} = \frac{1}{12} (r-2)(r+3) \, . \, r! \, .$$

Però, così continuando, difficilmente si scorgerebbero le espressioni generali dei coefficienti $g_{h,r+1}$, $f_{h,r+1}$, e quindi quelle dei numeri a_r.

Invece osservo che, mediante i valori rinvenuti di $g_{0,r+1}$, $g_{1,r+1}$, $g_{2,r+1}$, $f_{0,r+1}$, $f_{1,r+1}$, $f_{2,r+1}$, si verificano le eguaglianze

$$\begin{aligned}
G_{0,r+1} &= g_{0,r+1} &&= \frac{(r+2)!}{1} \, , \quad & F_{0,r+1} &= f_{0,r+1} &&= \frac{(r+2)!}{1 \, . \, 2} \\
G_{1,r+1} &= g_{1,r+1} + 1! g_{0,r} &&= \frac{(r+2)!}{2} \, , \quad & F_{1,r+1} &= f_{1,r+1} + 1! f_{0,r} &&= \frac{(r+2)!}{2 \, . \, 3} \\
G_{2,r+1} &= g_{2,r+1} + 1! g_{1,r} + 2! g_{0,r-1} &&= \frac{(r+2)!}{3} \, , \quad & F_{2,r+1} &= f_{2,r+1} + 1! f_{1,r} + 2! f_{0,r-1} &&= \frac{(r+2)!}{3 \, . \, 4} \, .
\end{aligned}$$

Scriverò quindi per induzione

$$(46) \quad G_{h,r+1} = g_{h,r+1} + 1! g_{h-1,r} + 2! g_{h-2,r-1} + \cdots + (h-1)! g_{1,r-h+2} + h! g_{0,r-h+1} = \frac{(r+2)!}{h+1}$$

$$(47) \quad F_{h,r+1} = f_{h,r+1} + 1! f_{h-1,r} + 2! f_{h-2,r-1} + \cdots + (h-1)! f_{1,r-h+2} + h! f_{0,r-h+1} = \frac{(r+2)!}{(h+1)(h+2)} \, .$$

Per dimostrarle supporrò che l'ultima si verifichi quando il primo indice della F sia inferiore ad h, e farò vedere che, in conseguenza, si avverano ambedue le proposte eguaglianze.

Invero per mezzo dei sistemi (44) e (45) si deducono le relazioni

$$(48) \qquad G_{h,r+1} - (r-h+2) G_{h,r} = F_{h-1,r} + F_{h-2,r} + \cdots + F_{1,r} + F_{0,r}$$

$$(49) \qquad F_{h,r+1} - (r-h) F_{h,r} = G_{h,r} \, .$$

In virtù dell' ipotesi ammessa si ha

$$F_{h-1,r} + F_{h-2,r} + \cdots + F_{1,r} + F_{0,r} = (r+1)! \left(\frac{1}{h(h+1)} + \frac{1}{(h-1)h} + \cdots + \frac{1}{1 \, . \, 2} \right) = (r+1)! \, \frac{h}{h+1} \, .$$

Perciò la (48) si muta in

$$G_{h,r+1}-(r-h+2)G_{h,r}=(r+1)!\frac{h}{h+1},$$

la quale dà luogo al sistema

$$\begin{aligned}
G_{h,r+1}-(r-h+2)G_{h,r} &= \frac{h}{h+1}(r+1)! \\
G_{h,r}-(r-h+1)G_{h,r-1} &= \frac{h}{h+1}r! \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
G_{h,h+2}-3G_{h,h+1} &= \frac{h}{h+1}(h+2)! \\
G_{h,h+1} &= \frac{(h+2)!}{h+1},
\end{aligned}$$

delle quali l'ultima si trova direttamente per mezzo dell'ultima delle (44). Risolvendo questo sistema rispetto a $G_{h,r+1}$ si ha

$$G_{h,r+1}=\frac{h}{h+1}\begin{vmatrix} (r+1)! & -(r-h+2) & 0 & . & 0 \\ r! & 1 & -(r-h+1) & . & 0 \\ (r-1)! & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ (h+2)! & 0 & 0 & . & -3 \\ \frac{(h+2)!}{h} & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{h+1}\begin{vmatrix} (r+2)!-(r-h+2).(r+1)! & -(r-h+2) & 0 & . & 0 \\ (r+1)!-(r-h+1).r! & 1 & -(r-h+1) & . & 0 \\ r!-(r-h).(r-1)! & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ (h+3)!-3.(h+2)! & 0 & 0 & . & -3 \\ (h+2)! & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{h+1}\begin{vmatrix} (r+2)! & -(r-h+2) & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & -(r-h+1) & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & -3 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}=\frac{(r+2)!}{h+1}.$$

In virtù del valore ottenuto per la G la (49) si trasfosma in

$$F_{h,r+1}-(r-h)F_{h,r}=\frac{(r+1)!}{h+1},$$

che trattata come l'analoga nelle G porge

$$F_{h,r+1} = \frac{1}{(h+1)(h+2)} \begin{vmatrix} (r+2)! - (r-h).(r+1)! & -(r-h) & 0 & . & 0 \\ (r+1)! - (r-h-1).r! & 1 & -(r-h-1) & . & 0 \\ r! - (r-h-2).(r-1)! & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ (h+4)! - 2.(h+3)! & 0 & 0 & . & -2 \\ (h+3)! & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix} = \frac{(r+2)!}{(h+1)(h+}$$

Ciò premesso, dalle (46), (47) sono generati i sistemi

$$(50) \left\{ \begin{aligned} g_{h,r+1} + 1!g_{h-1,r} + 2!g_{h-2,r-1} + \cdots + (h-1)!g_{1,r-h+2} + \quad h!g_{0,r-h+1} &= \frac{(r+2)!}{h+1} \\ g_{h-1,r} + 1!g_{h-2,r-1} + \cdots + (h-2)!g_{1,r-h+2} + (h-1)!g_{0,r-h+1} &= \frac{(r+1)!}{h} \\ g_{h-2,r-1} + \cdots + (h-3)!g_{1,r-h+2} + (h-2)!g_{0,r-h+1} &= \frac{r!}{h-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{1,r-h+2} + \quad 1!g_{0,r-h+1} &= \frac{(r-h+3)!}{2} \\ g_{0,r-h+1} &= \frac{(r-h+2)!}{1} \, ; \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} f_{h,r+1} + 1!f_{h-1,r} + 2!f_{h-2,r-1} + \cdots + (h-1)!f_{1,r-h+2} + \quad h!f_{0,r-h+1} &= \frac{(r+2)!}{(h+1)(h+2)} \\ f_{h-1,r} + 1!f_{h-2,r-1} + \cdots + (h-2)!f_{1,r-h+2} + (h-1)!f_{0,r-h+1} &= \frac{(r+1)!}{h(h+1)} \\ f_{h-2,r-1} + \cdots + (h-3)!f_{1,r-h+2} + (h-2)!f_{0,r-h+1} &= \frac{r!}{h(h-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{1,r-h+2} + \quad 1!f_{0,r-h+1} &= \frac{(r-h+3)!}{2.3} \\ f_{0,r-h+1} &= \frac{(r-h+2)!}{1.2} \, ; \end{aligned}$$

dai quali si traggono

$$(51) \quad g_{h,r+1} = \begin{vmatrix} \frac{(r+2)!}{h+1} & 1! & 2! & . & h! \\ \frac{(r+1)!}{h} & 1 & 1! & . & (h-1)! \\ \frac{r!}{h-1} & 0 & 1 & . & (h-2)! \\ . & . & . & . & . \\ \frac{(r-h+3)!}{2} & 0 & 0 & . & 1! \\ \frac{(r-h+2)!}{1} & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix} , \quad f_{h,r+1} = \begin{vmatrix} \frac{(r+2)!}{(h+1)(h+2)} & 1! & 2! & . & h! \\ \frac{(r+1)!}{h(h+1)} & 1 & 1! & . & (h-1)! \\ \frac{r!}{(h-1)h} & 0 & 1 & . & (h-2)! \\ . & . & . & . & . \\ \frac{(r-h+3)!}{2.3} & 0 & 0 & . & 1! \\ \frac{(r-h+2)!}{1.2} & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}$$

Di modo che s'avranno, come espressioni generali dei polinomii g ed f, le seguenti, delle quali la prima vale per $r \geqq 0$, la seconda per $r \geqq 1$,

$$g_{r+1}(x) = \begin{vmatrix} (r+2)!\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^{r-2}}{r-1}+\frac{x^{r-1}}{r}+\frac{x^r}{r+1}\right) & 1! & 2! & . & r! \\ (r+1)!\,x\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^{r-2}}{r-1}+\frac{x^{r-1}}{r}\right) & 1 & 1! & . & (r-1)! \\ r!\,x^2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^{r-2}}{r-1}\right) & 0 & 1 & . & (r-2)! \\ . & . & . & . & . \\ 3!\,x^{r-1}\left(1+\frac{x}{2}\right) & 0 & 0 & . & 1! \\ 2!\,x^r & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix},$$

$$(x) = \begin{vmatrix} (r+2)!\left(\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}+\frac{x^2}{3.4}+\cdots+\frac{x^{r-3}}{(r-2)(r-1)}+\frac{x^{r-2}}{(r-1)r}+\frac{x^{r-1}}{r(r+1)}\right) & 1! & 2! & . & (r-1)! \\ (r+1)!\,x\left(\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}+\frac{x^2}{3.4}+\cdots+\frac{x^{r-3}}{(r-2)(r-1)}+\frac{x^{r-2}}{(r-1)r}\right) & 1 & 1! & . & (r-2)! \\ r!\,x^2\left(\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}+\frac{x^2}{3.4}+\cdots+\frac{x^{r-3}}{(r-2)(r-1)}\right) & 0 & 1 & . & (r-3)! \\ . & . & . & . & . \\ 4!\,x^{r-2}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}\right) & 0 & 0 & . & 1! \\ 3!\,x^{r-1}\cdot\frac{1}{1.2} & 0 & 0 & . & 1 \end{vmatrix}.$$

In particolare i numeri a_r (che secondo l'ultima delle (45) eguagliano $g_{r,r+1}$, a cominciare da $r=1$, essendo $g_{0,1}=a_0+1$) sono dati facendo $h=r$ nella espressione di $g_{h,r+1}$ offerta dalla prima delle (51), e sono legati dalle relazioni

$$a_r + 1!\,a_{r-1} + 2!\,a_{r-2} + \cdots + (r-1)!\,a_1 + r!\,a_0 = (r+1)!$$
$$(r = 0, 1, 2, \ldots),$$

che s'ottengono introducendo la medesima ipotesi $h=r$ nelle (50); ma dalle medesime relazioni sono dati i coefficienti q del quoziente

$$\log m - q_0 - \frac{q_1}{\log m} - \frac{q_2}{(\log m)^2} - \cdots - \frac{q_r}{(\log m)^r},$$

che si ha effettuando la divisione

$$1 : \left(\frac{1}{\log m} + \frac{1!}{(\log m)^2} + \frac{2!}{(\log m)^3} + \cdots + \frac{(r+1)!}{(\log m)^{r+2}}\right),$$

sicchè, per qualsiasi i, è $q_i = a_i$; e, chiamando $k_1, k_2, \ldots, k_r$ i coefficienti del re-

sto, si ha identicamente

$$1=\left(\frac{1}{\log m}+\frac{1!}{(\log m)^2}+\frac{2!}{(\log m)^3}+\cdots+\frac{(r+1)!}{(\log m)^{r+2}}\right)\left(\log m-a_0-\frac{a_1}{\log m}-\frac{a_2}{(\log m)^2}-\cdots-\frac{a_r}{(\log m)^r}\right)$$

$$+\frac{k_1}{(\log m)^{r+2}}+\frac{k_2}{(\log m)^{r+3}}+\cdots+\frac{k_r}{(\log m)^{2r+2}};$$

laonde si deduce

$$\lim_{m=\infty}\frac{\dfrac{m}{\log m-a_0-\dfrac{a_1}{\log m}-\dfrac{a_2}{(\log m)^2}-\cdots-\dfrac{a_r}{(\log m)^r}}}{\dfrac{m}{\log m}+\dfrac{1!m}{(\log m)^2}+\dfrac{2!m}{(\log m)^3}+\cdots+\dfrac{(r+1)!m}{(\log m)^{r+2}}}=1.$$

Or dalla (41) si ha

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m)}{\dfrac{m}{\log m-a_0-\dfrac{a_1}{\log m}-\dfrac{a_2}{(\log m)^2}-\cdots-\dfrac{a_r}{(\log m)^r}}}=1:$$

e nel Cap. IV, § 24 (Nota) si è dimostrato

$$\lim_{m=\infty}\frac{\dfrac{m}{\log m}+\dfrac{1!m}{(\log m)^2}+\dfrac{2!m}{(\log m)^3}+\cdots+\dfrac{(r+1)!m}{(\log m)^{r+2}}}{\mathrm{Li}(m)}=1;$$

dunque, moltiplicando fra loro le tre ultime eguaglianze, si trae

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m)}{\mathrm{Li}(m)}=1;$$

e perciò anche

$$\lim_{m=\infty}\frac{\theta(m)}{\mathrm{Li}(m)}=1,$$

ossia assintoticamente $\theta(m)=Li(m)$. Si perviene così allo stesso risultato di Tchebichef. Viceversa, ammettendo questo, e dividendo la penultima eguaglianza pel prodotto della quint'ultima per la terz'ultima, si otterrebbe la legge assintotica espressa dalla quart'ultima; il che giustifica la deduzione di questa già iniziata dal Glaisher (cfr. GLAISHER, Factor Table for the sixth Million. *Introduction*, p. 79, 1883).

A proposito del procedimento, che son venuto esponendo nel presente capitolo, può soggiungersi una osservazione analoga a quella che ho fatto in (IV, 25), vale a dire che con lievissima modifica esso può condurre al valore assintotico dato da Riemann.

In effetti, posto

$$\vartheta_1(m)=\vartheta(m)+\frac{1}{2}\vartheta(m^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\vartheta(m^{\frac{1}{3}})+\cdots,$$

il secondo membro di (21), cioè

$$\varsigma(x)+\frac{1}{2}\varsigma(2x)+\frac{1}{3}\varsigma(3x)+\cdots$$

può rappresentarsi con

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta_1(m)-\vartheta_1(m-1)}{m^x};$$

e la (21) può scriversi

$$\log\zeta(x)-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta_1(m)-\vartheta_1(m-1)}{m^x}=0,$$

donde

$$\lim_{x=1}\left[\log\zeta(x)-\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\vartheta_1(m)-\vartheta_1(m-1)}{m^x}\right]=0.$$

Sostituendo dunque questa eguaglianza alla (22), si ottiene per $\vartheta_1(m)$ la stessa legge assintotica avuta per $\vartheta(m)$, e questa varrà pure per $\theta_1(m)$, che differisce da $\vartheta_1(m)$ per zero, se l'intero m non è una potenza di un numero primo, e per $\frac{1}{\nu}$, se m è la potenza ν^{esima} di un numero primo. Sicchè si perviene al valore approssimato fornito da Riemann (cfr. VIII, 69, form. (92)).

41. Nota di Fousserau contenente qualche proposizione evidente conseguenza dell'essere $\frac{m}{\log m}$ un valore assintotico di $\vartheta(m)$. — Pongo termine a questo capitolo, in cui ho passati a rassegna i diversi valori assintotici trovati per $\vartheta(m)$, coll'accennare ad un articolo, il quale, sebbene non esca dalla sfera dell'aritmetica elementare, pure giunge ad una proposizione, che può riattaccarsi a quella relativa al valore $\frac{m}{\log m}$. Esso porta il titolo

FOUSSEREAU — Sur la fréquence des nombres premiers. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure.* 3e série, t. IX, p. 31, 1892.

Ivi, chiamato Q il prodotto di tutti i numeri primi da 2 fino al numero primo q, e supposto $K>1$, e $A>Q$ si dà un teorema, che consiste nelle due eguaglianze

$$\lim_{q=\infty}\frac{\vartheta(KQ)-\vartheta(Q)}{KQ-Q}=0\quad,\quad\lim_{q=\infty}\lim_{B=\infty}\frac{\vartheta(B)-\vartheta(Q)}{B-Q}=0.$$

Queste eguaglianze sono casi particolari di corollarii immediati della relazione

$$\lim_{m=\infty}\frac{\vartheta(m).\log m}{m}=1;$$

anzi si vede subito che la prima sussiste, se al posto di Q si pone un qualunque numero intero m, e lo si fa poi crescere indefinitamente; e in quanto alla seconda v'è da osservare che il numero $\lim_{B=\infty}\frac{\vartheta(B)-\vartheta(m)}{B-m}$, quello che l'autore chiama frequenza media dei numeri primi a partire da m, è sempre 0, quale che sia m.

Ma forse l'intenzione dell'autore è stata di ricavare la proposizione senza ricorrere all'ultima eguaglianza, di cui tutte le dimostrazioni, fino a quell'epoca, ammettevano la esistenza del limite (cfr. X, 88). In fatti egli con considerazioni di aritmetica elementare stabilisce le relazioni

$$\frac{\vartheta(KQ)-\vartheta(Q)}{KQ-Q} \leqq \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

$$\frac{\vartheta(B)-\vartheta(Q)}{B-Q} = \frac{\vartheta(KQ)-\vartheta(Q)}{KQ-Q}\cdot\frac{K-1}{K-2};$$

nella quale ultima è supposto

$$(K-1)Q < B < KQ\ ,$$

e poi da esse trae le sue conclusioni.

CAPITOLO VI.

42. Determinazione del valore di un numero primo, di cui sia assegnato il posto. Note di Scerk, Isenkrahe, e Smith. — Le considerazioni fin qui esposte risolvono, sebbene incompletamente, il problema: dato il valore di un numero primo, trovare il posto, che esso occupa nella successione dei numeri primi. Può invertirsi la quistione domandando il valore di un numero primo, di cui sia assegnato il posto. E questa investigazione, analogamente a quanto fu già fatto per risolvere il primo problema, può condursi in tre modi, cioè o servendosi della conoscenza di tutti i numeri primi di posto precedente, o di solo parte di essi, o infine facendo a meno di tale conoscenza.

In quanto al primo indirizzo non conterò il tentativo, che si legge nella nota:

Scerk — Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander. *Crelle Journal f. d. r. u. a. M.* Vol. X, p. 201, 1833,

giacchè ivi si cerca di comporre ogni numero primo per mezzo dei precedenti con metodo più cabalistico che matematico.

Esclusa questa, seguendo l'ordine logico, è da classificarsi in primo luogo la più recente pubblicazione, cioè:

Isenkrahe — Ueber eine Lösung der Aufgabe, jede Primzahl als Function der vorhergehenden Primzahlen durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen. *Mathematische Annalen*, Bd. LIII, p. 42, 1900.

In essa si parte dall'equazione

$$p_1^{E\left(\frac{x}{p_1}\right)+E\left(\frac{x}{p_1^2}\right)+\cdots}\, p_2^{E\left(\frac{x}{p_2}\right)+E\left(\frac{x}{p_2^2}\right)+\cdots} \cdots p_{\vartheta(x)}^{E\left(\frac{x}{p_{\vartheta(x)}}\right)+E\left(\frac{x}{p_{\vartheta(x)}^2}\right)+\cdots} = x!\ ,$$

la quale trovasi dimostrata nella Teoria dei numeri di LEJEUNE-DIRICHLET (trad. Faifofer, p. 25), e si deduce che, posto

$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{p_r}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{x}{p_r^2}\right)+\cdots=\mathrm{S}(r\,,x)\quad,\quad p_1^{\mathrm{S}(1,x)}\,p_2^{\mathrm{S}(2,x)}\cdots p_{\theta(x)}^{\mathrm{S}[\theta(x),x]}=\mathrm{P}[\theta(x)\,,x]\,,$$

$$\frac{x!}{\mathrm{P}[\theta(x)\,,x]}+\frac{\mathrm{P}[\theta(x)\,,x]}{(x-1)!}-\mathrm{E}\left\{\frac{(x-1)!}{\mathrm{P}[\theta(x)\,,x]}\right\}=\mathrm{F}[\theta(x)\,,x]\,,$$

la funzione $\mathrm{F}[\theta(x)\,,x]$ è tale che, sostituitovi per la variabile un intero primo x, risulta quale valore della funzione lo stesso intero x; mentre quando il valore, che s' attribuisce alla variabile è un intero composto x, la F assume il valore $x+1$. Sicchè andando a sostituire al posto di x i successivi numeri interi

$$2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,\,9\,,\,10\,,11\,,\ldots$$

s'ottengono i valori

$$2\,,3\,,5\,,5\,,7\,,7\,,9\,,10\,,11\,,11\,,\ldots.$$

Allorchè si pone un valore per x, che non è un numero primo, si trova come valore della funzione il numero, che bisogna successivamente rimpiazzare alla variabile nella funzione; e questa successiva sostituzione corrisponde a quella, che l'autore chiama *iterazione* della funzione. Per contrario quando il valore, che si pone al posto di x è un numero primo, s'ottiene lo stesso numero primo, che già s' è sostituito, e l' iterazione non fa più progredire il valore della funzione. Sicchè non solo si è avvertiti, secondo l'espressione dell'autore, *automaticamente* quando il numero assegnato quale valore di x in F è primo, ma ancora s' è formato questo numero primo x per mezzo dei $\theta(x)$ numeri primi inferiori ad x.

Nella pratica però le calcolazioni di $x!$ e di $\mathrm{P}[\theta(x)\,,x]$ richiederanno sicuramente un lavorio non lieve: la minima parte di questo è costituito dalle divisioni di x per *tutti i numeri primi ad esso inferiori!*

Questa fatica può in parte essere risparmiata mediante una soluzione meno complicata, seguendo il secondo indirizzo, la quale fu data, già molti anni fa, nella nota

SMITH — On the History of the Researches of Mathematicians on the Subject of the Series of prime Numbers. *Proceedings of the Ashmolean Society.* Vol. III, p. 128, 1857 (riprodotta nei *Collected Mathematical Papers* dello stesso autore vol. I, p. 35).

In essa, immaginati scritti i numeri della serie naturale, si sopprimono i numeri primi $p_1\,,p_2\,,\ldots,p_n$ e i multipli di questi: resta una successione, che comincia con 1 ed è costituita dai numeri primi relativi a $p_1\,,p_2\,,\ldots,p_n$. Prescindendo dall'elemento 1, gli altri inferiori a p_n^2 sono primi assoluti. e saranno quindi i numeri

$$p_{n+1}\,,\,p_{n+2}\,,\,\ldots\,,\,p_{\theta(p_n^2)}\,.$$

Supposto $n + k \leqq \theta(p_n^2)$, in virtù della formola di Legendre [II, 6, a)] si ha

$$k + 1 = p_{n+k} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{p_{n+k}}{p_i}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{p_{n+k}}{p_i p_j}\right) - \sum_{i,j,h=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{p_{n+k}}{p_i p_j p_h}\right) + \dots .$$

Ora, se per brevità si pone

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p_i}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{x}{p_i p_j}\right) + \sum_{i,j,h=1}^{n} \left(\frac{x}{p_i p_j p_h}\right) - \dots = \Phi(x) ,$$

la precedente eguaglianza va scritta

$$k + 1 = p_{n+k} - \Phi(p_{n+k}) ,$$

ossia

$$p_{n+k} = k + 1 + \Phi(p_{n+k}) ,$$

e, sostituendo a p_{n+k} il valore $k + 1 + \Phi(p_{n+k})$ nel secondo membro di questa e di quelle, che successivamente verranno, si deducono

$$p_{n+k} = k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(p_{n+k})\}$$

$$p_{n+k} = k + 1 + \Phi[k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(p_{n+k})\}]$$

. . . .

Ciò premesso lo Smith enuncia, senza dimostrarla, la seguente regola: Essendo $k \leqq \theta(p_n^2) - n$, si calcolino gli elementi della successione

$$\Phi(k + 1) , \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\} , \Phi[k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\}] , \dots ,$$

fino a quando si abbiano due elementi consecutivi di egual valore: aggiungendo $k + 1$ a questo lor valore comune si ha p_{n+k}.

Esempio. Sia $n = 4$, vale a dire si considerino come noti i numeri primi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, e si voglia per mezzo di essi calcolare il valore di qualunque numero primo inferiore a $p_4^2 = 49$, cioè essendo $\theta(49) = 15$, si voglia il valore di uno qualunque dei numeri primi $p_5, p_6, \dots, p_{15}$. Calcolo il valore di p_{13}; sicchè $k = 9$; seguendo la regola testè enunciata s'ottiene:

$$\Phi(10) = 9 \;\; , \Phi(19) = 14 \; , \Phi(24) = 18 \; , \Phi(28) = 22 \; , \Phi(32) = 24 \; , \Phi(34) = 26$$

$$\Phi(36) = 28 \; , \Phi(38) = 29 \; , \Phi(39) = 30 \; , \Phi(40) = 31 \; , \Phi(41) = 31 \; ;$$

risulta dunque $p_{13} = 41$.

Di modo che anche la presente regola è un procedimento, che, secondo l'espressione di Isenkrahe, *automaticamente* si chiude appena giunti al numero primo desiderato.

La dimostrazione della suesposta regola si ricava dalle seguenti riflessioni.

a) Riprendo a considerare la successione più sopra formata dei numeri primi

relativi a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, e dati due interi qualunque α, β, tali che sia $\alpha \leqq \beta$, appartenenti o no alla successione, chiamiamo per poco con $\delta(\alpha, \beta)$ il numero degli elementi della successione più grandi di α, e non superiori a β; allora sarà

$$\delta(\alpha, \beta) \leqq \beta - \alpha .$$

b) Per la succitata formola di Legendre si ha

$$\Phi(\alpha) = \alpha - \delta(0, \alpha) .$$

c) Supposto $\alpha \leqq \beta$, si ha $\Phi(\alpha) \leqq \Phi(\beta)$; invero

$$\Phi(\beta) = \beta - \delta(0, \beta) = \alpha + (\beta - \alpha) - \delta(0, \alpha) - \delta(\alpha, \beta)$$

$$= \alpha - \delta(0, \alpha) + (\beta - \alpha) - \delta(\alpha, \beta) \geqq \Phi(\alpha) .$$

d) Poichè

$$k + 1 \leqq p_{n+k} ,$$

sarà

$$\Phi(k + 1) \leqq \Phi(p_{n+k}) ,$$

e quindi

$$k + 1 + \Phi(k + 1) \leqq k + 1 + \Phi(p_{n+k}) ,$$

ossia, il secondo membro equivalendo a p_{n+k} giusta quanto in principio s'è stabilito,

$$k + 1 + \Phi(k + 1) \leqq p_{n+k} ,$$

e successivamente

$$k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\} \leqq p_{n+k}$$

$$k + 1 + \Phi[k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\}] \leqq p_{n+k}$$

. . . .

e) In virtù di *b*) si ha

$$k + 1 + \Phi(k + 1) = 2(k + 1) - \delta(0, k + 1)$$

$$k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\} = 3(k + 1) - \delta(0, k + 1) - \delta\{0, 2(k + 1) - \delta(0, k + 1)\}$$

$$k + 1 + \Phi[k + 1 + \Phi\{k + 1 + \Phi(k + 1)\}] = 4(k + 1) - \delta(0, k + 1) - \delta\{0, 2(k + 1) - \delta(0, k + 1)\}$$

$$- \delta[0, 3(k + 1) - \delta(0, k + 1) - \delta\{0, 2(k + 1) - \delta(0, k + 1)\}] .$$

. . . .

La successione di numeri interi formata dai secondi membri di queste eguaglianze non potendo mai diventar decrescente in virtù di *c*), nè crescere indefinitamente in virtù di *d*), deve finire per avere elementi costanti. Affinchè ciò possa succedere la funzione δ, che occorre ulteriormente togliere dal valore dell'elemento precedente deve eguagliare $k + 1$, di cui volta per volta va aumentando il primo

termine. Quando ciò avviene vuol dire che i termini della successione han raggiunto, e si mantengono poi sempre eguali al valore p_{n+k}, il che dimostra la regola di Smith.

Osservo infine che il calcolo delle diverse funzioni Φ può essere abbreviato facendo tesoro dei procedimenti di Meissel e Rogel (II, 11, 13) *).

43. Le prime quattro formole di Pervouchine. Deduzione e correzione della principale di esse secondo Cesàro. — Risponde alla quistione in discorso, seguendo il terzo indirizzo una delle formole, che nella raccolta *Bulletin de la Société Physico-mathématique de Kasan* (série 2, vol. I à IV, 1892 à 1894) è venuto pubblicando PERVOUCHINE. E poichè ognuna delle ora mentovate formole è degna di interesse, così io parlerò di tutte.

L'autore posteriormente le ha fatte comunicare al Congresso di Zurigo, ed io quindi dalla nota

PERVOUCHINE — Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme, et de leur différence d'après le numéro de ces nombres. *Verhandlungen der ersten internationalen Mathematiker Kongresses in Zürich*, 1897-98, p. 166,

quale da più recente fonte, le estraggo.

Le prime quattro fra le dette formole sono

$$(52)\qquad \frac{p_n}{n} = \log n + \log\log n - 1 + \frac{5}{12\log n} + \frac{1}{24(\log n)^2}$$

$$(53)\qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} i} = \log n + \log\log n - \frac{3}{2} - \frac{5}{12\log n}, \qquad (54)\qquad \frac{p_n}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\log n} + \frac{1}{24(\log n)^2}$$

$$(55)\qquad p_{n+1} - p_n = \log n + \log\log n + \frac{17}{12\log n} - \frac{3}{8(\log n)^2} - \frac{1}{12(\log n)^3}.$$

---

*) Uno scopo ben più modesto di quello dei due scritti, che ho riassunto nel § 41, raggiunge la nota:

VALLE — Sulla totalità dei numeri primi fra due limiti dati. *Memorie della Pontificia Accademia dei nuovi Lincei.* Vol. XIV, p. 144, 1898.

Una fugace enunciazione dei risultati di Gauss, Tchebichef, Riemann, Meissel serve di introduzione a questo scritto.

Ciò che in fondo esso rivela come nuovo è un teorema, che può enunciarsi così:

Se $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_t}$ sono t numeri primi scelti ad arbitrio frai numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_r$, e $p_{m_1}, p_{m_2}, \ldots, p_{m_{r-t}}$ sono i rimanenti fra questi, e si pone

$$P_n = p_{n_1}^{\nu_1} p_{n_2}^{\nu_2} \cdots p_{n_t}^{\nu_t}, \quad P_m = p_{m_1}^{\mu_1} p_{m_2}^{\mu_2} \cdots p_{m_{r-t}}^{\mu_{r-t}},$$

allora, se sono soddisfatte le ineguaglianze

$$P_n - p_r^2 < P_m < P_n + p_r^2,$$

il valore assoluto della differenza $P_m - P_n$, se non è 1, è un numero primo superiore a p_r.

La dimostrazione brevissima è fondata sopra le più elementari considerazioni.

Queste, pare, siano state trovate con metodo empirico. Però i matematici si sono occupati di dedurle col raziocinio; ed invero nella nota:

CESÀRO — Sur une formule empirique de M.r Pervouchine. *Comptes rendus des s. de l'A. d. s.*, vol. CXIX, p. 848, 1895;

si trova dimostrato che la (52) è accettabile con qualche correzione negli ultimi termini ed è avvertito che le altre eguaglianze agevolmente da questa si deducono.

Il Cesàro parte dalla sua formola assintotica per $\vartheta(m)$ (V, 37), la quale, rimpiazzato che si sia l'intero qualunque m col numero primo p_n, va scritta

$$\frac{p_n}{n} = \log p_n - 1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3}{(\log p_n)^2}; \tag{56}$$

ossia, presi i logaritmi di ambo i membri,

$$\log p_n = \log n + \log\log p_n + \log\left(1 - \frac{1}{\log p_n} - \frac{1}{(\log p_n)^2} - \ldots\right).$$

Si sostituisca all'ultimo logaritmo il suo sviluppo in serie, e si supponga n tanto grande, che si abbia sufficiente approssimazione ritenendo di questo e dei successivi sviluppi fino ai termini, che moltiplicati per $(\log n)^2$ diano un prodotto che non s'annulli per $n = \infty$; si ottiene

$$\log p_n = \log n + \log\log p_n - \frac{1}{\log p_n} - \frac{3}{2(\log p_n)^2},$$

donde, secondo lo stesso criterio,

$$\frac{1}{\log p_n} = \frac{1}{\log n} - \frac{\log\log p_n}{(\log n)^2}.$$

Sostituendo questo valore nella precedente eguaglianza si ha

$$\log p_n = \log n + \log\log p_n - \frac{1}{\log n} + \frac{2\log\log p_n - 3}{2(\log n)^2}. \tag{57}$$

Mercè queste ultime due relazioni la (56) si trasforma in

$$\frac{p_n}{n} = \log n + \log\log p_n - 1 - \frac{2}{\log n} + \frac{4\log\log p_n - 9}{2(\log n)^2}. \tag{58}$$

Resta ora ad eliminare $\log\log p_n$. Per far ciò si prendano nella (57) i logaritmi di ambo i membri, e si ha

$$\log\log p_n = \log\log n + \log\left(1 + \frac{\log\log p_n}{\log n} - \frac{1}{(\log n)^2}\right) = \log\log n + \frac{\log\log p_n}{\log n} - \frac{1}{(\log n)^2} - \frac{(\log\log p_n)^2}{2(\log n)^2}$$

Considerando in tale equazione $\log\log p_n$ come incognita, e risolvendo si hanno le due radici

$$-(\log n)^2\left(1-\frac{1}{\log n}\right)\left\{1\pm\left[1+2\frac{\log\log n-\frac{1}{(\log n)^2}}{(\log n)^2\left(1-\frac{1}{\log n}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Però quella di queste corrispondente al segno superiore è negativa, quale che sia n, e non può quindi rappresentare $\log\log p_n$; dunque questo è dato dall'altra radice. Sviluppando in serie il radicale, sostituendo a $\frac{1}{1-\frac{1}{\log n}}$ la somma $1+\frac{1}{\log n}+\frac{1}{(\log n)^2}+\ldots$, e regolandosi come al solito circa l'omissione dei termini, si ha

$$\log\log p_n=\log\log n\left(1+\frac{1}{\log n}+\frac{1}{(\log n)^2}-\frac{\log\log n}{2(\log n)^2}\right)-\frac{1}{(\log n)^2}.$$

Sostituendo questo valore in (58) si perviene a

$$(52_1)\qquad \frac{p_n}{n}=\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}.$$

È questa la formola (52) rettificata.

Stimo opportuno qui notare, in vista di future deduzioni, che se nei precedenti sviluppi del Cesàro si ritiene fino ai termini, che moltiplicati per $(\log n)^3$ dànno un prodotto non nullo per $n=\infty$, si perviene alla formola

$$(52_2)\qquad \frac{p_n}{n}=\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}$$
$$+\frac{2(\log\log n)^3-9(\log\log n)^2+76\log\log n-131}{6(\log n)^3}.$$

È bene inoltre non perdere di vista che la (56) e le successive sono eguaglianze assintotiche, ma i passaggi eseguiti sono tutti leciti, perchè facilmente giustificabili mediante la elementare teoria dei limiti.

44. Deduzione e correzione delle rimanenti tre formole. — In conseguenza della correzione di (52) vanno modificate pure le altre eguaglianze (53), (54) e (55). In quanto alla (53) basta applicare la formola sommatoria di Mac-Laurin

$$\sum_{i=1}^{n}F(p_i)=C+\int F(p_n)dn+\frac{B_1}{1!}F(p_n)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{d^{2i-1}F(p_n)}{dn^{2i-1}},$$

ponendovi

$$F(p_n)=p_n=n\left(\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}\right).$$

Nel calcolare l'integrale si applichi la integrazione per parti, e si ritenga

in tutto il secondo membro fino a quei termini che, per n infinito, diventano infiniti come $\frac{n^2}{(\log n)^3}$; si ricaverà

$$\sum_{i=1}^{n} F(p_i) = \frac{n^2}{2}\left(\log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{2\log\log n - 5}{2\log n} - \frac{2(\log\log n)^2 - 14\log\log n + 29}{4(\log n)^2}\right):$$

dividendo per

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{\frac{n^2}{2}}{1 - \frac{1}{n+1}},$$

si deduce infine

$$(53_1)\qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} i} = \log n + \log\log n - \frac{3}{2} + \frac{2\log\log n - 5}{2\log n} - \frac{2(\log\log n)^2 - 14\log\log n + 29}{4(\log n)^2},$$

la quale sostituisce la (53).

Sottraendo (53_1) da (52_1) si trae

$$(54_1)\qquad \frac{p_n}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\log n} - \frac{2\log\log n - 7}{4(\log n)^2},$$

che prende il posto della (54).

Finalmente per la formola di Taylor si ha

$$p_{n+1} - p_n = \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}n} + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 p_n}{\mathrm{d}n^2} + \cdots;$$

e quindi, a causa della sistematica limitazione del numero dei termini,

$$(55_1)\qquad p_{n+1} - p_n = \log n + \log\log n + \frac{\log\log n - 1}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 4\log\log n + 5}{2(\log n)^2},$$

che è la (55) corretta.

45. Col raziocinio si deduce e per via empirica si conferma che, col crescere di n, la formola di Cesàro diventa preferibile a quella di Pervouchine. — Malgrado che la (52_1) sia dedotta col raziocinio, mentre la (52) sembra trovata colla sola guida dell'esperienza, non può *a priori* affermarsi che il primato spetti alla (52_1); anzi le prime prove numeriche sembrano raccomandare a preferenza la (52). Però è facile convincersi che la formola di Cesàro deve finire per trionfare.

In effetti, se dal secondo membro della (52_1) si toglie quello della (52), si ha una differenza, che può scriversi così

$$\frac{\log\log n}{\log n}\left(1-\frac{29}{12}\cdot\frac{1}{\log\log n}-\frac{1}{2}\frac{\log\log n}{\log n}+3\frac{1}{\log n}-\frac{133}{24}\cdot\frac{1}{\log n\,.\,\log\log n}\right).$$

Ora poichè, al crescere indefinitamente di n, ognuno dei quattro ultimi termini fra parentesi tende a 0, vi sarà un valore di n abbastanza grande, dal quale in poi la quantità in parentesi diventerà, e si manterrà poi sempre positiva. In conseguenza da esso in avanti il secondo membro della (52_1) supererà quello della (52).

Se quindi si fa vedere che, almeno da una determinabile n in poi, il valore di p_n offerto da (52_1) è inferiore al valore effettivo di p_n, ne segue che, dal più grande dei suindicati valori di n in avanti,

$$n\left(\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}\right)$$

sarà più prossimo al valore effettivo di p_n che

$$n\left(\log n+\log\log n-1+\frac{5}{12\log n}+\frac{1}{24(\log n)^2}\right).$$

Per procedere al paragone dei valori di p_n più sopra menzionati noto che la eguaglianza

$$p_n=n\left(\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{2(\log\log n)^3-9(\log\log n)^2+76\log\log n-131}{6(\log n)^3}\cdots\cdots\right),$$

offrendo, come sopra si è osservato, una legge assintotica pel valore effettivo del numero primo p_n, dà

$$\lim_{n=\infty}\frac{p_n-n\left(\log n+\log\log n-1+\frac{\log\log n-2}{\log n}-\frac{(\log\log n)^2-6\log\log n+11}{2(\log n)^2}\right)}{n\,.\,\frac{2(\log\log n)^3-9(\log\log n)^2+76\log\log n-131}{6(\log n)^3}}=1\ ;$$

perciò, almeno da un conveniente valore di n in poi detta espressione avente per limite 1 finirà per diventare e mantenersi poi sempre positiva, e poichè il polinomio

$$2(\log\log n)^3-9(\log\log n)^2+76\log\log n-131\ ,$$

per

$$\log\log n>2\ ,$$

è positivo, ne segue che tale pure dovrà essere la differenza

$$p_n - n\left(\log n - \log\log n - 1 + \frac{\log\log n - 2}{\log n} - \frac{(\log\log n)^2 - 6\log\log n + 11}{2(\log n)^2}\right);$$

e in conseguenza il valore offerto dalla (52_1) per p_n sarà inferiore al valore effettivo di p_n: cosicchè resta provato l'asserto.

Ho ritenuto pregio dell'opera illustrare questo punto con esempii numerici, mettendo a paragone i valori p_n, p'_n, p''_n offerti dalle (52), (52_1), (52_2) con quello P_n desunto dalla diretta ispezione nelle tavole. Riassumo i risultati di questi calcoli nello specchietto seguente, ponendo accanto a ogni risultato la deviazione relativa, propriamente quella corrispondente, in media, a ciascun milione di P_n. deviazione che per le tre formole è espressa ordinatamente da

$$\frac{p_n - P_n}{P_n}.1\,000\,000\ ,\quad \frac{p'_n - P_n}{P_n}.1\,000\,000\ ,\quad \frac{p''_n - P_n}{P_n}.1\,000\,000\ .$$

Ecco dunque il quadro:

	Formola (52) (PERVOUCHINE)		Formola (52_1) (CESÀRO)		Formola (52_2)		Tavole
$n =$	$p_n =$	quota di deviazione per un milione	$p'_n =$	quota di deviazione per un milione	$p''_n =$	quota di deviazione per un milione	$P_n =$
78 499	999 325	— 678	998 612	— 1 391	998 873	— 1 130	1 000 003
148 934	1 999 292	— 356	1 998 816	— 598	1 999 293	— 355	2 000 003
216 817	2 998 477	— 513	2 998 427	— 529	2 999 101	— 305	3 000 017
283 147	3 997 243	— 698	3 997 727	— 577	3 998 587	— 362	4 000 037
348 514	4 997 569	— 488	4 999 053	— 192	5 000 093	+ 16	5 000 011
412 849	5 995 244	— 792	5 996 954	— 507	5 998 164	— 305	5 999 993
483 016	7 096 265	— 526	7 098 790	— 171	7 100 189	+ 26	7 100 003
539 778	7 994 574	— 679	7 997 760	— 281	7 999 307	— 88	8 000 009
602 488	8 994 418	— 620	8 998 360	— 180	9 000 068	+ 10	8 999 981
5 761 456	99 896 560	— 1 034	99 992 604	— 74	100 005 633	+ 56	100 000 007
5 761 518	99 897 693	— 1 034	99 993 738	— 73	100 006 767	+ 57	100 001 087

In questi esempii da principio i risultati della formola di Pervouchine sono più vicini ai numeri primi di quelli della formola di Cesàro, e la prima conserva il vantaggio fino a che non sia oltrepassato il 3° milione, ma lo perde negli esempii, in cui P_n è superiore a 4 milioni. Sicchè l'esperienza conferma la previsione fatta col raziocinio.

La formola (52_2), come più completa, è quella che offre minori deviazioni, e

appare preferibile alla formola di Pervouchine, fin da quando P_n supera i due milioni.

46. Illustrazione numerica delle due formole offrenti il valore della differenza fra un numero primo e il successivo. Tendenza dei numeri primi a diventare sempre più rari.—Analoghe calcolazioni ho eseguite relativamente alle formole (55) e (55_1), e ne espongo i risultati, non per paragonare queste formole fra loro; giacchè in primo luogo, dopo quanto s'è detto, teoricamente merita certo preferenza la (55_1), che è conseguenza della (52_1), e in secondo luogo esse, generalmente, fino ai centesimi dànno, presso a poco, gli stessi numeri; ma perchè il lettore si formi una giusta idea di ciò che valgono queste formole. Riassumo i risultati nel quadro:

	Formola (55) (PERVOUCHINE)	Formola (55_1)	Tavole
$n =$	$p_{n+1} - p_n =$	$p'_{n+1} - p'_n =$	$P_{n+1} - P_n =$
78 499	13,82	13,81	30
148 934	14,51	14,51	26
216 817	14,91	14,91	12
283 147	15,19	15,20	2
348 514	15,42	15,43	66
412 848	15,60	15,61	46
483 016	15,77	15,78	14
539 778	15,88	15,89	8
602 488	16,00	16,01	12
5 761 456	18,40	18,42	6
5 761 518	18,40	18,42	20

Come si vede ambedue le formole (55), (55_1) sono ben lungi dal dare un valore non molto deviato della effettiva differenza fra il numero primo di posto assegnato e il successivo; ma se si paragonano i numeri ottenuti alla media delle differenze dei numeri primi consecutivi in un intorno del numero primo considerato, si hanno, almeno fino ai decimi, identità. Così la detta media delle differenze dei numeri primi consecutivi fra 900 000 e 1 100 000 intorno di $P_{78499} = 1\,000\,003$ è 13,85, quella fra 1 900 000 e 2 100 000 intorno di $P_{148934} = 2\,000\,003$ è 14,52; e così nei successivi esempii si ha 14,94 , 15,19 etc.

Cade in acconcio qui notare che nel precedente quadro si verifica che la differenza $p'_{n+1} - p'_n$ cresce coll' aumentare di n, e ciò potea ben prevedersi esaminando il secondo membro di (55_1). Questa osservazione fa conchiudere che i numeri primi tendono a diventare sempre più rari a misura che ci si inoltra nella serie naturale.

Debbo a una osservazione del Cesàro la costatazione del fatto che questa tendenza può anche dedursi agevolmente dalle eguaglianze

$$\lim_{m=\infty} \frac{\theta(m) - \frac{m}{\log m}}{\frac{1!\,m}{\log m}} = 1 \;, \quad \lim_{m=\infty} \frac{\theta(m) - \frac{m}{\log m} - \frac{1!\,m}{(\log m)^2}}{\frac{2!\,m}{(\log m)^3}} = 1 \;, \ldots$$

(cfr. IV, 23, g)), giacchè per mezzo di esse si ricavano

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \left(\frac{\theta(m)}{m} - \frac{\theta(km)}{km} \right) (\log m)^2 \right\} = \log k \;, \quad \lim \left\{ \left[\left(\frac{\theta(m)}{m} - \frac{\theta(km)}{km} \right) (\log m)^2 - \log k \right] \log m \right\} = 2 \log k - (\log k)^2 \;, \ldots .$$

Aggiungo che dal teorema g) di Tchebichef ora citato può trarsi la espressione generale d'una legge assintotica per la differenza $\frac{\theta(m)}{m} - \frac{\theta(km)}{km}$. Infatti ricavando per mezzo della eguaglianza fornita da detto teorema il valore della differenza in parola, sviluppando secondo la formola del binomio le potenze negative di $1 + \frac{\log k}{\log m}$, e raccogliendo i termini colla medesima potenza di $\frac{1}{\log m}$, si trae la legge assintotica

$$\frac{\theta(m)}{m} - \frac{\theta(km)}{km} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(\log m)^{n+1}} \left\{ \frac{\log k}{1!} - \frac{(\log k)^2}{2!} + \frac{(\log k)^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{(\log k)^n}{n!} \right\},$$

la quale riassume in sè tutte le eguaglianze poco fa indicate; dalla prima delle quali si trae per m sufficientemente grande che $\frac{\theta(m)}{m} - \frac{\theta(km)}{km}$ dovrà finire per aver costantemente il segno di $\log k$, quindi supposto $k > 1$, dovrà finire per mantenersi sempre

$$\frac{\theta(m)}{m} > \frac{\theta(km)}{km} \;,$$

il che prova l'assunto.

47. Conseguenza della terza formola di Pervouchine dedotta da Latchine. Proposizione più generale di Cesàro. Altra più antica formola di Pervouchine, che rientra in un teorema più generale enunciato anteriormente da Hargreave.— Dalla (55_1) si trae

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{p_n}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} i} \right) = \frac{1}{2} \;.$$

Della proposizione espressa da questa eguaglianza se ne trovano due dimostrazioni una in

LACHTINE — Sur une relation de la théorie des nombres remarquée

par le P. Pervouchine. *Recueil Math. de la Société math. de Moscou.* T. XVI, p. 460, 1891-92,

e una seconda in

Cesàro — Remarques utiles dans les calculs de limites. *Mathesis.* II série, t. VII, p. 177, 1897.

Seguendo questa nota si perviene ad un teorema più generale. Ritengo quindi utile riferirne.

La nota comincia collo stabilire alcune proposizioni sui limiti e fra le applicazioni di queste si rinviene la eguaglianza in esame. Avendo in mira solo questa, la dimostrazione può ridursi come segue:

Supposto che u_n sia assintotico a $\log n$, sia dato a trovare il limite per $n = \infty$ di

$$d_n = u_n - \frac{1^\alpha u_1 + 2^\alpha u_2 + \cdots + n^\alpha u_n}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha} .$$

Per riuscirvi applico il noto teorema:

Se, per n *tendente all'∞, la variabile* b_n, *crescendo sempre, oltrepassa ogni limite, si ha*

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} ,$$

purchè esista il secondo membro.

Ponendo

$$a_n = (1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha) d_n \quad , \quad b_n = 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha ,$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} d_n = \lim \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^\alpha} (u_n - u_{n-1})$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^\alpha} \log \frac{n}{n-1} \right) . \lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{\log n - \log(n-1)} .$$

Inoltre è (Cesàro, Analisi algebrica, p. 288)

$$1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha = \frac{(n-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(n-1)^\alpha}{2} + \frac{\alpha(n-1)^{\alpha-1}}{12} + \cdots + B_\alpha (n-1) ;$$

quindi

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n-1)^\alpha}{n^\alpha} \log \frac{n}{n-1} \right) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^\alpha (n-1) \log \frac{n}{n-1} \right] = \frac{1}{\alpha+1} ;$$

d'altra parte

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{\log n - \log(n-1)} = \lim \frac{u_n}{\log n} = 1 ;$$

dunque

$$\lim_{n=\infty} d_n = \frac{1}{\alpha+1} .$$

Ora può porsi

$$u_n = \frac{p_{n^\alpha}}{\alpha n^\alpha} ,$$

imperocchè, secondo la formola (52_1), si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n^\alpha}}{n^\alpha \, . \, \alpha \log n} = 1 \ ;$$

dunque

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{p_{n^\alpha}}{n^\alpha} - \frac{p_{1^\alpha} + p_{2^\alpha} + \cdots + p_{n^\alpha}}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha} \right) = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \ .$$

Per $\alpha = 1$ si ha la proposizione dedotta in principio di questo §.

Nella medesima nota il Cesàro ricava pure un'altra più antica (1858) formola di Pervouchine, cioè

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \cdots + p_n = \Im(p_n^2) \ ;$$

ma io qui m'arresto, giacchè questa rientra come caso particolare in una proposizione, enunciata fin dal 1849 da Hargreave, della quale terrò parola nel Capitolo VII, § 49.

48. Gli ulteriori enunciati di Pervouchine relativi alle somme multiple sono esatti? Il Pervouchine soggiunge nella sua comunicazione che *per le somme multiple si ha la formola*

$$(59) \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}{}_r \, p_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}{}_r \, i} = \log n + \log \log n - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i^{(r)}}{(\log n)^i} \ ,$$

dove i coefficienti $M_i^{(r)}$ vanno calcolati successivamente mediante le formole

$$M_1^{(r)} = M_1^{(r-1)} - \frac{1}{r+1} \ , \ M_2^{(r)} = M_2^{(r-1)} + \frac{M_1^{(r-1)}}{r+1} - \frac{1}{(r+1)^2} \ , \ \text{etc.},$$

e infine enuncia la proposizione

$$(60) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}{}_r \, p_i}{\dfrac{p_n^{\,r+1}}{(\log p_n)^r \, . \, (r+1)!}} = 1 \ .$$

Non risulta qual senso dia il Pervouchine alla espressione *somme multiple*; ma parmi che, se ad essa si attribuisce il significato, che le si suol dare nella ordinaria teoria delle funzioni simmetriche (SERRET, Cours d'Algèbre supérieure, I, p. 378), questi ulteriori enunciati di Pervouchine non sono esatti. In effetti le somme doppie, come è ben noto, sono espresse mediante le somme semplici dalla formola

$$\sum_{i=1}^{n}{}_2 \, p_i = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \right\} .$$

Ora elevando a quadrato il valore di $\sum_{i=1}^{n} p_i$ dato da (53_1) e ritenendo fino ai termini, che al crescere di n indefinitamente diventano infiniti come $\frac{n^4}{\log n}$, si ha

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2 = \frac{n^4}{4}\left\{(\log n)^2 + 2\log n \,.\, \log\log n - 3\log n + (\log\log n)^2 - \log\log n - \frac{11}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{(\log\log n)^2 - \log\log n - 7}{\log n}\right\}.$$

D'altra parte, applicando come sopra la formola sommatoria di Mac-Laurin, si ha

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \frac{n^3}{3}\left\{(\log n)^2 + 2\log n \,.\, \log\log n - \frac{8}{3}\log n + (\log\log n)^2 - \frac{2}{3}\log\log n - \frac{25}{9}\right.$$
$$\left. + \frac{18(\log\log n)^2 - 60\log\log n + 38}{9\log n}\right\};$$

dunque, arrestandosi ai termini dell'ordine di $\frac{n^4}{\log n}$, si potrà scrivere

$$\mathop{\sum\nolimits_2}_{i=1}^{n} p_i = \frac{n^4}{8}\left\{(\log n)^2 + 2\log n \,.\, \log\log n - 3\log n + (\log\log n)^2 - \log\log n - \frac{11}{4}\right.$$
$$\left. + \frac{(\log\log n)^2 - \log\log n - 7}{\log n}\right\}.$$

Si ha poi

$$\mathop{\sum\nolimits_2}_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\right\} = \frac{1}{24}(n-1)\,n\,(n+1)(3n+2)\;;$$

perciò risulta infine

$$\frac{\mathop{\sum\nolimits_2}_{i=1}^{n} p_i}{\mathop{\sum\nolimits_2}_{i=1}^{n} i} = (\log n)^2 + 2\log n \,.\, \log\log n - 3\log n + (\log\log n)^2 - \log\log n - \frac{11}{4}$$
$$+ \frac{(\log\log n)^2 - \log\log n - 7}{\log n},$$

che non si accorda colla (59).

Dalla formola ora dimostrata discende che il rapporto

$$\frac{\mathop{\sum\nolimits_2}_{i=1}^{n} p_i}{\frac{p_n^4}{(\log p_n)^2 \,.\, 8}}$$

non può tendere a un limite diverso da 1, il che è in contradizione colla (60). Nè l' accordo si stabilirebbe, se nel calcolo or ora compito in luogo delle (52_1), (53_1), cioè delle formole corrette, si facesse uso delle (52), (53) cioè delle formole originarie di Pervouchine.

CAPITOLO VII.

49. Applicazioni. Valutazione delle espressioni $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}$, $\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$, $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i^2}$, secondo Legendre. Formole analoghe di Hargreave, e di Tchebichef. — Come ho detto nel (III, 15) Legendre, stabilita per la $\theta(x)$ la formola (11), passò ad applicarla ad alcuni problemi. Questi consistono nella determinazione dei valori delle espressioni

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}\ ,\quad \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\ ,\quad \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i^2}\ .$$

Egli pervenne alle seguenti formole, da valere sempre che l' indice n sia sufficientemente grande,

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i}=\log(\log p_n-0{,}08366)-0{,}2215\ ,\quad \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\frac{1{,}104}{\log p_n-0{,}08366}$$

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i^2}=0{,}452247\ldots-\frac{1}{p_n(\log p_n+0{,}91634)}\ .$$

Mi astengo dal riportar qui le argomentazioni, mediante le quali egli stabilì tali risultati, non meritando esse fiducia, imperocchè ivi, oltre all' uso della (11) considerata come eguaglianza del tutto completa e non semplicemente assintotica, si ricorre replicatamente a non giustificate, nè facilmente giustificabili, omissioni di termini.

L' Hargreave nel primo dei lavori citati al (III, 19) applicò la formola da lui trovata per $\theta(x)$ ai medesimi problemi, anzi al problema più generale di assegnare il valore della espressione $\sum_{i=1}^{n}F(p_i)$, e, supponendo poi $F(p_i)$ successivamente eguale a

$$p_i\ ,\ p_i^2\ ,\ \ldots\ ,\ p_i^m\ ,\ \frac{1}{p_i}\ ,\ \frac{1}{p_i^2}\ ,\ \log p_i\ ,\ -\log\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\ ,$$

venne a risolvere, fra gli altri, anche i problemi di Legendre.

Egli adoperò la formola sommatoria di Mac-Laurin

$$\sum_{i=1}^{n}F(p_i)=c+\int F(p_n)\,dn+\frac{B_1}{1!}F(p_n)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{d^{2i-1}F(p_n)}{dn^{2i-1}}\ .$$

Servendosi della (12) posta sotto la forma $\frac{dn}{dp_n}=\frac{1}{\log p_n}$, egli cambiò nella eguaglianza precedente la variabile indipendente, e scelse come tale p_n; sicchè la formola sommatoria diventò

$$\sum_{i=1}^{n} F(p_i)=c+\int\frac{F(p_n)}{\log p_n}dp_n+\frac{1}{2}F(p_n)+\frac{1}{12}\frac{dF(p_n)}{dp_n}\log p_n$$

$$-\frac{1}{720}\left\{\frac{d^3F}{dp_n^3}(\log p_n)^3+3\frac{d^2F}{dp_n^2}\frac{(\log p_n)^2}{p_n}+\frac{\log p_n-(\log p_n)^2}{p_n^2}\frac{dF}{dp_n}\right\}+\dots$$

Da questa trasse in particolare pei problemi di Legendre

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=0{,}267\ldots+\log\log p_n+\frac{1}{2p_n}-\frac{1}{12}\frac{\log p_n}{p_n^2}-\dots$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}=0{,}581078\ldots+\log\log p_n+\frac{1}{2}\int\frac{d\frac{1}{p_n}}{\log\frac{1}{p_n}}+\frac{1}{3}\int\frac{d\frac{1}{p_n^2}}{\log\frac{1}{p_n^2}}+\dots-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{p_n}\right)+\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2}=0{,}452247\ldots+\int\frac{d\frac{1}{p_n}}{\log\frac{1}{p_n}}+\frac{1}{2p_n^2}-\frac{1}{6}\frac{\log p_n}{p_n^3}-\dots.$$

L'uso della (12) considerata come eguaglianza del tutto completa, l'operare, prescindendo da qualunque considerazione del resto, su sviluppi ritenuti non assintotici, rendono non soddisfacente questo procedimento. Prima di abbandonare le investigazioni di Hargreave noto che, ponendo $F(p_i)=p_i^m$, egli dedusse il teorema:

La somma delle m^{me} *potenze dei numeri primi fra* y *escluso ed* x *incluso eguaglia il numero dei primi fra* y^{m+1} *ed* x^{m+1} *aumentato di* $\frac{1}{2}(x^m-y^m)$ *con ulteriore correzione involgente le potenze* (m — 1)^{esime}, *e le più basse di* x *ed* y, *in combinazione coi loro logaritmi, che ascenderà ad un totale relativamente piccolo.*

Proposizione, che può esprimersi succintamente colla formola

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i^m}{\mathfrak{S}(p_n^{m+1})}=1\ ;$$

e questa comprende come caso particolare la proposizione di Pervouchine enunciata in fine di (VI, 46).

Parimenti adoperando la (12), e con alcune considerazioni circa il grado di esattezza nella valutazione di certe espressioni, Tchebichef nella memoria citata nel (IV, 21) pervenne alle formole, da valere per n sufficientsmente grande

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=c+\log\log p_n\ ,\quad \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\frac{c_0}{\log p_n}\ ,$$

essendo c, e c_0 due numeri indipendenti da n.

Ma coteste argomentazioni, sebbene meno imperfette delle precedenti, lasciano ancora dei dubii.

50. Deduzione delle prime due formole col metodo di Cesàro.—Il CESÀRO nella memoria, di cui ho discorso al Capitolo V, trae col suo procedimento le formole, che risolvono i primi due problemi di Legendre.

Riprendendo in esame la deduzione, da me riportata nel § 31, della (27) si vede che questa porge proprio il valore per $x=1$ della espressione tra parentesi a grappe. Laonde tale eguaglianza può scriversi sotto la forma

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots+\frac{1}{n\log n}-\sum_{i=1}^{\vartheta(n)}\frac{1}{p_i}\right)=A+B-C\ ;$$

la si sottragga dalla (23), che definisce la costante B, e si ottiene

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{i=1}^{\vartheta(n)}\frac{1}{p_i}-\log\log n\right)=C-A\ . \tag{61}$$

Trasformata poi la (22) nella equivalente

$$\lim_{n=\infty}\left[\log\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_{\vartheta(n)}}\right)}-\sum_{i=1}^{\vartheta(n)}\frac{1}{p_i}\right]=A\ ,$$

e sommata colla precedente, si trae

$$\lim_{n=\infty}\left[\log\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_{\vartheta(n)}}\right)}-\log\log n\right]=C\ ,$$

ossia

$$\lim_{n=\infty}\frac{\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_{\vartheta(n)}}\right)}}{\log n}=e^{C}\ . \tag{62}$$

Le (61), (62) presentano la interpretazione più corretta dei primi due risultati di Legendre.

51. Deduzione delle stesse col metodo di Mertens. — Con ragionamento ineccepibile, e nel quale neppure occorre alcuna rappresentazione analitica della totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato, il MERTENS dileguò ogni dubio sulle formole in discorso mediante la memoria

Ueber die Vertheilung der Primzahlen. *Crelle-Journal für d. r. u. a. M.*, tomo 78, p. 46, 1874.

Il procedimento invero è alquanto faticoso, ma il lavoro merita bene un resoconto, tanto più che contiene inoltre un' importante estensione. Cercherò d'essere, per quanto è possibile, conciso.

Il lavoro comincia con due lemmi espressi dalle ineguaglianze

$$\sum_{i=1}^{\vartheta(m)} \log p_i < 2m \quad , \quad \left| \log m - \sum_{i=1}^{\vartheta(m)} \frac{\log p_i}{p_i} \right| < 2 \, ,$$

di cui il secondo è dedotto quale conseguenza del primo.

Dopo tali premesse per determinare assintoticamente la funzione $\sum_{i=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_i}$, la si considera come il valore, per $x=1$, della differenza fra le due somme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} \quad , \quad \sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} \, .$$

Per la prima di queste, dalla proprietà fondamentale della funzione ζ dovuta ad Eulero, posto come al solito

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^3} + \dots = \mathrm{A} \; ,$$

si ricava subito

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} = \log \frac{1}{x-1} - \mathrm{A} + (x-1)\omega \; , \tag{63}$$

dove il simbolo ω indica qui, e nel seguito del §, una quantità, che resta finita per $x=1$.

Ben più lungo è il cammino per determinare la $\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x}$. A fin di pervenirvi si pensa questa funzione come la somma di

$$\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x . \log m} \tag{64}$$

e

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x . \log m} \, . \tag{65}$$

Per trasformare la (64) si ricorre al secondo lemma. In virtù di esso, posto

$$\sum_{i=1}^{\vartheta(m)} \frac{\log p_i}{p_i} = \varkappa(m) \; ,$$

può scriversi

$$\varkappa(m) = \log m + 2\Delta_m \; ,$$

essendo

$$|\Delta_m| < 1 \; .$$

Dopo varie trasformazioni si perviene poi a

$$\sum_{i=\Im(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\varkappa(m)-\varkappa(m-1)}{m^{x-1}\log m} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x \log m} - \frac{2\Delta_n}{(n+1)^{x-1}\log(n+1)} +$$

$$+2\sum_{m=n+1}^{\infty} \Delta_m \left(\frac{1}{m^{x-1}\log m} - \frac{1}{(m+1)^{x-1}\log(m+1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{x-1}(m+1-\eta_m)^2\log(m+1)} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{x-1}\log(n+1)},$$

dove $0 < \eta_m < 1$; quindi osservando che

$$\frac{-2\Delta_n}{(n+1)^{x-1}\log(n+1)} < \frac{2}{\log(n+1)},$$

$$2\sum_{m=n+1}^{\infty} \Delta_m \left(\frac{1}{m^{x-1}\log m} - \frac{1}{(m+1)^{x-1}\log(m+1)}\right) < \frac{2}{\log(n+1)},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{x-1}(m+1-\eta_m)^2\log(m+1)} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}{(n+1)^{x-1}\log(n+1)} < \frac{1}{n\log(n+1)},$$

si trae che

$$\sum_{i=\Im(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x \log m} = \mathrm{R}, \tag{66}$$

essendo

$$\mathrm{R} < \frac{4}{\log(n+1)} + \frac{1}{n\log(n+1)}.$$

Per operare analogamente sulla (65) si stabilisce prima che

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x} = \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} - \mathrm{R}',$$

essendo

$$\mathrm{R}' = \frac{x}{2}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{x+1}} + \frac{x(x+1)}{2.3}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{x+2}} + \cdots;$$

donde, moltiplicando per dx, e integrando da x a 2, si ha

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x \log m} = \int_x^2 \frac{dx}{(x-1)n^{x-1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \log m} - \int_x^2 \mathrm{R}' dx.$$

Ora dopo varie trasformazioni, indicando come al solito con C la costante di Eulero, si trovano

$$\int_x^2 \frac{dx}{(x-1)n^{x-1}} = -\log(1-n^{-(x-1)}) - C - \int_2^\infty \frac{dz}{(z-1)n^{z-1}} + (x-1)\omega ,$$

$$-\log(1-n^{-(x-1)}) = \log\frac{1}{x-1} - \log\log n + (x-1)\omega ;$$

e quindi la precedente si trasforma in

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^x \log m} = \log\frac{1}{x-1} - \log\log n - C - \int_2^\infty \frac{dz}{(z-1)n^{z-1}} +$$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \log m} - \int_x^2 R'dx + (x-1)\omega .$$

Sommando questa con (66), e notando che

$$R - \int_2^\infty \frac{dz}{(z-1)n^{z-1}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2\log m} - \int_x^2 R'dx < \frac{4}{\log(n+1)} + \frac{2}{n\log n} ,$$

come agevolmente si dimostra, si giunge finalmente a

$$\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^x} = \log\frac{1}{x-1} - \log\log n - C + \rho + (x-1)\omega ,$$

essendo

$$\rho < \frac{4}{\log(n+1)} + \frac{2}{n\log n} . \tag{67}$$

Sottraendo l'ultima eguaglianza da (63), e ponendo poi nel risultato $x=1$, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_i} = \log\log n + C - A + \rho , \tag{68}$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{i=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_i} - \log\log n\right) = C - A ,$$

che coincide colla (61).

52. Brevemente si deduce ora la (62). Avvalendosi dello sviluppo in serie di $\log\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ si ha

$$\log\prod_{i=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \sum_{i=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_i} + A - \frac{1}{2}\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{3}\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty} \frac{1}{p_i^3} - \dots .$$

Ora

$$\frac{1}{2}\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}+\frac{1}{3}\sum_{i=\vartheta(n)+1}^{\infty}\frac{1}{p_i^3}+\cdots<\frac{1}{2n},$$

quindi in virtù di (68) e (67)

$$\prod_{i=1}^{\vartheta(n)}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}=e^{C+\rho_1}\log n\ ,$$

essendo

$$\rho_1<\frac{4}{\log(n+1)}+\frac{2}{n\log n}+\frac{1}{2n},$$

e perciò

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{\log n}\prod_{i=1}^{\vartheta(n)}\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right)=e^{C},$$

che è la (62).

53. Estensione fatta da Mertens al caso, in cui si cerca la somma delle inverse dei numeri primi non superiori a un limite assegnato e della forma $4y+1$, oppure $4y+3$. Si deduce che queste due forme sono egualmente frequenti frai numeri primi. — Pervenuto a questi risultati il Mertens procede ad estenderli, trovando la somma $\sum\frac{1}{p_i}$ anche nell'ipotesi che essa sia estesa non a tutti i numeri primi fino a un dato limite, ma solo a quelli di essi, che abbiano una prescritta forma lineare; la quale estensione è di sommo interesse, riannodandosi con problemi di distribuzione dei numeri primi tra forme lineari, dei quali in seguito a lungo discorrerò (Capit. XI). Egli comincia dal considerare le due forme $4y+1$, $4y+3$. Tale ricerca è fondata sul lemma:

La somma $\sum_{i=2}^{\vartheta(n)}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}}\frac{\log p_i}{p_i}$ *non può sorpassare una determinabile costante* γ, *per grande che sia* n.

Da questo si desume la convergenza della serie

$$\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}}\frac{1}{p_i},\qquad (69)$$

convergenza che non può essere che semplice, poichè la serie formata coi valori assoluti dei termini è divergente.

Chiamata S la somma della suddetta serie, si deduce poi

$$\sum_{i=2}^{\vartheta(n)}(-1)^{\frac{p_i-1}{2}}\frac{1}{p_i}=S+\frac{2\gamma\eta}{\log(n+1)}\ ,\quad 0<\eta<1\ ;$$

ma per le (68), (67) si ha

$$\sum_{i=2}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_i} = \log\log n + \mathrm{C} - \mathrm{A} - \frac{1}{2} + \rho \quad , \quad \rho < \frac{4}{\log(n+1)} + \frac{2}{n \log n} \; ;$$

dunque, sommando o sottraendo le due ultime eguaglianze, e dividendo per 2 i risultati, si ricavano

$$\sum \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \log\log n + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A} - \frac{1}{2} + \mathrm{S}}{2} + \varepsilon \quad , \quad (q \equiv 1 \ , \ \mathrm{mod.}\ 4 ; q \leq n)$$

$$\sum \frac{1}{q'} = \frac{1}{2} \log\log n + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A} - \frac{1}{2} - \mathrm{S}}{2} + \varepsilon' \quad , \quad (q' \equiv 3 \ , \ \mathrm{mod.}\ 4 ; q' \leq n) \ ,$$

dove ε, ε' rappresentano numeri, che non possono superare il limite

$$\frac{2+\gamma}{\log(n+1)} + \frac{1}{n \log n} \ .$$

In conseguenza si traggono

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \log\log n \right\} = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A} - \frac{1}{2} + \mathrm{S}}{2} = -0{,}2867420562\ldots \qquad (q \equiv 1 \ , \ \mathrm{mod.}\ 4 ; q \leq n)$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum \frac{1}{q'} - \frac{1}{2} \log\log n \right\} = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A} - \frac{1}{2} - \mathrm{S}}{2} = 0{,}0482392690\ldots \qquad (q' \equiv 3 \ , \ \mathrm{mod.}\ 4 ; q' \leq n) \ .$$

Prima di procedere oltre è conveniente osservar qui un fatto, che sarà richiamato in appresso, cioè che dalla convergenza semplice della serie (69), applicando il noto teorema:

Se i termini d' una serie semplicemente convergente si seguono decrescendo in valore assoluto, il rapporto fra il numero dei termini positivi, e quello dei termini negativi non può tendere a un limite diverso dall'unità,

si conclude che il rapporto fra la totalità dei numeri primi della forma $4y + 1$ non superiori ad n e la totalità dei numeri primi della forma $4y + 3$ non superiori al medesimo limite, non può tendere che all'unità, quando n cresce indefinitamente, o in altre parole che le forme $4y + 1$, $4y + 3$ *sono egualmente frequenti frai numeri primi* (Cfr. XI, 94).

54. Richiamo della teoria dei caratteri di un numero secondo un modulo assegnato primo con esso. Estensione fatta da Mertens del procedimento del § 53 al caso, in cui si cerca la somma delle inverse dei numeri primi non superiori a un limite assegnato, e compresi nella forma lineare $My + N$. — Negli ultimi paragrafi del suo lavoro il Mertens passa al caso generale della forma lineare $My + N$.

Per seguire le sue argomentazioni occorre la conoscenza della teoria dei ca-

ratteri di un numero secondo un modulo assegnato primo con esso. Questa teoria si trova delineata nei supplementi V e VI delle Lezioni sulla Teoria dei numeri di LEJEUNE DIRICHLET; ma poichè qui e molto più nel seguito di questo lavoro importa introdurre relativamente ad essa più chiare notazioni, è indispensabile che ora io in particolare la ricordi.

55. Supponiamo in primo luogo che il modulo sia la potenza ϖ^{esima} del numero primo dispari h.

Scegliamo una radice primitiva g della congruenza

$$y^{\varphi(h^\varpi)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } h^\varpi).$$

Supponendosi il numero n primo con h^ϖ, si ha che, giusta la definizione di radice primitiva della congruenza, fra gli esponenti $0, 1, 2, \ldots, \varphi(h^\varpi) - 1$ se ne trova uno ed un solo ν tale che sia

$$g^\nu \equiv n \qquad (\text{mod. } h^\varpi);$$

ν suol chiamarsi *indice* di n relativamente al modulo h^ϖ.

Ora se

$$\omega_0 \ , \ \omega_1 \ , \ \omega_2 \ , \ \ldots \ , \ \omega_{\varphi(h^\varpi)-1}$$

sono le radici dell'equazione binomia

$$x^{\varphi(h^\varpi)} = 1 \ ,$$

cioè se

$$\omega_r = \cos\frac{2r\pi}{\varphi(h^\varpi)} + i \operatorname{sen}\frac{2r\pi}{\varphi(h^\varpi)} \quad , \quad [r = 0 \ , \ 1 \ , \ 2 \ , \ \ldots \ , \ \varphi(h^\varpi) - 1] \ ,$$

i numeri complessi

$$\omega^\nu_0 \ , \ \omega^\nu_1 \ , \ \omega^\nu_2 \ , \ \ldots \ , \ \omega^\nu_{\varphi(h^\varpi)-1}$$

sono chiamati i *caratteri* di n secondo il modulo h^ϖ, e li indicherò ordinatamente coi simboli

$$\chi_0(n) \ , \ \chi_1(n) \ , \ \chi_2(n) \ , \ \ldots \ , \ \chi_{\varphi(h^\varpi)-1} \ ,$$

o, se importa mettere in vista il modulo, con

$$\chi_0(n, \text{mod. } h^\varpi) \ , \ \chi_1(n, \text{mod. } h^\varpi) \ , \ \chi_2(n, \text{mod. } h^\varpi) \ , \ \ldots \ , \ \chi_{\varphi(h^\varpi)-1}(n, \text{mod. } h^\varpi) \ .$$

È facile vedere che, se si cambiasse la radice primitiva scelta, i caratteri non farebbero che permutarsi fra loro. Infatti sia g_1 un'altra radice primitiva della congruenza

$$y^{\varphi(h^\varpi)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } h^\varpi) \ ,$$

e sia, secondo tale scelta, γ l'indice di g_1 sarà

$$g_1{}^\gamma \equiv g \qquad (\text{mod. } h^\varpi) \ ,$$

e quindi

$$g_1^{\gamma\nu} \equiv g^\nu \equiv n \qquad (\text{mod. } h^\varpi) ;$$

sicchè $\gamma\nu$ sarà congruo al nuovo indice di n secondo $\varphi(h^\varpi)$. I nuovi caratteri di n saranno perciò

$$\omega_0^{\gamma\nu} , \omega_1^{\gamma\nu} , \omega_2^{\gamma\nu} , \ldots , \omega_{\varphi(h^\varpi)-1}^{\gamma\nu} ,$$

o anche

$$\omega_0^\nu , \omega_\gamma^\nu , \omega_{2\gamma}^\nu , \ldots , \omega_{[\varphi(h^\varpi)-1]\gamma}^\nu ,$$

Ora è facile vedere che γ è primo con $\varphi(h^\varpi)$, giacchè se avessero un fattor comune δ, elevando la congruenza $g_1^\gamma \equiv g$ alla potenza $\frac{\varphi(h^\varpi)}{\delta}$, s'avrebbe

$$1 \equiv g^{\frac{\varphi(h^\varpi)}{\delta}} \qquad (\text{mod. } h^\varpi),$$

e g non sarebbe più radice primitiva.

Or, come è noto, gl' indici a piedi delle ω, quando superano $\varphi(h^\varpi)$ possono essere rimpiazzati dai resti della loro divisione per $\varphi(h^\varpi)$, e poichè γ è primo con $\varphi(h^\varpi)$, i numeri

$$0 , \gamma , 2\gamma , \ldots , [\varphi(h^\varpi) - 1]\gamma$$

divisi per $\varphi(h^\varpi)$ dànno in un cert'ordine i numeri

$$0 , 1 , 2 , \ldots , \varphi(h^\varpi) - 1 ,$$

e quindi i caratteri nuovi non sono che gli antichi permutati.

Poichè

$$\omega_0 = 1 \quad , \quad \omega_{\frac{1}{2}\varphi(h^\varpi)} = -1 ,$$

così

$$\chi_0(n) = 1 \quad , \quad \chi_{\frac{1}{2}\varphi(h^\varpi)}(n) = (-1)^\nu$$

saranno certamente reali, qualunque sia n. Gli altri, in generale complessi, potranno assumere valori reali per speciali valori di n. Poichè le radici ω sono due a due coniugate e inverse, i caratteri non sempre reali saranno due a due inversi, e, se non reali, conjugati. I reali hanno per inversi sè stessi. Il carattere $\chi_0(n)$ si dice *principale*.

Se $n = -1$, risulta $\nu = \frac{1}{2}\varphi(h^\varpi)$, quindi

$$\chi_0 = \chi_2 = \chi_4 = \cdots = \chi_{\varphi(h^\varpi)-2} = 1$$

e

$$\chi_1 = \chi_3 = \chi_5 = \cdots = \chi_{\varphi(h^\varpi)-1} = -1 .$$

Dunque in quanto al numero -1, qualsiasi carattere (modulo h^{ϖ}) ha il valore $+1$ o -1.

Frai caratteri d'un numero n rispetto al modulo h^{ϖ} ve n' ha di quelli, che sono anche caratteri dello stesso numero rispetto ai moduli $h^{\varpi-\gamma}$ $(\gamma=1,2,3,\ldots,\varpi-1)$.

Questi si chiamano caratteri *improprii* rispetto al modulo h^{ϖ}; quelli che restano, quando si sono soppressi tutti i caratteri improprii, si dicono caratteri *proprii.*

Per dimostrare l'esistenza dei caratteri improprii osservo primamente che la scelta di g può esser fatta in modo che essa sia radice primitiva rispetto a qualunque potenza del numero primo h (Serret, Cours d'Algèbre supérieure, T. II, p. 78); perciò gl' indici ν, ν_1 di n rispetto ai moduli h^{ϖ}, $h^{\varpi-\gamma}$ saranno congrui rispetto al modulo $\varphi(h^{\varpi-\gamma})$.

D'altra parte le radici

$$\pi_0\,,\ \pi_1\,,\ \pi_2\,,\ \ldots\,,\ \pi_{\varphi(h^{\varpi-\gamma})-1}$$

dell'equazione

$$x^{\varphi(h^{\varpi-\gamma})}=1$$

si trovano anche fra le radici

$$\omega_0\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2\,,\ \ldots\,,\ \omega_{\varphi(h^{\varpi})-1}$$

dell'equazione

$$x^{\varphi(h^{\varpi})}=1\,,$$

e quindi i caratteri

$$\pi_0^{\nu_1}\,,\ \pi_1^{\nu_1}\,.\ \pi_2^{\nu_1}\,,\ \ldots\,,\ \pi_{\varphi(h^{\varpi-\gamma})-1}^{\nu_1}$$

si trovano tutti frai caratteri

$$\omega_0^{\nu}\,,\ \omega_1^{\nu}\,,\ \omega_2^{\nu}\,,\ \ldots\,,\ \omega_{\varphi(h^{\varpi})-1}^{\nu}\,.$$

I caratteri improprii rispetto a h^{ϖ} sono perciò tutti i caratteri rispetto a $h^{\varpi-1}$, essi dunque sono in numero di $\varphi(h^{\varpi-1})$; quindi i caratteri proprii rispetto a h^{ϖ} sono in numero di

$$\varphi(h^{\varpi})-\varphi(h^{\varpi-1})=h^{\varpi-1}(h-1)-h^{\varpi-2}(h-1)=h^{\varpi-2}(h-1)^2\,.$$

Dei $\varphi(h^{\varpi-1})$ caratteri improprii ve ne sono $h^{\varpi-3}(h-1)^2$ proprii rispetto al modulo $h^{\varpi-1}$, $h^{\varpi-4}(h-1)^2$ proprii rispetto a $h^{\varpi-2}$, e così continuando $h(h-1)^2$ proprii rispetto a h^3, $(h-1)^2$ rispetto a h^2, e $h-1$ rispetto a h. E per verifica

$$h^{\varpi-2}(h-1)^2+h^{\varpi-3}(h-1)^2+h^{\varpi-4}(h-1)^2+\cdots+h(h-1)^2+(h-1)^2+(h-1)$$

$$=(h-1)^2\,\frac{h^{\varpi-1}-1}{h-1}+(h-1)=h^{\varpi-1}(h-1)=\varphi(h^{\varpi})\,.$$

56. In secondo luogo il modulo sia la potenza β^{ma} di 2, e quindi sia n un numero dispari qualunque. L'esponente β va supposto $\geqq 2$, perchè non vi son caratteri secondo il modulo 2.

Può allora dimostrarsi (Lejeune Dirichlet, Opera citata, p. 333) che esiste sempre un numero α scelto frai numeri 0 e 1, e con numero λ scelto fra $0, 1, 2, \ldots, 2^{\beta-2}-1$, tali che si abbia

$$n \equiv (-1)^{\alpha} . 5^{\lambda} \qquad (\text{mod. } 2^{\beta}).$$

Essi sono gl' *indici* di n relativamente al modulo 2^{β}.

Se ora si denotano con τ_0, τ_1 le radici dell'equazione $x^2=1$, cioè se $\tau_0=1$, $\tau_1=-1$, e con $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{2^{\beta-2}-1}$ le radici dell'equazione

$$x^{2^{\beta-2}}=1,$$

cioè se

$$\eta_r = \cos\frac{2r\pi}{2^{\beta-2}} + i \operatorname{sen}\frac{2r\pi}{2^{\beta-2}}, \quad (r=0, 1, 2, \ldots, 2^{\beta-2}-1),$$

i numeri

$$\tau_0^{\alpha}\eta_0^{\lambda}, \tau_0^{\alpha}\eta_1^{\lambda}, \ldots, \tau_0^{\alpha}\eta_{2^{\beta-2}-1}^{\lambda}, \tau_1^{\alpha}\eta_0^{\lambda}, \tau_1^{\alpha}\eta_1^{\lambda}, \ldots, \tau_1^{\alpha}\eta_{2^{\beta-2}-1}^{\lambda}$$

sono i caratteri del numero n secondo il modulo 2^{β}.

In particolare, se $\beta=2, \lambda=0$, non vi sono che due caratteri

$$\chi_0=\tau_0^{\alpha}=1, \quad \chi_1=\tau_1^{\alpha}=(-1)^{\alpha}.$$

Se $\beta=3$, vi sono quattro caratteri

$$\chi_0=\tau_0^{\alpha}\eta_0^{\lambda}, \chi_1=\tau_0^{\alpha}\eta_1^{\lambda}, \chi_2=\tau_1^{\alpha}\eta_0^{\lambda}, \chi_3=\tau_1^{\alpha}\eta_1^{\lambda};$$

poichè

$$\tau_0=\eta_0=1, \quad \tau_1=\eta_1=-1,$$

i quattro caratteri sono tutti reali, e propriamente

$$\chi_0=1, \chi_1=(-1)^{\lambda}, \chi_2=(-1)^{\alpha}, \chi_3=(-1)^{\alpha+\lambda}.$$

Questi, che compariscono qui come caratteri rispetto al modulo 8, sono, come fra poco si vedrà, i caratteri certamente reali rispetto a qualunque potenza più elevata di 2.

Frai caratteri d'un numero n rispetto al modulo 2^{β} ve ne ha di quelli, che sono anche caratteri rispetto al modulo $2^{\beta-\gamma}(\gamma=1, 2, \ldots, \beta-2)$, e questi si chiamano i caratteri improprii rispetto al modulo 2^{β}, per distinguerli dai rimanenti detti proprii.

Per dimostrarne l'esistenza osservo che se si ha

$$n \equiv (-1)^{\alpha} . 5^{\lambda} \qquad (\text{mod. } 2^{\beta})$$

ed

$$n \equiv (-1)^{\alpha'} . 5^{\lambda'} \qquad (\text{mod. } 2^{\beta-\gamma})$$

si avrà

$$(-1)^{\alpha-\alpha'} . 5^{\lambda-\lambda'} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2^{\beta-\gamma})$$

e quindi, perchè qui l'esponente di -1 scorre per un sistema completo di resti rispetto al modulo 2, e quello di 5 per un sistema ccmpleto di resti rispetto al modulo $2^{\beta-\gamma-2}$, sarà

$$\alpha \equiv \alpha' \ (\text{mod. } 2); \qquad \lambda \equiv \lambda' \ (\text{mod. } 2^{\beta-\gamma-2}).$$

D'altra parte le radici

$$\rho_0 , \rho_1 , \rho_2 , \ldots , \rho_{2^{\beta-\gamma-2}-1}$$

dell'equazione

$$x^{2^{\beta-\gamma-2}} = 1$$

si trovano fra le radici

$$\eta_0 , \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_{2^{\beta-2}-1}$$

dell'equazione

$$x^{2^{\beta-2}} = 1 ;$$

quindi i caratteri

$$\tau_0^{\alpha'} \rho_0^{\lambda'} , \tau_0^{\alpha'} \rho_1^{\lambda'} , \ldots , \tau_0^{\alpha'} \rho_{2^{\beta-\gamma-2}-1}^{\lambda'} , \tau_1^{\alpha'} \rho_0^{\lambda'} , \tau_1^{\alpha'} \rho_1^{\lambda'} , \ldots , \tau_1^{\alpha'} \rho_{2^{\beta-\gamma-2}-1}^{\lambda'}$$

si trovano frai caratteri

$$\tau_0^{\alpha} \eta_0^{\lambda} , \tau_0^{\alpha} \eta_1^{\lambda} , \ldots , \tau_0^{\alpha} \eta_{2^{\beta-2}-1}^{\lambda} , \tau_1^{\alpha} \eta_0^{\lambda} , \tau_1^{\alpha} \eta_1^{\lambda} , \ldots , \tau_1^{\alpha} \eta_{2^{\beta-2}-1}^{\lambda} .$$

I caratteri improprii rispetto a 2^{β} sono dunque tutti i caratteri rispetto a $2^{\beta-1}$: essi sono perciò in numero di $2^{\beta-2}$: quindi i proprii sono $2^{\beta-1} - 2^{\beta-2} = 2^{\beta-2}$.

Dei $2^{\beta-2}$ caratteri improprii $2^{\beta-3}$ sono proprii rispetto a $2^{\beta-1}$, $2^{\beta-4}$ sono proprii rispetto a $2^{\beta-2}$, e così via, 2 sono proprii rispetto a 2^3, e 2 sono caratteri rispetto a 2^2, e per verifica

$$2^{\beta-2} + 2^{\beta-3} + 2^{\beta-4} + \ldots + 2 + 2 = 2^{\beta-1} .$$

Se $n = -1$, si ha $\alpha = 1$, $\lambda = 0$, quindi

$$\chi_0 = \chi_1 = \cdots = \chi_{2^{\beta-2}-1} = 1$$

e

$$\chi_{2^{\beta-2}} = \chi_{2^{\beta-2}+1} = \cdots = \chi_{2^{\beta-1}-1} = -1 .$$

Dunque anche qui, trattandosi del numero -1, qualsiasi carattere ha il valore $+1$ o -1.

In quanto a un numero qualunque n, quattro caratteri sono certamente reali, e sono quelli relativi al modulo 2^3; gli altri, in generale complessi, possono assumere valori reali per speciali valori di n.

57. — Passiamo ora a definire i caratteri d'un numero n rispetto ad un modulo qualunque (primo con n) M, che decomposto in fattori primi dia

$$M = 2^{\beta} h_1^{\varpi_1} h_2^{\varpi_2} \dots h_m^{\varpi_m} .$$

Essi restano individuati dalla eguaglianza

$$\chi(n\,,\ \text{mod. M}) = \chi(n\,,\ \text{mod. } 2^{\beta}) . \chi(n\,,\ \text{mod. } h_1^{\varpi_1}) \dots \chi(n\,,\ \text{mod. } h_m^{\varpi_m}) . \tag{70}$$

Poichè i simboli, che figurano come fattori al secondo membro, hanno rispettivamente

$$\varphi(2^{\beta})\ ,\ \varphi(h_1^{\varpi_1})\ ,\ \dots\ ,\ \varphi(h_m^{\varpi_m})$$

valori diversi, così il primo membro avrà

$$\varphi(2^{\beta}) . \varphi(h_1^{\varpi_1}) \dots \varphi(h_m^{\varpi_m}) = \varphi(M)$$

valori diversi, che indicherò con

$$\chi_0(n\,,\ \text{mod. M})\ ,\ \chi_1(n\,,\ \text{mod. M})\ ,\ \dots\ ,\ \chi_{\varphi(M)-1}(n\,,\ \text{mod. M}).$$

Se al secondo membro di (70) per tutti i caratteri, che vi figurano, si prendono i caratteri principali, il primo membro avrà il valore $+1$ per qualunque n, e sarà quello indicato da $\chi_0(n,\ \text{mod.M})$, cioè il carattere *principale.*

Se soltanto per alcuni dei caratteri si scelgono i caratteri principali, il carattere risultante si dice *incompleto.*

Se un carattere non è nè principale nè incompleto, ma contiene come fattore uno o più caratteri improprii rispetto ai moduli componenti, è esso stesso un carattere *improprio* rispetto al modulo M.

I rimanenti caratteri si chiamano *proprii.*

Un carattere improprio rispetto ad M sarà proprio rispetto a un divisore di M.

Dato un carattere del numero n, se si forma il carattere con radici delle equazioni binomie tutte conjugate di quelle, che hanno contribuito a formare il primo, si ha il carattere *conjugato* al primo.

Poichè le radici conjugate delle equazioni binomie sono fra loro reciproche, due caratteri conjugati risultano, quale che sia il numero n, fra loro *inversi*, e si sogliono chiamare anche *opposti.*

Un carattere opposto a sè stesso chiamasi *ambiguo.*

È facile vedere che un carattere ambiguo è reale. Infatti se $\tau^{\alpha}\eta^{\lambda}\omega^{\nu}\ldots$ è un carattere ambiguo, risulta

$$\tau^{2\alpha}\eta^{2\lambda}\omega^{2\nu}\ldots=1 \ ,$$

quali che siano $\alpha, \lambda, \nu, \ldots$, e posto successivamente

$$\alpha=1 \ , \ \lambda=0 \ , \ \nu=0 \ , \ \ldots ;$$
$$\alpha=0 \ , \ \lambda=1 \ , \ \nu=0 \ , \ \ldots ;$$
$$\alpha=0 \ , \ \lambda=0 \ , \ \nu=1 \ , \ \ldots ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si ha

$$\tau=\pm 1 \ , \ \eta=\pm 1 \ , \ \omega=\pm 1 \ , \ \ldots$$

e il carattere ambiguo diventa

$$(\pm 1)^{\alpha}.(\pm 1)^{\lambda}.(\pm 1)^{\nu}\ldots \ ,$$

e quindi è reale.

58. Finalmente enuncio quattro proposizioni, che facilissimamente si dimostrano, e che fanno gran giuoco nelle applicazioni.

a) Si ha

$$\chi_r(n.)\chi_r(n')=\chi_r(nn') \ .$$

b) Se $n\equiv n'$, (mod. M), si ha

$$\chi_r(n)=\chi_r(n') \ .$$

c) Se $1, \mu_1, \mu_2, \ldots, M-1$ rappresentano il sistema dei numeri primi con M ed inferiori ad M, si ha

$$\chi_r(1)+\chi_r(\mu_1)+\chi_r(\mu_2)+\cdots+\chi_r(M-1)=0 \ , \quad \text{se} \quad r\neq 0 \tag{71}$$

$$\chi_0(1)+\chi_0(\mu_1)+\chi_0(\mu_2)+\cdots+\chi_0(M-1)=\varphi(M) \ . \tag{71'}$$

d) Si ha

$$\chi_0(n)+\chi_1(n)+\chi_2(n)+\cdots+\chi_{\varphi(M)-1}(n)=0 \quad \text{se} \quad n \text{ non}\equiv 1 \ , \text{ mod. M} \tag{72}$$

mentre

$$\chi_0(n)+\chi_1(n)+\chi_2(n)+\cdots+\chi_{\varphi(M)-1}(n)=\varphi(M) \quad \text{se} \quad n\equiv 1 \ , \text{ mod. M.} \tag{72'}$$

Queste ultime possono porsi sotto altra forma, che sarà utile fra non molto, vale a dire

$$\frac{\chi_0(n)}{\chi_0(n')}+\frac{\chi_1(n)}{\chi_1(n')}+\cdots+\frac{\chi_{\varphi(M)-1}(n)}{\chi_{\varphi(M)-1}(n')}\begin{cases}=0 & \text{se } n \text{ non}\equiv n' \\ =\varphi(M) & \text{se } n \ \ \equiv n'\end{cases}\text{(mod. M).} \tag{73, 73'}$$

59. — Dopo ciò, scelto un determinato carattere χ secondo il modulo M, si prenda a considerare la serie

$$\varsigma(s,\chi)=\sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(p_i)}{p_i^s} \ ,$$

dove il Σ è munito d'un apice per indicare che la sommatoria è estesa a tutti i numeri primi *non divisori* del modulo M.

Supposto che la variabile s sia reale, la serie dei moduli si riduce a

$$\varsigma(s, \chi_0) = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p_i^s},$$

la quale (V, 31) è convergente per $s > 1$; sicchè per $s > 1$ è pure convergente $\varsigma(s, \chi)$.

La serie considerata nel § 53 è caso particolare di $\varsigma(1, \chi)$, il modulo M essendo stato scelto eguale a 4. Ciò premesso, ad imitazione di quanto ha fatto per tal caso speciale, il Mertens comincia dal dimostrare che:

Il modulo della somma $\sum_{i=1}^{\Im(n)}{}' \chi(p_i) \frac{\log p_i}{p_i}$ *non può superare una determinabile costante* γ *per grande che sia* n.

Da ciò desume la convergenza della serie $\varsigma(1, \chi)$, e ne deduce quindi la formola

$$\sum_{i=1}^{\Im(n)} \frac{\chi(p_i)}{p_i} = \varsigma(1, \chi) + \frac{2\gamma\eta}{\log(n+1)}, \quad 0 < |\eta| < 1. \tag{74}$$

D'altronde indicando con H la somma dei reciproci dei numeri primi, che figurano in M, la (68) può scriversi

$$\sum_{i=1}^{\Im(n)}{}' \frac{\chi_0(p_i)}{p_i} = \log\log n + C - A - H + \rho.$$

Se ora formo un sistema con questa e con tutte le eguaglianze, che si ricavano applicando la (74) a tutti i caratteri non principali $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{\varphi(M)-1}$, moltiplico ordinatamente le equazioni del sistema per

$$\frac{1}{\chi_0(N)}, \frac{1}{\chi_1(N)}, \frac{1}{\chi_2(N)}, \ldots, \frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)},$$

e sommo; al primo membro, in virtù delle (73), (73') resterà soltanto il prodotto di $\varphi(M)$ per la somma dei reciproci dei numeri primi non superiori ad n, e compresi nella forma lineare $My + N$, quindi si potrà scrivere

$$\sum \frac{1}{q_i} = \frac{1}{\varphi(M)} \left\{ \log\log n + C - A - H + \sum_{j=1}^{\varphi(M)-1} \frac{\varsigma(1, \chi_j)}{\chi_j(N)} \right\} + \delta, \quad (q_i \equiv N, \bmod. M; q_i \leqq n)$$

δ indicando una quantità che s'annulla per $n = \infty$; e in conseguenza

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \sum \frac{1}{q_i} - \frac{1}{\varphi(M)} \log\log n \right\} = \frac{1}{\varphi(M)} \left\{ C - A - H - \sum_{j=1}^{\varphi(M)-1} \frac{\varsigma(1, \chi_j)}{\chi_j(N)} \right\}, \quad (q_i \equiv N, \bmod. M; q_i \leqq n).$$

Termino coll' annunzio che in prosieguo alcuni problemi di questo Capitolo saranno ripresi in considerazione coll'intento di trovar valori non assintotici, ma completi (X, 83, 89; XI, 109; XII, 123, 124).

CAPITOLO VIII.

60. La memoria di Riemann. La funzione $\zeta(s)$ per valori complessi della variabile. Suo prolungamento analitico. Valori di $\zeta(s)$ per $s = -2m, 0, 2m, -(2m-1), 2m-1$. — Il metodo inaugurato da Tchebichef per lo studio della funzione $\theta(x)$ è senza dubio interessante; ma esso oltre ad ammettere, come postulato, l'esistenza di alcuni limiti, non fornisce che espressioni assintotiche, le quali non possono addirittura considerarsi come formole d'approssimazione per valori finiti della variabile.

Più importante è certo lo studio, che si propone di rinvenire una formola, che dia l' espressione completa del valore di $\theta(x)$. Giacchè questa deve contenere implicitamente in sè la spiegazione di quanto ancora c'è di misterioso nella distribuzione dei numeri primi.

Il problema è arduo, giacchè la funzione $\theta(x)$ presenta il carattere di avere un numero infinito di discontinuità, e i punti in cui queste si verificano, cioè i numeri primi, non debbono apparire esplicitamente nella formola da ricavarsi (cfr. I, 1). Rimanendo latenti tali discontinuità è d'uopo, per dedurre in modo inattaccabile il risultato finale, maneggiare le formole colle più grandi precauzioni, onde non incorrere in trasformazioni non lecite.

Colla memoria

Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, November 1859; oppure *Gesammelte math. Werke*, 2ª ediz., 1892, p. 145, o anche opuscolo a parte contenente la traduzione francese di L. Laugel, 1895,

Riemann dette un valido impulso alla soluzione della quistione. Non pervenne però a stabilire il risultato con metodo inattaccabile, anzi egli stesso notò lacune nei suoi ragionamenti. Nè dalla sua formola s'è potuto finora trarre partito per calcolare esattamente il valore della funzione, o almeno per determinarne un valore approssimato insieme ai limiti frai quali è compreso l'errore. Ma oggi non si ha più alcun dubio sulla validità della sua formola, poichè essa è stata recentemente controllata con procedimento, che è al sicuro di qualunque critica.

Comincio in questo Capitolo a render conto del lavoro di Riemann, accompagnandolo cogli sviluppi atti ad agevolarne la comprensione, e colle varianti escogitate per semplificare ed ampliare, o conducenti a rettificazioni di minor conto. Nel Capitolo seguente andrò esponendo i lavori diretti a colmare le lacune più gravi.

Ora qui più che mai è d'uopo ch' io invochi la indulgenza di chi ha la pazienza di seguire il mio lavoro. Io non considero questo come una monografia, che dispensi il lettore dallo studio di tutte le pubblicazioni anteriori sull'argomento. Se diversamente facessi non terrei conto della raccomandazione racchiusa nel Pro-

gramma di concorso circa la forma compendiosa. Io stimo invece dover fare un lavoro di sintesi. Quando l'ometter dimostrazioni o sviluppi non porta danno alla chiara comprensione dei risultati, io mi limito a rimandare esplicitamente o implicitamente il lettore ai lavori originali. Invece riferisco tutto, anche abbondando in spiegazioni, quando il tacere, o l'esser conciso, può toglier luce a idee che nel seguito importa che il lettore abbia chiaramente percepite, o quando gli sviluppi debbano servire di sostrato a concetti nuovi, che intendo di introdurre.

Questo criterio, fin qui seguito, mi consiglia la seguente modalità nel continuare la compilazione. Nella classica memoria di Riemann e in tutte quelle, che ad essa metton capo, si ricorre, più largamente che prima non s'era fatto, all'Analisi, e specialmente alla Teoria delle funzioni di variabile complessa, ciò nello intento di costruire gli elementi analitici, che entrar dovranno nella formola, che si ha in vista. Vi è dunque in esse una parte di Analisi, che può stare a sè, anche prescindendo dalla sua applicazione alla Teoria dei numeri. Di questa parte dunque, generalmente, riferirò solo i concetti iniziali e i risultati. Riprenderò ad esporre i ragionamenti quando verrò ad applicare i precedenti enunciati alla questione sui numeri primi, oggetto del lavoro.

Gli elementi analitici sopra nominati sono forniti dallo studio della funzione rappresentata dalla serie

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots = \sum_m \frac{1}{m^s},$$

la quale (V, 29) gode della proprietà rinvenuta da Eulero ed espressa dalla eguaglianza

$$(17) \qquad \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = \sum_m \frac{1}{m^s}.$$

Ora identità del genere di questa, del genere della (16) fornita dal teorema di Tchebichef esposto nel [IV, 26, h)], debbono essere, nella presente teoria, di molto interesse. Infatti, nella ricerca della espressione della funzione $\theta(x)$, i numeri primi, dovendo essi stessi venir considerati come ignote, una eguaglianza, che trasforma una funzione dei soli numeri primi, in una conosciuta funzione di tutti i numeri della serie naturale, deve riuscire un potente istrumento.

La funzione $\zeta(s)$, nel Capitolo V, fu pensata soltanto per valori reali della variabile s, ma è facile vedere che tanto la serie, quanto il prodotto infinito, per valori complessi di s, tali che la parte reale di s (che ad imitazione di molti rappresenterò con $\mathcal{R}(s)$) superi $1+\varepsilon$, ε essendo una quantità positiva arbitrariamente piccola, convergono assolutamente ed uniformemente, e si mantengono eguali: sicchè la serie, e l'inverso del prodotto rappresentano una funzione olomorfa della variabile complessa s nella regione del piano di questa a destra della parallela all'asse immaginario alla distanza 1 da quest'asse, la quale funzione non si annulla mai in tale regione, perchè il prodotto è convergente.

La memoria di Riemann comincia colla ricerca del prolungamento anali-

tico della funzione indicata dalla serie suddetta e rinviene una funzione uniforme, che mentre coincide con $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ in tutta la parte del piano, in cui questa è convergente, rimane definita in tutta il piano.

Per far ciò s' immagini tracciato nel piano della variabile complessa $z = x + iy$ un contorno C formato 1° della parte dell'asse reale positivo da $+\infty$ ad un punto A a distanza ε dall origine O, 2° dalla circonferenza descritta con centro O e raggio ε, 3° della parte dell'asse reale positivo da A fino all' ∞, e si consideri l' integrale esteso a questo contorno

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}\,dz}{e^z - 1}\,.$$

Questo, a causa della funzione politropa $(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$, ha infiniti valori, ma se ne fissa uno supponendo che, allorquando z parte da $+\infty$, si ha $\log(-z) = \log z - i\pi$, $\log z$ essendo reale.

Ciò premesso per mezzo della definizione della funzione $\Gamma(s)$ si ricava immediatamente

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x - 1}\,, \tag{75}$$

e quindi agevoli trasformazioni conducono all'eguaglianza

$$\zeta(s) = i\,\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi} \int_C \frac{(-z)^{s-1}\,dz}{e^z - 1}\,.$$

Ora il secondo membro di questa definisce, per qualunque valore della variabile complessa s, una funzione uniforme, la quale eccetto che nel punto $s = 1$, è dovunque finita; e si ha che il valor limite della funzione per $s = 1$ è ∞; ma il valor limite del prodotto della funzione per $s - 1$ è 1; quindi $s = 1$ è un polo semplice della funzione.

Intendendo da ora in poi con $\zeta(s)$ *non più la somma della serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$, *ma la sopradetta funzione uniforme,* si potrà conchiudere che $\zeta(s)$ estende la funzione $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ a tutto il piano, ossia ne dà il prolungamento analitico.

Un facile calcolo fa rinvenire i seguenti risultati, nei quali le B indicano, come al solito, i numeri bernoulliani,

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1} \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!} B_{2m}\,,\quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}\,,\quad \zeta(-2m) = 0\,,\quad \zeta[-(2m-1)] = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m}}{2m}\,. \tag{76}$$

Aggiungo che fino a poco fa mancavano formole, che dessero il valore della funzione $\zeta(s)$ per s intero positivo impari, ma a ciò ha provveduto la nota

KLUYVER — Sur les valeurs, que prend la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour s entier positif et impair. *Bulletin des sciences mathématiques.* T. XX, p. 116, 1896, nella quale l'autore ottiene delle formole ricorrenti per le $\zeta(2m-1)$, per ognuna delle quali si possono avere quattro espressioni; così egli ricava

$$\zeta(3) = 4\pi\left[\frac{1}{4!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k+4)!}\right] = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{1}{3!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{(2k+3)!}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{5}\left[\frac{1}{3!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^{2k}B_{2k}}{(2k+3)!}\right] = \frac{2\pi}{7}\left[\frac{1}{2!} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^{2k}B_{2k}}{(2k+2)!}\right].$$

61. Altri modi dovuti ad Hermite e de la Vallée-Poussin per ottenere il suddetto prolungamento analitico. Espressione data da Piltz e Stieltjes per $\zeta(s)$. Valore di $\zeta'(o)$. Espressione data da Lerch per $\zeta(s)$. — L'importanza della funzione $\zeta(s)$ in tutta la teoria dei numeri, ed in ispecie nella quistione in esame, mi inducono a far qui cenno di due altri metodi più semplici per estendere detta funzione, uno dovuto ad HERMITE, l'altro a DE LA VALLÉE-POUSSIN. Il primo matematico nella

Note au sujet de la communication de M.r Stieltjes: Sur une fonction uniforme. *Comptes rendus des s. d. l'A. d. s.* T. CI, p. 112, 1885 parte dalla (75), e indicando con ω una costante positiva arbitraria ma minore di 2π, trasforma la $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}$ in guisa da pervenire a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^{\omega}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} + \int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}\right). \tag{77}$$

Fissata, analogamente a quanto fu fatto sopra, la determinazione della potenza x^{s-1}, i due integrali, che compariscono fra le parentesi rappresentano due funzioni uniformi, e il secondo ha un valor finito quale che sia il numero complesso s, e rappresenta una funzione olomorfa.

Il primo degl'integrali avendo per limite inferiore 0, non ha più significato, quando la parte reale di s non supera 1, e della funzione da esso rappresentata occorre trovare il prolungamento analitico. Per far ciò Hermite deduce

$$\int_0^{\omega}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1} = \omega^{s-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{\omega}{2s} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\zeta(2n)}{2n+s-1}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{2n}\right].$$

Essendo la serie, che figura al secondo membro, convergente per qualunque valore di s, la funzione, rappresentata in una parte del piano dall'integrale $\int_0^{\omega}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}$, resta estesa a tutto il piano.

Osservando infine che il fattore $\frac{1}{\Gamma(s)}$, che comparisce al secondo membro di (77) può scriversi

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{Cs} s \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \right],$$

si vede che unico polo della funzione, che figura al secondo membro è $s=1$, e si ritrovano i valori di $\zeta(-2m)$, e $\zeta[-(2m-1)]$ forniti dalle (76).

De la Vallée-Poussin, nel N. 3 del lavoro, che in seguito avrò spesso occasione di citare,

Recherches analytiques sur la Théorie des nombres premiers. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, t. XX, 1896,

comincia collo estendere la funzione alla striscia del piano della variabile complessa s racchiusa fra la parallela all'asse immaginario alla distanza 1, e quest'asse medesimo.

Ciò si fa subito osservando che

$$\frac{1}{(m+1)^s} = \int_0^1 \frac{dx}{(m+x)^s} - s\int_0^1 \frac{x\,dx}{(m+x)^{s+1}}$$

e

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(m+x)^s} = \frac{1}{s-1},$$

quindi

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = -\frac{s}{1-s} - s\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x\,dx}{(m+x)^{s+1}}.$$

La serie, che figura al secondo membro, essendo assolutamente convergente, sempre che la parte reale di s sia positiva, la funzione $\zeta(s)$ resta definita in tutta la regione a destra dell'asse immaginario. La relazione funzionale, di cui parlerò nel § seguente, fra $\zeta(1-s)$ e $\zeta(s)$, presa come definizione nella parte rimanente del piano, serve al Poussin per definire ivi la funzione, giacchè esprime qualunque $\zeta(s)$ con $\mathcal{R}(s)$ negativa per mezzo di una $\zeta(s)$ con $\mathcal{R}(s)$ positiva.

Prima di andar oltre è bene notare un'altra forma di $\zeta(s)$, che alcune volte riesce utile. Applicando la formola sommatoria di Mac-Laurin, si trova facilmente

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} = \zeta(s) + \frac{n^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^s} - B_2 \frac{s}{2!}\frac{1}{n^{s+1}} - B_4 \frac{s(s+1)(s+2)}{4!}\frac{1}{n^{s+3}} - \dots,$$

donde

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right)$$

e

$$\zeta'(s) = \lim_{n=\infty} \left(-\sum_{m=1}^{n} \frac{\log m}{m^s} - n^{1-s} \frac{1-(1-s)\log n}{(1-s)^2} + \frac{1}{2}\frac{\log n}{n^s} \right),$$

formole valevoli per qualunque s con parte reale non negativa, la penultima delle quali fu trovata da PILTZ e STIELTJES in lavori, che citerò in seguito. Dall' ultima si trae

$$\zeta'(0) = \lim_{n=\infty}\left[-\log(n!) - n + n\log n + \frac{1}{2}\log n\right],$$

ossia sostituendo per $\log(n!)$ il valore dato dalla formola di Stirling

$$\log(n!) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{\eta}{12n}, \quad (0 < \eta < 1)$$

si ricava

$$\zeta'(0) = \lim_{n=\infty}\left[-\frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{\eta}{12n}\right] = -\frac{1}{2}\log(2\pi), \tag{78}$$

formola, che a suo tempo occorrerà ricordare.

Più recentemente nella comunicazione

LERCH — Sur une intégrale, qui représente la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Chicago Congress. Mathem. papers.* I, p. 165, 1895

è stata data la seguente formola valevole per ciascun valore finito di s

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\,\frac{2^{2s-2}}{2^s-1} - \frac{2^{2s-1}}{2^s-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} s\varphi - e^{-\frac{1}{2}\pi\operatorname{tg}\varphi}\cos s\varphi}{1 + e^{\pi\operatorname{tg}\varphi}}\cos^{s-2}\varphi\, d\varphi .$$

62. Relazione funzionale di Schlömilch. — Ritornando alla memoria di Riemann, in essa l'autore, dopo avere estesa la funzione ζ a tutto il piano, passa, mediante un calcolo di residui, a stabilire una relazione funzionale verificata dalla ζ. Supposto $\mathcal{R}(s) < 0$, deduce che si ha

$$\zeta(s) = (2\pi)^{s-1} . 2\cos(s-1)\frac{\pi}{2} . \Gamma(1-s)\zeta(1-s) . \tag{79}$$

Questa importante relazione era già stata trovata sotto altra forma da SCHLÖMILCH (Ueber eine Eigenschaft gewisser Reihen. *Zeitschrift für Mathem. und Phys.* Jahrgang III, p. 130, 1858). La dimostrazione, che se ne trova nella memoria di Riemann, suppone negativa la parte reale di s; ma pel noto teorema della teoria delle funzioni di variabile complessa:

Se due funzioni hanno gli stessi valori in una qualunque area della loro comune regione di continuità, o lungo una qualunque linea di questa regione, purchè questa linea non sia infinitamente corta, allora le due funzioni hanno lo stesso valore in tutti i punti della loro comune regione di continuità,

(FORSYTH — Theorie of Functions of a complex Variable, p. 60), la relazione stessa può ritenersi vera in tutto il piano.

Facendo uso delle proprietà della funzione Γ espresse dalle eguaglianze

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} s\pi} \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + s\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2s-1}} \cdot \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)} ,$$

la (79) può trasformarsi in

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)\,,$$

laonde resta dimostrato che

a) *L'espressione*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

resta invariata, quando vi si muta s *in* 1 — s.

b) *Evidentemente lo stesso avviene dell'altra*

$$\frac{s(s-1)}{2}\,\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\,.$$

Mediante il cambiamento di variabile $s=\frac{1}{2}+e^{i\pi\tau}$, posto

$$F(\tau)=\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e^{i\pi\tau}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\pi\tau}\zeta\left(\frac{1}{2}+e^{i\pi\tau}\right)\,,$$

la predetta relazione funzionale assume la forma dell'equazione alle differenze finite

$$F(\tau)=F(\tau+1)\,.$$

(Confronta Vecchi — Sulla funzione $\zeta(s)$ di Riemann. Parte I, p. 22, Paris, 1899 a 1900).

63. Distribuzione nel piano degli zeri di $\zeta(s)$. Teoremi di Hadamard e de la Vallée-Poussin. — Giacchè il polo e gli zeri della funzione $\zeta(s)$ sono quei tali elementi analitici, per mezzo dei quali, si costruirà l'espressione per la totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato, così è bene che, fin da ora, cominci a raccogliere quanto, da ciò che precede, in ordine a questi zeri, può dedursi, cioè:

Radici reali $\zeta(s)=0$ sono i numeri $-2, -4, -6, \ldots, -2m, \ldots$, e non ve ne sono altre;

In quanto alle radici non reali non ve ne sono nelle due regioni, in cui $\mathfrak{R}(s)>1$, $\mathfrak{R}(s)<0$, e se un punto della striscia, dove $0<\mathfrak{R}(s)<1$, è radice, lo sarà pure il punto simmetrico rispetto all' asse reale, e quello simmetrico rispetto al punto $s=\frac{1}{2}$.

Credo inoltre opportuno qui riferire la proposizione da non molto stabilita, e ben più importante di quello, che a prima vista non paja, che sulla retta $\mathfrak{R}(s)=1$ non vi sono zeri della funzione $\zeta(s)$. Questo teorema trovasi dimostrato nelle note:

Hadamard — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* t. CXXII, p. 1470; t. CXXIII, p. 93, 1896.

Idem — Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences aritmétiques. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIV, p. 199, 1896,

e nel lavoro già citato al § 61 di DE LA VALLÉE-POUSSIN, il quale nella III parte a p. 117 espone il più semplice frai ragionamenti sinoggi fatti onde pervenire alla conchiusione in parola.

Con questi scritti va connesso l'ultimo paragrafo della dissertazione di VON SCHAPER, della quale parlerò a § 74, e la nota:

MERTENS — Ueber eine Eigenschaft der Riemann'schen ζ-Function *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien Math. Nat. Classe.* CVII Bd., p. 1429, 1898.

È importante però notare, e in prosieguo (cfr. X, 85) se ne vedrà la ragione, che neppure colle dimostrazioni, che nelle indicate memorie si leggono, resta escluso che vi possa essere una infinità di radici di $\zeta(s)$ accostantisi indefinitamente alla retta $\Re(s) = 1$, per valori crescenti senza limite del loro modulo; cioè non è escluso che la parte reale di una infinità di radici possa essere quanto si voglia poco differente a 1.

Il recentissimo lavoro

DE LA VALLÉE-POUSSIN — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. *Mémoires couronnés et autres mémoires de l'Academie Royale des sciences, d. l. et d. b. a. de Belgique,* t. LIX, 1899,

arreca un nuovo contributo alle conoscenze, che si hanno, sugli zeri della funzione $\zeta(s)$. Ivi per la parte reale delle radici non reali di $\zeta(s)$ si trova un limite superiore più basso che 1. Questo limite è funzione del coefficiente di i nella parte immaginaria. Si dimostra in vero che, se $\zeta(a + bi) = 0$, e $b \geqq 574$ si ha

$$a < 1 - \frac{0{,}032\,821\,4}{\log b - \log 44{,}973\,7}.$$

Se $b < 574$ il valore di a sarà al massimo eguale a quello, che fornisce questa relazione per $b = 574$.

Ed inoltre se $b \geqq 705$ si ha

$$a < 1 - \frac{0{,}034\,666}{\log b - \log 47{,}886}.$$

Per $b < 705$, il valore di a sarà inferiore al valore che dà questa formola per $b = 705$.

64. La funzione $\xi(t)$. Prima lacuna della memoria di Riemann. — Per lo studio di queste radici complesse racchiuse nella striscia predetta, la effettiva esistenza delle quali è accertata in altro lavoro, di cui in seguito sarà discorso, (cfr. IX, 75), Riemann credette bene sostituire alla funzione $\zeta(s)$ un'altra suggerita dall'enunciato b) del § 62.

Posto

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x},$$

si deducono dopo una serie di passaggi le eguaglianze

$$\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \Psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)dx$$

$$=2\int_1^\infty\left(x^{\frac{s-1}{2}}+x^{-\frac{s}{2}}\right)\frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right]}{dx}dx .$$

Se si pone

$$s=\frac{1}{2}+ti ,$$

le due ultime espressioni si trasformano rispettivamente nelle due fra loro equivalenti

$$(80)\qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \Psi(x)x^{-\frac{3}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)dx ,\\[2ex] 4\int_1^\infty x^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}t\log x\right)\frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\Psi'(x)\right]}{dx}dx .\end{array}\right.$$

La funzione da esse rappresentata esiste ed è finita e continua in tutto il piano, e perciò, dovunque in questo, resta definita una funzione ξ della variabile complessa t, la quale ξ è legata alla ζ dalla relazione

$$(81)\qquad \xi(t)=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) .$$

Le espressioni (80) di ξ mostrano che questa può essere sviluppata in una serie convergente in tutto il piano e procedente secondo le potenne ascendenti di t^2, e perciò $\xi(t)$ è una funzione intera pari di t.

Richiamando quanto s'è detto circa gli zeri di $\zeta(s)$ si deduce senza difficoltà che la funzione $\xi(t)$, ossia $\xi\left[i\left(\frac{1}{2}-s\right)\right]$ non s'annulla che nei punti della striscia definita dalle ineguaglianze $0<\Re(s)<1$, nei quali s'annulla $\zeta(s)$. Ammesso che $\xi(t)$ abbia radici, e ricordando che essa è una funzione pari di t, si conchiude che le sue radici sono due a due opposte.

Per lo più le radici, la cui parte reale sia positiva, ordinate in modo che i loro moduli non decrescano mai, si sogliono indicare coi simboli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Sicchè tutte le radici di $\xi(t)=0$ sono $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \ldots$, e quindi tutte le radici non reali di $\zeta(s)=0$ sono

$$\frac{1}{2}\pm\alpha_1 i ,\ \frac{1}{2}\pm\alpha_2 i ,\ \frac{1}{2}\pm\alpha_3 i ,\ \ldots .$$

Or qui è uno dei passi oscuri della memoria di Riemann. Egli enuncia le proposizioni:

a) *Il numero delle radici di* $\xi(t)$, *delle quali la parte reale sia compresa fra* 0 *e un numero positivo* T *molto grande, è rappresentato approssimativamente dalla espressione*

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi};$$

b) *Tutte le radici di* $\xi(t)$ *sono reali*;

c) *La funzione intera* $\xi(t)$ *equivale al prodotto di fattori primarii senza alcun fattore esponenziale* $\xi(0)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\alpha_\nu^2}\right)$;

ma non dà che pochi cenni insufficienti delle dimostrazioni.

Gli enunciati *a)* e *c)* sono stati esattamente provati in lavori recenti, dei quali parlerò nel capitolo seguente. L'enunciato *b)* manca finoggi di dimostrazione rigorosa.

Dopo queste premesse la memoria procede alla soluzione del problema della determinazione della totalità dei numeri primi inferiori a un dato limite x *).

65. Introduzione della funzione $f(x)=\frac{\theta(x)+\vartheta(x)}{2}$ **in luogo di** $\theta(x)$, **e** $\vartheta(x)$, **e della** $f_1(x)=\frac{\theta_1(x)+\vartheta_1(x)}{2}$ **in luogo di** $\theta_1(x)$, **e** $\vartheta_1(x)$. **Espressione di** $f_1(x)$ **per mezzo di un integrale definito.** — Continuando ad indicare, come ho fatto finora, con $\theta(x)$, $\vartheta(x)$ ordinatamente le totalità dei numeri primi inferiori e di quelli non superiori ad x, e con $\theta_1(x)$ e $\vartheta_1(x)$ rispettivamente le somme

$$\theta(x)+\frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}})+\cdots\quad,\quad \vartheta(x)+\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}})+\cdots,$$

---

*) Basterà qui soltanto menzionare che della funzione $\zeta(s)$, la quale nel (Cap. XI, § 97) da un certo punto di vista verrà amplificata, ne sono state studiate varie altre generalizzazioni, che solo indirettamente interessano le ricerche, che qui si hanno in vista. Chi voglia seguirle consulti le memorie:

HURWITZ — Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen

$$F(s)=\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

die bei der Bestimmung der Classenzahlen binären quadratischer Formen auftreten. *Zeitschrift fur Math. u. Phys.* Jahrg. XXVII, p. 86. 1882.

LERCH — Sur la fonction $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{2k\pi ix}}{(w+k)^s}$. *Acta Mathematica*, t. XI, p. 19, 1887.

LIPSCHITZ — Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen. *Crelle Journal fur die r. u. a. Math.* Bd. CV, p. 127, 1889.

CAHEN — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, et sur des fonctions analogues. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure.* 3e série, t. XI, pag. 75, 1894.

MELLIN — Ueber eine Verallgemeinerung der Riemannschen Function $\zeta(s)$. *Acta Societatis scientiarum Fennicae*, t. XXIV, n. 10, 1899.

si introducano due nuove funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ così definite, che sia $f(x)=\theta(x)$ sempre che x non sia un numero primo, ed $f(x)=\theta(x)+\frac{1}{2}$ quando x eguagli un numero primo.

Sia poi

$$f_1(x)=f(x)+\frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}})+\cdots;$$

ed è facile convincersi che $f_1(x)=\theta_1(x)$ sempre che x non è potenza di un numero primo, ed invece $f_1(x)=\theta_1(x)+\frac{1}{2\nu}$, se x è la potenza ν^{esima} d' un numero primo.

In altre parole $f(x)$ è la media aritmetica fra $\theta(x)$ e $\vartheta(x)$, mentre $f_1(x)$ lo è fra $\theta_1(x)$ e $\vartheta_1(x)$. Sicchè, malgrado le discontinuità, per qualunque valore di x, reggeranno le eguaglianze

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f_1(x-0)+f_1(x+0)],$$

il che renderà possibile l'applicazione della formola di Fourier, che fra poco sarà invocata, e darà ragione della introduzione delle funzioni f_1 ed f, che passo successivamente a determinare seguendo Riemann.

Dalla identità (17) di Eulero si trae

$$\log\zeta(s)=\sum_p p^{-s}+\frac{1}{2}\sum_p p^{-2s}+\frac{1}{3}\sum_p p^{-3s}+\cdots,$$

la quale, poichè

$$p^{-s}=s\int_p^\infty y^{-s-1}dy\quad,\quad p^{-2s}=s\int_{p^2}^\infty y^{-s-1}dy\quad,\quad p^{-3s}=s\int_{p^3}^\infty y^{-s-1}dy\ ,\ \ldots,$$

si può scrivere

$$(82)\qquad \frac{\log\zeta(s)}{s}=\sum_p\int_p^\infty y^{-s-1}dy+\frac{1}{2}\sum_p\int_{p^2}^\infty y^{-s-1}dy+\frac{1}{3}\sum_p\int_{p^3}^\infty y^{-s-1}dy+\cdots.$$

Ora

$$\sum_p\int_p^\infty y^{-s-1}dy=\int_2^3 y^{-s-1}dy+2\int_3^5 y^{-s-1}dy+3\int_5^7 y^{-s-1}dy+4\int_7^{11} y^{-s-1}dy+\cdots+\theta(q)\int_p^q y^{-s-1}dy+\cdots,$$

q indicando il numero primo successivo al numero primo p. Or essendo $\theta(y)$ costante per tutti i valori di y a destra di p e non superiori a q, si ha

$$\theta(q)\int_p^q y^{-s-1}dy=\int_p^q\theta(y)\,y^{-s-1}dy\ .$$

Se ora sotto all'integrale al posto di $\theta(y)$ si pone $f(y)$, non si fa altro che aggiungere all'integrale l'elemento $\frac{1}{2} q^{-s-1} dy$, che al limite sparisce, quindi si ha

$$\theta(q) \int_p^q y^{-s-1} dy = \int_p^q f(y) y^{-s-1} dy :$$

dunque

$$\sum_p \int_p^\infty y^{-s-1} dy = \int_2^\infty f(y) y^{-s-1} dy ,$$

e poichè $f(y) = 0$ per $y < 2$,

$$\sum_p \int_p^\infty y^{-s-1} dy = \int_0^\infty f(y) y^{-s-1} dy .$$

Analogamente si trarrebbero

$$\sum_p \int_{p^2}^\infty y^{-s-1} dy = \int_0^\infty f(y^{\frac{1}{2}}) y^{-s-1} dy , \quad \sum_p \int_{p^3}^\infty y^{-s-1} dy = \int_0^\infty f(y^{\frac{1}{3}}) y^{-s-1} dy , \ldots .$$

In conseguenza, sostituendo nella (82), si ottiene

$$\text{(83)} \quad \frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_0^\infty [f(y) + \frac{1}{2} f(y^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} f(y^{\frac{1}{3}}) + \cdots] y^{-s-1} dy = \int_0^\infty f_1(y) y^{-s-1} dy ,$$

ossia, posto $\log y = u$,

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_{-\infty}^\infty f_1(e^u) e^{-su} du .$$

Ora si indichi per un momento s con $s_1 + s_2 i$, $\frac{\log \zeta(s)}{s}$ con $g(s_1 + s_2 i)$, ossia, decomponendo questa nella parte reale ed immaginaria, con $g_1(s_2) + i g_2(s_2)$, e infine $f_1(e^u) e^{-s_1 u}$ con $h(u)$: con tali notazioni la precedente eguaglianza si scinde nelle due

$$g_1(s_2) = \int_{-\infty}^\infty h(u) \cos(s_2 u) du , \quad i g_2(s_2) = -i \int_{-\infty}^\infty h(u) \operatorname{sen}(s_2 u) du .$$

Moltiplichiamo queste due per $ds_2 [\cos(s_2 v) + i \operatorname{sen}(s_2 v)]$, e integriamo da $-\infty$ a $+\infty$, otteniamo

$$\text{(84)} \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty g_1(s_2) [\cos(s_2 v) + i \operatorname{sen}(s_2 v)] ds_2 = \int_{-\infty}^\infty ds_2 \cos(s_2 v) \int_{-\infty}^\infty h(u) \cos(s_2 u) du \\ \int_{-\infty}^\infty i g_2(s_2) [\cos(s_2 v) + i \operatorname{sen}(s_2 v)] ds_2 = \int_{-\infty}^\infty ds_2 \operatorname{sen}(s_2 v) \int_{-\infty}^\infty h(u) \operatorname{sen}(s_2 u) du , \end{cases}$$

giacchè i due integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \operatorname{sen}(s_2 v) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cos(s_2 u) du \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \cos(s_2 v) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \operatorname{sen}(s_2 u) du$$

sono nulli, come si vede facilmente decomponendo l' intervallo dell' integrazione rispetto ad s_2 nei due tratti $-\infty$ a 0, e 0 a $+\infty$, e cambiando lungo il primo tratto la s_2 in $-s_2$. Sommando le (84) si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s_1 + is_2) e^{-is_2 v} ds_2 = \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cos[s_2(u - v)] du .$$

Al secondo membro di questa eguaglianza può applicarsi la formola di Fourier (MEYER — Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale, p. 275)

$$2\pi h(v) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cos[s_2(u - v)] du ,$$

e in conseguenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s_1 + is_2) e^{is_2 v} ds_2 = 2\pi h(v) = 2\pi f_1(e^v) e^{-s_1 v} ;$$

moltiplicando ambo i membri per $ie^{s_1 v}$, posto $v = \log x$, e ricordato che

$$s_1 + is_2 = s \quad , \quad g(s) = \frac{\log \zeta(s)}{s} ,$$

si deduce che

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1 - \infty i}^{s_1 + \infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s ds ,$$

dove l' integrazione dev'essere eseguita in modo che la $\mathcal{R}(s)$, cioè s_1, resti costante.

Integrando per parti, e notando che

$$\left[\frac{\log \zeta(s)}{s} \cdot \frac{x^s}{\log x} \right]_{s_1 - \infty i}^{s_1 + \infty i} = 0 ,$$

la precedente eguaglianza si trasforma in

$$f_1(x) = -\frac{1}{2\pi i \log x} \int_{s_1 - \infty i}^{s_1 + \infty i} x^s \frac{d}{ds} \frac{\log \zeta(s)}{s} ds . \tag{85}$$

Per la inversione della formola (83), cioè per la deduzione della funzione f_1 per mezzo della ζ, è proposta da GRAM, nella memoria premiata citata nel (IV, 25), un'altra dimostrazione più diretta, la quale non è stata però trovata perfettamente rigorosa, ed è stata quindi modificata dal PHRAGMÉN nell'articolo Ueber die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemann'schen Primzahl-

formel. *Ofversigt af K. Vetenskaps Akademiens Förhandlinger.* **1891, N. 10,** p. 721.

66. Trasformazione dell'integrale definito esprimente $f_1(x)$. Seconda lacuna della memoria di Riemann. Formola finale per $f_1(x)$ colla rettifica di Genocchi. — Ulteriori trasformazioni deve subire la (85) allo scopo di distinguere in $f_1(x)$ le parti di natura diversa, che essa contiene. In virtù di (81), e del teorema *c)* del § 64 è

$$(86) \quad \log\zeta(s) = \log\xi(0) - \log(s-1) - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \frac{s}{2}\log\pi + \sum_\alpha \log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Ora si ha per una nota formola di Weierstrass (Cesàro — Analisi algebrica, p. 487)

$$-\frac{\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s} = \frac{1}{2}C + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2m}\right)-\frac{1}{2m}\right].$$

Dippiù è evidentemente

$$\log\left(1-\frac{t^2}{\alpha^2}\right) = \log\left(\frac{1}{2}-s+\alpha i\right) + \log\left(\frac{1}{2}-s-\alpha i\right) - \log\alpha^2$$

$$= \log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) + \log\left(1-\frac{\left(\frac{1}{2}i\right)^2}{\alpha^2}\right);$$

dunque sostituendo in (86), dividendo per s, e derivando, si ottiene

$$(87) \quad \frac{d}{ds}\frac{\log\zeta(s)}{s} = -\frac{1}{s^2}\log\frac{1}{2} - \frac{d}{ds}\frac{\log(s-1)}{s} + \frac{d}{ds}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2m}\right)-\frac{1}{2m}\right]$$

$$+\frac{d}{ds}\sum_\alpha \frac{1}{s}\left[\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right].$$

Per ottenere la desiderata espressione di $f_1(x)$ non resta che sostituire questo valore di $\frac{d}{ds}\frac{\log\zeta(s)}{s}$ in (85) e valutare i singoli integrali che risultano.

67. — Ora, lungo questa valutazione, si rinviene un'altra grave lacuna. Non è difficile, seguendo questo passo dell'originale, rendersi conto dei risultati

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\log\frac{1}{2}\cdot\int_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i}\frac{x^s\,ds}{s^2} = -\log 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} x^s\frac{d}{ds}\frac{\log(s-1)}{s}\,ds = \int_0^x \frac{dx}{\log x} = \mathrm{Li}(x),$$

$$-\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} x^s\frac{d}{ds}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2m}\right)-\frac{1}{2m}\right]ds = \int_x^{\infty}\frac{dx}{x(x^2-1)\log x};$$

ma non si riesce a giustificare in modo rigoroso l'altro

$$-\frac{1}{2\pi i \log x}\int_{s_1-\infty i}^{s_1+\infty i} x^s \frac{d}{ds}\sum_\alpha \frac{1}{s}\left[\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\log\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$$

$$=-\sum_\alpha\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)\right].$$

Riemann assicurò che, mediante una discussione più approfondita della funzione $\xi(t)$, esso può ottenersi. Però dalla bozza d' una lettera trovata fra le sue carte si apprende che il relativo sviluppo non era stato da lui condotto a tal grado di maturità da poterlo pubblicare.

Con passaggi non sempre giustificati, ed alcuni difficilmente giustificabili, si trovano dedotti tutti i precedenti risultati nel § 3 della memoria di Gram citata nel (IV, 25), e nel § 11 del Capitolo XII dell'opera Bachmann — Zahlentheorie-Zweiter Theil. Die analitische Zahlentheorie; però, seguendo la via tracciata da Riemann, malgrado gli sforzi di molti valenti, i dubii non sono stati rimossi. Invece, per una strada fin dal principio totalmenie diversa, la formola più sotto indicata con (88) è stata recentemente stabilita in modo inappuntabile; laonde io, riserbandomi di indicare nel Capitolo seguente la dimostrazione rigorosa della formola (88), ammetto frattanto i soprascritti risultati e compio il resoconto della memoria di Riemann. Per mezzo di essi e della (87), la (85) si muta in

$$(88)\quad f_1(x)=-\log 2+\int_x^\infty \frac{dx}{x(x^2-1)\log x}+\mathrm{Li}(x)-\sum_\alpha\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

la quale non differisce dalla celebre formola di Riemann che pel termine costante. In quest'ultima al posto di $-\log 2$ si trova, per un *lapsus calami*, $\log\xi(0)$. C'è chi opina che $\log\xi(0)$ sta scritto per equivoco invece di $\log[-\zeta(0)]$, che equivale proprio a $-\log 2$. A ogni modo l'equivoco fu rilevato da Genocchi nell'articolo bibliografico

Formole per determinare quanti sono i numeri primi fino a un dato limite. *Annali di matematica pura e applicata*. T. III, p. 52, 1860.

68. Considerazioni sulla natura delle varie parti costituenti il valore trovato per $f_1(x)$. Trasformazioni di von Mangoldt e Gram della parte discontinua. Altro modo di presentare la formola di Riemann in vista di futura estensione. — Per esaurire l'esposizione della memoria di Riemann non resta che dedurre il valore di $f(x)$ per mezzo della $f_1(x)$; ma prima credo opportuna qualche riflessione per rendersi conto esatto della natura delle varie parti, che compongono il secondo membro della (88).

Prescindendo dal termine costante — log 2, considero, per $x > e^\pi$, l'integrale, che figura come secondo termine, e osservo che l'ineguaglianza $x(x^2-1) > x^2$ es-

sendo verificata per $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}8902$, lo è certamente per $x > e^n$, ancorchè sia $n = 1$; quindi

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x(x^2-1)\log x} < \frac{1}{n}\int_x^\infty \frac{dx}{x(x^2-1)} < \frac{1}{n}\int_x^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{nx} < \frac{1}{ne^n},$$

dunque detto integrale non cresce indefinitamente con x.

La parte $\mathrm{Li}(x)$, variando con continuità, cresce indefinitamente con x, in guisa che il limite del rapporto di essa a $\frac{x}{\log x}$ è 1 (cfr. IV, 24, nota).

Per dare un'idea della natura dell'ultima parte

$$-\sum_\alpha \left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\}$$

scrivo questa serie sotto la forma

$$-\sum_\alpha \left\{ \mathrm{Li}\left(e^{\frac{1}{2}\log x + i\alpha\log x}\right) + \mathrm{Li}\left(e^{\frac{1}{2}\log x - i\alpha\log x}\right) \right\}.$$

Tenute poi presenti le generalità sugl' integrali di funzioni di variabile complessa (Königsberger — Ueber die Theorie der elliptischen Functionen, pag. 62 e seg.) il lettore richiami alla mente come possa farsi per stabilire che convenga intendere per $\mathrm{Li}(e^w)$, quando w è una quantità complessa $u + iv$; vale a dire come possa definirsi per tutti i valori di w una funzione in modo unico, sicchè per tutti i valori reali positivi di w coincida colla già nota funzione $\mathrm{Li}(e^w)$ e possegga inoltre il carattere d'una funzione intera. Operato un taglio nel piano della variabile complessa w lungo l'asse delle u da $-\infty$ a 0, ristretta la variabile complessa nell' interno del campo, che covrendo semplicemente il piano sia limitato ai due orli del taglio e indicato con h un numero positivo si ha, se v è positiva,

$$\mathrm{Li}(e^w) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz + \pi i,$$

se v è negativa,

$$\mathrm{Li}(e^w) = \lim_{h=\infty} \int_{-h+w}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz - \pi i,$$

e se v è nulla,

$$\mathrm{Li}(e^w) = \lim_{h=0} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^z}{z}\,dz + \int_{h}^{w} \frac{e^z}{z}\,dz \right\}.$$

Da ciò si trae

$$\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) = \lim_{h=\infty} \left\{ \int_{-h+\frac{1}{2}\log x + i\alpha\log x}^{\frac{1}{2}\log x + i\alpha\log x} \frac{e^z}{z}\,dz + \int_{-h+\frac{1}{2}\log x - i\alpha\log x}^{\frac{1}{2}\log x - i\alpha\log x} \frac{e^z}{z}\,dz \right\}$$

ossia

$$\text{(89)}\qquad \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x}\frac{e^{u+i\alpha\log x}}{u+i\alpha\log x}\,du+\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x}\frac{e^{u-i\alpha\log x}}{u-i\alpha\log x}\,du\ ,$$

e, introducendo le funzioni trigonometriche in luogo delle esponenziali immaginarie,

$$\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x}e^{u}\left\{\frac{\cos(\alpha\log x)+i\,\mathrm{sen}(\alpha\log x)}{u+i\alpha\log x}+\frac{\cos(\alpha\log x)-i\,\mathrm{sen}(\alpha\log x)}{u-i\alpha\log x}\right\}du$$

$$=2\cos(\alpha\log x)\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x}\frac{ue^{u}}{u^{2}+(\alpha\log x)^{2}}\,du+2\alpha\log x\,.\,\mathrm{sen}(\alpha\log x)\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x}\frac{e^{u}}{u^{2}+(\alpha\log x)^{2}}\,du\,.$$

Cambiando in questi ultimi integrali la variabile u nell'altra ρ legata ad u dalla relazione

$$u=-\rho\log x+\frac{1}{2}\log x\ ,$$

si ha finalmente

$$\text{(90)}\qquad -\sum_{\alpha}\left\{\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right\}=$$

$$\sqrt{x}\sum_{\alpha}\left\{2\cos(\alpha\log x)\int_{0}^{\infty}\frac{\rho-\frac{1}{2}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{2}+\alpha^{2}}\frac{d\rho}{x^{\rho}}-2\alpha\,\mathrm{sen}(\alpha\log x)\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{2}+\alpha^{2}}\frac{d\rho}{x^{\rho}}\right\}.$$

Questa trasformazione è qui riportata dalla memoria di von Mangoldt di cui il titolo troverassi nel Capitolo IX, § 76, e della quale parlerò a lungo. Detta trasformazione non ha bisogno di ritenere le α reali.

Il Gram nel § 3 della sua memoria da me citata in (IV, 25), supposte reali le α, esegue un'altra trasformazione, che conduce ad un risultato un poco diverso, ma che io trarrò dalla (89).

Estendo l'integrale $\int\frac{e^{w}}{w}\,dw$ ai perimetri dei due triangoli aventi rispettivamente per vertici le terne di punti

$$\left(\frac{1}{2}\log x+i\alpha\log x\ ,\ \frac{1}{2}\log x+\infty i\ ,\ -\infty+i\alpha\log x\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\log x-i\alpha\log x\ ,\ \frac{1}{2}\log x-\infty i\ ,\ -\infty-i\alpha\log x\right);$$

e noto che, posto $w=r(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)$, l'integrale $\int\frac{e^{w}}{w}\,dw$ nella ipotesi di r costante si riduce a

$$\int e^{r\cos\omega}\left[-\mathrm{sen}(r\,\mathrm{sen}\,\omega)+i\cos(r\,\mathrm{sen}\,\omega)\right]d\omega\ ,$$

e perciò, se $r = \infty$, ed ω varia da $\frac{\pi}{2}$ a π, e poi da π a $\frac{3\pi}{2}$, il detto integrale si riduce a zero: quindi le due eguaglianze risultanti sottratte l' una dall' altra dànno

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x} \frac{e^{u+i\alpha\log x}}{u+i\alpha\log x} du + \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\log x} \frac{e^{u-i\alpha\log x}}{u-i\alpha\log x} du - i\int_{\alpha\log x}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\log x - vi}}{\frac{1}{2}\log x - vi} dv + i\int_{\alpha\log x}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}\log x + vi}}{\frac{1}{2}\log x + vi} dv = 0 ,$$

donde tenendo presente la (89) si trae

$$-\left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\} = -i\left\{ \int_{\infty}^{\alpha\log x} \frac{e^{\frac{1}{2}\log x + vi}}{\frac{1}{2}\log x + vi} dv - \int_{\infty}^{\alpha\log x} \frac{e^{\frac{1}{2}\log x - vi}}{\frac{1}{2}\log x - vi} dv \right\} ,$$

e ponendo

$$v = t\log x$$

si trae

$$-\left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\} = i\left\{ \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}+ti}}{\frac{1}{2}+ti} dt - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}-ti}}{\frac{1}{2}-ti} dt \right\} .$$

$$= \sqrt{x}\int_{\alpha}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}i+t\right)x^{ti} - \left(\frac{1}{2}i-t\right)x^{-ti}}{\frac{1}{4}+t^2} dt = \sqrt{x}\int_{\alpha}^{\infty} \frac{2t\cos(t\log x) - \mathrm{sen}(t\log x)}{\frac{1}{4}+t^2} dt ,$$

e quindi infine

$$-\sum_{\alpha} \left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\} = \sqrt{x}\sum_{\alpha}\int_{\alpha}^{\infty} \frac{2t\cos(t\log x) - \mathrm{sen}(t\log x)}{\frac{1}{4}+t^2} dt ,$$

che è la formola di Gram.

Ma sotto l'uno o l'altro aspetto che si considera questa parte di $f_1(x)$, non si sa per ora giudicare dell' influenza di questo termine. Bisognerebbe aver conoscenza più esatta delle radici α per potere avere indizio sicuro del modo come esso varia al crescere di x. Quello che è certo è che esso nasconde le discontinuità della funzione $f_1(x)$, e perciò la serie non può essere uniformemente convergente.

Qualche risultato di più recenti ricerche, che esporrò nel (X, 90, 92) viene per via indiretta a dar qualche lume sulla parte di $f_1(x)$ in ultimo considerata.

Noto in fine, in vista d'una futura estensione (cfr. XI, 99), che è, come facilmente si verifica

$$\int_{x}^{\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)\log x} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{x}^{\infty} \frac{x^{-r-2m}}{r+2m} dr ,$$

$$-\sum_{\alpha} \left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\} = \sum_{\alpha} \left\{ \int_{0}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}+\alpha i}}{r-\frac{1}{2}-\alpha i} dr + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{-r+\frac{1}{2}-\alpha i}}{r-\frac{1}{2}+\alpha i} dr \right\} .$$

Se ora si ricorda (§ 63) che $-2m$ (per $m=1,2,3,\ldots$) sono le radici reali di $\zeta(s)=0$, come $\frac{1}{2}\pm\alpha i$ ne sono quelle non reali, e si conviene di indicare col simbolo c tutti gli zeri reali o no di $\zeta(s)$, la formola (88), osservato ancora che $-\frac{1}{2}$ è il valore di $\zeta(0)$, si trasforma in

$$f_1(x)=\log[-\zeta(0)]+\mathrm{Li}(x)+\sum_c\int_0^\infty\frac{x^{-r+c}}{r-c}dr\,, \tag{88'}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli 0 di $\zeta(s)$. Ricordando infine che 1 è il polo di $\zeta(s)$ si riscontra l'esattezza dell'asserzione fatta in principio del § 63 che il polo e gli zeri di $\zeta(s)$ sono gli elementi analitici occorrenti a costruire la formola, che si aveva in mira.

69. Funzione $\mu(n)$ di Möbius. Deduzione di $f(x)$. Valore di $f(x)$ ricavato tenendo conto solo della parte continua di $f_1(x)$. Riduzione eseguita da Gram, alla forma più comoda di detto valore — La determinazione di $f(x)$ si esegue agevolmente per mezzo dei fattori introdotti da Möbius (Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen, *Crelle Journal für d. r. u. a. M.* Vol. IX, p. 105, 1832).

Definiscasi la funzione $\mu(n)$ eguale a $+1$, allorchè $n=1$, oppure n è prodotto d'un numero pari di fattori primi tutti differenti; sia invece $\mu(n)=-1$, allorchè tale numero di fattori primi è impari; e infine sia $\mu(n)=0$, quando n è divisibile per qualche quadrato diverso da 1.

Confrontando questa definizione della funzione $\mu(n)$ colla regola di Cauchy per calcolare le somme delle potenze simili delle radici primitive dell' equazione binomia $x^n-1=0$ (Trudi — Intorno alle equazioni binomie. *Atti della R. Accademia delle Sc. fis. e mat. di Napoli.* N. 43, vol. III, 1868) si scorge che la somma di dette radici primitive è proprio $\mu(n)$.

È facile dimostrare (cfr. Bachmann — Zahlentheorie. II. Th., Cap. XI, § 1) che

$$\sum\mu(d_n)=0\,,$$

se la somma si estende a tutti i divisori d_n di un numero n diverso da 1, compresi i divisori 1 ed n. D'altronde questa eguaglianza è una conseguenza immediata della seconda definizione, giacchè $\Sigma\mu(d_n)$ esprime la somma di tutte le radici dell'equazione $x^n-1=0$.

Posto ciò se fra due sistemi di funzioni X_r ed Y_r si hanno delle relazioni della forma

$$\begin{aligned}Y_1&=X_1+X_2+X_3+\cdots\\ Y_2&=X_2+X_4+X_6+\cdots\\ Y_3&=X_3+X_6+X_9+\cdots\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

si deduce subito

$$X_1=\mu(1)Y_1+\mu(2)Y_2+\mu(3)Y_3+\cdots \tag{91}$$

e analogamente possono trarsi $X_2, X_3, \ldots$, naturalmente supposto che le serie, di cui si tratta, siano convergenti.

Posto

$$Y_r = \frac{1}{r} f_1(x^{\frac{1}{r}}) \quad , \quad X_r = \frac{1}{r} f(x^{\frac{1}{r}}) \, ,$$

la (91) dà la desiderata funzione

$$f(x) = f_1(x) - \frac{1}{2} f_1(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} f_1(x^{\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5} f_1(x^{\frac{1}{5}}) + \frac{1}{6} f_1(x^{\frac{1}{6}}) - \cdots = \sum_n \frac{\mu(n)}{n} f_1(x^{\frac{1}{n}}) \, .$$

Ed è questa la formola, che risolve il problema capitale di queste ricerche, giacchè $f(x)$ equivale a $\theta(x)$ o a $\theta(x) + \frac{1}{2}$, secondo che x non è, o è un numero primo. Invece di eseguire su f_1 l'operazione indicata nell'ultima eguaglianza si può operare separatamente su ciascuna parte del secondo membro di (88).

Operando sul termine $-\log 2$, in virtù dell' eguaglianza (93), di cui fra poco parlerò, si ha per risultato zero.

Il termine $\mathrm{Li}(x)$ fornisce

$$\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{3} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}}) - \cdots \qquad \text{cioè} \qquad \sum_n \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}) \, . \tag{92}$$

In quanto a ciò che rimane non si sa semplificare l'espressione, che se ne deduce, nè valutare convenientemente i limiti fra cui questa varia; ma basandosi sul confronto frai risultati ottenuti coi metodi esposti nei Capitoli I e II coi valori della espressione (92), si ritiene che questa fornisca un valore approssimato di $f(x)$ o $\theta(x)$ tale che la deviazione di esso da $\theta(x)$ sia di ordine di grandezza non superiore a quello di $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$, comunque piccolo sia il numero positivo σ: ma ciò non può dirsi ancora rigorosamente dimostrato (cfr. IX, § 88 a 91).

70. — Il Gram a pag. 30 della memoria più volte citata (IV, 25) trasforma tale valore approssimato in un altro più comodo pel calcolo numerico.

A tale scopo occorre fare uso delle due eguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0 \, , \tag{93}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log n = -1 \, . \tag{94}$$

Queste furono date, senza dimostrazioni rigorose, la prima da Eulero (*Introductio in analysis infinitorum*, t. I, p. 229-1748), la seconda da Möbius nell'articolo citato al § precedente. Attualmente esse sono state provate con tutto il rigore, ma alquanto laboriosamente. Io pel momento le giustifico, ammettendo, come

solea farsi, la uniforme convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\log n$$

in un intervallo comprendente il punto 1, riserbandomi di ritornare più sotto (X, 93) sull'argomento, e dare allora un cenno dei ragionamenti più soddisfacenti.

Ciò premesso moltiplico le due serie $\zeta(s)$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ considerandole in un punto della parte comune ai loro rispettivi campi di convergenza, in cui, come si sa, questa è assoluta, ed ottengo

$$\zeta(s)\,.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Sigma\mu(d_n)}{n^s}=1 \qquad (\S\ 69),$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}\ . \tag{95}$$

Se si fa tendere s ad 1, si ricava dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0\ . \tag{93}$$

Ciò premesso dalla (95) si ha che, se si pone

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}}+\eta_k\ , \tag{96}$$

η_k è tale che $\lim\limits_{k=\infty}\eta_k=0$.

Ora

$$\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{\mu(n)}{n}e^{-(s-1)\log n}=\frac{\mu(n)}{n}\left[1-(s-1)\log n\,.\,e^{-\varepsilon(s-1)\log n}\right]\ ,\ 0<\varepsilon<1\ ,$$

dunque la (96) diventa

$$-(s-1)\sum_{n=1}^{k}\frac{\mu(n)}{n}\log n\,.\,e^{-\varepsilon(s-1)\log n}=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k}\frac{1}{n^s}}+\eta_k-\sum_{n=1}^{k}\frac{\mu(n)}{n}\ ,$$

e passando al limite per $k=\infty$

$$-(s-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\log n\,.\,e^{-\varepsilon(s-1)\log n}=\frac{1}{\zeta(s)}\ ,$$

dividendo per $-(s-1)$, passando al limite per $s=1$, e ricordando che

$$\lim_{s=1}(s-1)\zeta(s)=1 \qquad (\S\ 60),$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\log n=-1 \qquad (\text{cfr. } \S\ 72). \tag{94}$$

Partendo ora dal noto sviluppo (Stolz — Grundzüge der Diff. und Integralrechnung. I, p. 274)

$$\mathrm{Li}(x)=\mathrm{C}+\log\log x+\frac{\log x}{1\,.\,1!}+\frac{(\log x)^2}{2\,.\,2!}+\frac{(\log x)^3}{3\,.\,3!}+\cdots, \qquad (x>1)$$

si trae

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}})=(\mathrm{C}+\log\log x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\log n+\frac{\log x}{1\,.\,1!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}+\cdots \tag{97}$$

e questa per le (93), (94), (95) diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}})=1+\frac{\log x}{1\,.\,\zeta(2)\,.\,1!}+\frac{(\log x)^2}{2\,.\,\zeta(3)\,.\,2!}+\frac{(\log x)^3}{3\,.\,\zeta(4)\,.\,4!}+\cdots;$$

dunque come formola d'approssimazione per la funzione $f(x)$ può ritenersi

$$f(x)=1+\frac{\log x}{1\,.\,\zeta(2)\,.\,1!}+\frac{(\log x)^2}{2\,.\,\zeta(3)\,.\,2!}+\frac{(\log x)^3}{3\,.\,\zeta(4)\,.\,4!}+\cdots. \tag{98}$$

La formola, che s'ottiene eguagliando $f(x)$ alla espressione (92), o la equivalente (98), è già stata da me chiamata formola di Riemann-Gram; dicendo formola di Riemann senz'altro, intendo alludere alla (88).

Pel calcolo numerico mediante la (98) occorrono i valori della funzione $\zeta(s)$ per $s=2,3,4,\ldots$. Questi sono forniti dalla nota

Stieltjes — Table des valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-k}$ — *Acta Mathematica*. T. X, p. 299, 1887.

In essa si dànno i valori di $\zeta(2),\zeta(3),\ldots,\zeta(70)$ con 32 decimali. Parlando della tabella numerica, e del diagramma, che si trovano in fine del presente lavoro (V, 37 e 38), ho illustrato numericamente e graficamente la formola di Riemann-Gram e ho discorso della preminenza di essa per la valutazione della totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato.

71. Considerazioni sul risultato della memoria di Riemann. Calcolazione delle radici di $\xi(t)$. Trasformazione eseguita da Phragmèn della formola di Rie-

mann per $f_1(x)$ allo scopo di agevolare i computi numerici. — Conchiudendo dunque, la memoria di Riemann colle aggiunte, che finora sono andato esponendo, sebbene lasci ancora desiderare il complemento di dimostrazioni rigorose in qualche punto:

1° rinviene un complesso di enti analitici, per mezzo dei quali è possibile di dare un'espressione esatta di $f(x)$ (vale a dire in fondo di $\theta(x)$), il che prima non era stato fatto;

2° mette in evidenza il termine $\mathrm{Li}(x)$, del quale sarà poi dimostrato il predominio in $\theta(x)$, vantaggio, che non offrono altre soluzioni della quistione proposte in seguito in luogo di quella di Riemann (cfr. Cap. XII);

3° fornisce un valore approssimato, la cui deviazione è minore di quella di tutte le precedenti formole analoghe.

L'uso del valore esatto, nei computi numerici, sembra quasi impossibile per due ragioni. La prima è la enorme difficoltà della calcolazione delle radici α dell'equazione $\xi(t) = 0$. Essa ha prima occupati Jensen e Stieltjes, e poi è stata ripresa da Gram, il quale nella

Note sur le calcul de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Bulletin de l'Acadèmie Royal des sciences et des lettres de Danemark pour l'anné 1895,* p. 303,

dà un cenno del metodo tenuto. Egli è partito dalla eguaglianza (§ 64, c))

$$\log \xi(t) = \log \xi(0) - \frac{t^2}{1} \sum \frac{1}{\alpha^2} - \frac{t^4}{2} \sum \frac{1}{\alpha^4} - \frac{t^6}{3} \sum \frac{1}{\alpha^6} - \dots$$

ed ha osservato che i coefficienti di questa serie possono, se conosciuti, servire alla determinazione della α. Giovandosi delle calcolazioni precedenti di Stieltjes e Jensen egli è pervenuto a calcolare con venti decimali i detti coefficienti fino a quelli di t^{14}, e da essi ha dedotto

$$\alpha_1 = 14{,}135 \quad , \quad \alpha_2 = 20{,}82 \quad , \quad \alpha_3 = 25{,}1 \ ,$$

ma non può aversi fiducia nelle ultime due cifre.

Queste calcolazioni possono servire più per dare delle notizie e una guida utile per lo studio teorico delle funzioni $\xi(t)$ e $\zeta(s)$, che pel computo di $f(x)$, giacchè (ed è questa la seconda delle ragioni, di cui poc'anzi si parlava), se anche si conoscesse un certo numero di radici α, la serie che figura in (88) varia sì fortemente da un termine al successivo, che lo stesso Gram, a pag. 107 della sua memoria premiata, non ritenne probabile potersi calcolare approssimativamente la somma della serie mediante un certo numero di termini.

Non pertanto il Phragmèn nella memoria citata verso la fine del § 65 si occupa del modo come possano essere agevolate le calcolazioni numeriche indicate dalla formola (88).

Date notizie circa le tavole esistenti della funzione $\mathrm{Li}(x)$, e fatte alcune sagaci osservazioni, trova una via, per la quale si possa ottenere nel modo più semplice una tavola pel logaritmo integrale, che soddisfi alle esigenze, che prima ha analizzate.

Introdotte poi le due funzioni

$$\varphi(k\,,x) = \text{valor principale di} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z \cos(kz)}{z}\, dz \quad , \quad \upsilon(k\,,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z \operatorname{sen}(kz)}{z}\, dz\,,$$

mostra come queste potrebbero essere calcolate pure per mezzo di tavole, e nota che

$$\operatorname{Li}(e^{x+yi}) = \varphi\left(\frac{y}{x}\,, x\right) + i\upsilon\left(\frac{y}{x}\,, x\right);$$

e quindi la formola (88), nella ipotesi che le radici α siano tutte reali (§ 64, *b*)) può trasformarsi in

$$(88'') \qquad f_1(e^x) = \operatorname{Li}(e^x) - 2\sum_\alpha \varphi\left(2\alpha\,, \frac{x}{2}\right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{e^{2x}-1}\, \frac{dx}{x} - \log 2\,.$$

Termino col notare che alla formola $f(x) = \sum \frac{\mu(n)}{n} f_1(x)$ si fa l'appunto che occorre conoscere la funzione $\mu(n)$ per ciascun intero. Or la definizione di questa funzione presuppone la decomposizione di n in fattori primi. Si contravviene così alla esigenza di non richiedere la preventiva conoscenza dei numeri primi. A ciò può rispondersi che non è escluso potere esistere un procedimento agevole, che permetta di calcolare la funzione $\mu(n)$ senza bisogno della decomposizione di n in fattori primi (cfr. § 69). Poi che il numero delle funzioni μ, di cui si ha bisogno, è sempre molto piccolo rispetto ad x, giacchè $f_1(x^{\frac{1}{n}})$, dopo un certo valore di n, finisce per annullarsi, perciò i numeri, della cui decomposizione si ha bisogno, non sono molti a paragone di x.

72. Proposizione empirica di Mertens relativa alla funzione $\sum_{m=1}^{n} \mu(m)$. — Nella nota

MERTENS — Ueber eine zahlentheoretische Function. *Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. Nat. Classe.* Vol. CVI, pag. 761, 1897,

è inserita una tavola contenente i valori numerici della funzione $\sum_{m=1}^{n} \mu(m)$ da $n=1$ fino ad $n = 10\,000$. La ispezione di questa tavola induce a conchiudere empiricamente la proposizione che, supposto $n > 1$, la suddetta funzione si mantiene sempre al di sotto di $\sqrt{n}$

L'autore però osserva che la dimostrazione generale di questa proprietà presenta, pur troppo, difficoltà quasi insormontabili.

Una conferma di questa proposizione si trova nella nota

DAUBLEBSKY V. STERNECK — Empirische Untersuchung über den Verlauf zalhentheoretische Function $\sum_{m=1}^{n} \mu(m)$ im Intervalle von 0 bis 150 000.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. Nat. Classe. Vol. CVI, pag. 835, 1897,
la quale, oltre la tavola molto più estesa, presenta un diagramma, che rende appariscente il verificarsi della proprietà su enunciata.

Il Mertens inoltre fa vedere come varii teoremi importanti, di cui nei capitoli seguenti terrò parola, sono conseguenze della proposizione sperimentalmente dedotta. Così mostra che $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log k$ differisce da -1 per una grandezza di ordine non superiore a quello di $n^{-\frac{1}{4}} \log n$; donde segue l'eguaglianza (94). Gli altri teoremi li noterò man mano s'andranno presentando (cfr. IX, 77; X. 85, 91).

73. Qualche altra funzione analoga alla $\mu(n)$. Teoremi di Bugajef e di Sylvester. — La funzione $\mu(n)$ richiama alla mente altre analoghe funzioni numeriche, che pure hanno relazione colla funzione $\theta(x)$. Per esempio, chiamato $\varpi(n)$ il numero dei fattori primi diversi contenuti in n, sia definita la funzione $\alpha(n)$ dalle seguenti equazioni

$$\alpha(1) = 0 \quad , \quad \alpha(n) = 0 \; ,$$

se n ha almeno un fattore primo ad una potenza superiore alla seconda, o almeno due fattori primi ad una potenza superiore alla prima;

$$\alpha(n) = (-1)^{\varpi(n)} \; ,$$

se n contiene un fattore primo alla seconda potenza; e infine

$$\alpha(n) = (-1)^{\varpi(n)+1} \varpi(n) \; ,$$

se n non è divisibile per nessun quadrato, eccetto 1.

È facile riconoscere che $\sum \alpha(d_n)$, dove la somma è estesa a tutti i divisori d_n del numero n, è eguale ad 1 o a 0, secondo che n è primo o no. Ciò posto si ha

$$\sum_{x=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{x}\right) \alpha(x) = \sum \alpha(d_2) + \sum \alpha(d_3) + \cdots + \sum \alpha(d_n) = \vartheta(n) \; .$$

La eguaglianza ricavata

$$\vartheta(n) = \sum_{x=1}^{n} \mathrm{E}\left(\frac{n}{x}\right) \alpha(x)$$

esprime un teorema di Bugajef, che, insieme ad altro, ha dato poi occasione a teoremi della stessa specie, ma più generali enunciati da Gegenbauer nelle note:

Ueber Primzahlen, e Zahlentheoretische Notiz. *Sitzungsberichte der*

K. Akademie der Wissenschaften in Wien. Math. Nat. Classe. Vol. XCIV, pag. 903, 1886 e vol. XCVII, pag. 420, 1889.

Mi limito a questo cenno, giacchè l'aumento del numero delle funzioni numeriche introdotte, e la maggiore generalità non conferiscono all'efficacia dei teoremi in queste note registrati.

Credo però bene soggiungere che nella recente nota:

GEGENBAUER — Bemerkung über einen die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Satz des Herrn J. J. Sylvester. *Monatshefte fur Mathem. und Phys.* Vol. X, pag. 370, 1899,

si mostra come in una relazione più generale data dall'autore rientra il seguente teorema comunicato da SYLVESTER senza dimostrazione:

Indichi $H(\alpha)$ *il numero* α *quando la frazione vera contenuta in questo numero è* $\frac{1}{2}$, *e in caso contrario* $H(\alpha)$ *indichi il numero intero più prossimo ad* α, *allora la totalità dei numeri primi più grandi di* m, *e più piccoli di* 2m, *è data dal massimo intero contenuto nella somma*

$$\sum H\left(\frac{m}{x}\right)\mu(x) \quad , \quad m \geq 1$$

dove la sommatoria va estesa a tutti gl' interi x *compresi nel campo costituito dell'unità e da quegl' interi non superiori a* 2m, *che son prodotti di fattori primi non superiori a* $\sqrt{2m}$.

CAPITOLO IX.

74. Lavori pubblicati per colmare le lacune lasciate da Riemann. Genere di $\xi(t)$ considerata come funzione di t^2 secondo Hadamard, von Schaper, e Borel. Esistenza delle radici α. — Come ho esposto nel (VIII, 64, 67) la memoria di Riemann contiene varii enunciati senza prova sufficiente. Più lavori sono stati scritti per colmare queste lacune.

In quanto alle proposizioni del § 64 dai pochi cenni dell'originale si raccoglie che il pensiero di Riemann era che, stabilita la proposizione *a)*, da essa fosse da trasi la *c)*. Egli dichiara poi la *b)* superflua per lo scopo immediato della memoria, cioè per la determinazione di $f_1(x)$ ed $f(x)$.

A stabilire la continuità dei ragionamenti in questo punto provvide in prima il lavoro originariamente presentato e premiato al concorso del 1892 dell'Accademia delle scienze di Parigi, e poscia riprodotto dall'autore sotto il titolo:

HADAMARD — Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann. *Journal de mathématiques pures et appliquées.* IV série, t. IX, p. 171, 1893.

In essa l'autore giunge a provar direttamente la proposizione *c)*, sicchè anche la *a)* è resa non necessaria per la deduzione della formola riemanniana.

Come il titolo stesso lo indica buona parte del lavoro di Hadamard è un capitolo di Analisi, in cui son trattate proprietà molto generali delle funzioni analitiche non ammettenti nessuna singolarità a distanza finita, cioè a dire delle funzioni intere. Nelle ultime sei pagine si applicano alcuni dei risultati ottenuti alla funzione ξ.

Più tardi il von Schaper nel lavoro

Ueber die Theorie der Hadamard'schen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen. *Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwurde der Universität zu Göttingen*, 1898,

e il Borel in varii lavori, e segnatamente nelle sue

Leçons sur les fonctions entières. Paris, 1900,

restringendosi alle funzioni di genere finito, e avendo principalmente in mira ciò che è necessario per dimostrare la proposizione *c)*, riuscirono a rendere più diretta e semplice la via.

Io quindi, seguendo i due ultimi autori, della teoria delle funzioni intere riferisco le definizioni, e gli enunciati, che è indispensabile ben percepire. Espongo poi, lievemente modificandola, la dimostrazione del teorema *c)*, che si legge nella dissertazione di von Schaper.

Siano $a_1, a_2, a_3, \ldots$ numeri complessi, i cui moduli formino una successione non decrescente, e che tenda all' infinito, potendo parecchi consecutivi di questi numeri complessi essere eguali fra loro.

Supponiamo dippiù siano essi stati dati in modo che esista un numero intero $k+1$ tale che la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{k+1}}$ sia convergente, e sia inoltre $k+1$ il più piccolo intero, per cui questo accada.

Formiamo il prodotto infinito assolutamente, ed uniformemente convergente

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{\frac{z}{a_\nu} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2} + \ldots + \frac{1}{k}\frac{z^k}{a_\nu^k}}.$$

Qualunque funzione intera $F(z)$, che abbia per zeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ deve essere della forma $e^{H(z)}G(z)$, in cui $H(z)$ è anch'essa una funzione intera, che può in particolare essere anche un polinomio. Supponiamo che questo avvenga, e sia q il grado di $H(z)$.

In tali ipotesi il più grande p frai due numeri q e k è stato denominato dagli autori francesi il *genere* della funzione $F(z)$, la quale, così come s' è fatta nascere, costituisce la classe delle funzioni intere di genere finito.

Secondo von Schaper, p è chiamato l'*altezza* di $F(z)$, e le funzioni di genere finito son dette funzioni di Hadamard.

Se $H(z)$ non si riduce ad un polinomio, oppure se gli zeri a_ν di una funzione intera, comunque assegnata, sono tali che non esista il numero $k+1$ caratterizzato dalla proprietà sopra indicata, si dirà che la funzione è di genere infinito. Qui basta limitarsi a considerare le funzioni di genere finito.

Il numero ρ individuato dalla proprietà che, assegnato il numero positivo ε comunque piccolo, la serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\rho+\varepsilon}}$ sia convergente, mentre $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\rho-\varepsilon}}$ sia divergente è chiamato *esponente di convergenza* della successione dei moduli $|a_\nu|$, o anche *ordine reale* della funzione $F(z)$.

Inoltre è da considerarsi il numero σ definito dalla seguente proprietà:

Comunque piccolo sia assegnato il numero positivo ε, da un certo valore di $|z|$, in poi si abbia sempre

$$|F(z)| < e^{|z|^{\sigma+\varepsilon}},$$

mentre esistano infiniti punti arbitrariamente lontani, tali che si abbia in essi

$$|F(z)| < e^{|z|^{\sigma-\varepsilon}}.$$

Questo numero σ, che non può essere sorpassato dall'ordine reale ρ, è chiamato da Borel *ordine apparente* di $F(z)$. Da von Schaper l'anzidetta proprietà del numero σ è enunciata dicendo che $F(z)$ è del tipo $e^{|z|^\sigma}$.

Poste queste definizioni menziono alcuni risultati, che si raccolgono dallo studio dei due lavori ultimamente citati:

Il genere p *non può sorpassare l'ordine apparente* σ.

Questa proposizione basta per lo scopo, che qui ho in vista: nonpertanto sarà bene enunciare più precisamente le relazioni, che hanno fra loro i numeri p, q, σ, ρ. Esse sono espresse dagli enunciati:

Se l'ordine apparente σ *non è intero, l'esponente di convergenza* ρ *è eguale a* σ, *e il genere* p *equaglia* $E(\sigma)$.

Se l' ordine apparente σ *è intero, il genere* p *è eguale a* σ *oppure a* $\sigma - 1$. *Questo ultimo caso si avvera allora, e solo allora quando* $q \leqq \sigma - 1$, *e contemporaneamente* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^{\rho}}$ *è convergente.*

L'ordine apparente σ *è eguale al più grande dei due numeri* q *e* ρ.

75. — Passo ora a dimostrare la proposizione.

La funzione intera pari di t

$$\xi(t) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \tag{81}$$

rispetto a t^2, *è di genere zero, essendo* $s = \frac{1}{2} + ti$.

Evidentemente la serie, uniformemente convergente per $\mathcal{R}(s) > \varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ è legata a $\zeta(s)$ della relazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s), \tag{99}$$

D'altra parte, in virtù dell'espressione di $\Gamma(s)$ per mezzo dell' integrale euleriano, si ha

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-nx}x^{s-1}\,dx \ ,$$

dunque

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,x^{s-1}\,dx \ .$$

Dal paragone di questa con (99) si trae

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{s-1}}\right)\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,x^{s-1}\,dx \ .$$

Per mezzo di questo valore di $\zeta(s)$, e della nota formola relativa alla funzione Γ

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^s-1}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} \ ,$$

la (81) si trasforma in

$$\xi(t)=\frac{s(s-1)}{2}\,\pi^{-\frac{s-1}{2}}\,\frac{1}{2^{s-1}-1}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,x^{s-1}\,dx \ . \tag{100}$$

Posto $t=re^{i\varphi}$, esamino il modo di comportarsi di $|\xi(t)|$ al crescere indefinitamente di r. Poichè $s=\frac{1}{2}+ti=\frac{1}{2}-r\operatorname{sen}\varphi+ir\cos\varphi$, e s' è poc' anzi supposto essere $\mathfrak{R}(s)>0$, il punto rappresentato dalla variabile complessa t si deve allontanare in modo che $\frac{1}{2}-r\operatorname{sen}\varphi$ si serba positivo. Basterà supporre che $\operatorname{sen}\varphi$ si serbi nullo o negativo, così sarà sempre $\mathfrak{R}(s)\geq\frac{1}{2}$, e il punto rappresentato da t si allontanerà restando nel mezzo piano al disotto dell' asse delle t reali. Si vedrà poi subito come la conchiusione vada estesa, se t si muove nell'altro mezzo piano.

Essendo

$$\left|\frac{s(s-1)}{2}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}+r^2\right)^2-r^2\operatorname{sen}^2\varphi} \ , \quad \left|\pi^{-\frac{s-1}{2}}\right|=e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r\operatorname{sen}\varphi\right)\log\pi}$$

$$\left|\frac{1}{2^{s-1}-1}\right|=\frac{2^{\frac{1}{2}+r\operatorname{sen}\varphi}}{\sqrt{(1-2^{\frac{1}{2}+r\operatorname{sen}\varphi})^2+4\,.\,2^{\frac{1}{2}+r\operatorname{sen}\varphi}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(r\cos\varphi\log 2)}} \ ,$$

per r sufficientemente grande si finirà per aver sempre

$$\left| \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-\frac{s-1}{2}} \frac{1}{2^{s-1}-1} \right| < e^{2\log r} < e^{r^{1+\varepsilon'}}, \tag{101}$$

per piccolo che sia ε'.

Nella nota formola di Wejerstrass

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = e^{Cx} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) e^{-\frac{x}{n+1}},$$

rimpiazzando x con $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} ti$, e poi successivamente ponendo

$$\frac{1}{2}(4n+3)i = a_n \; , \; -\frac{C}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+4} + \log \frac{4n+3}{4n+4} \right) = P \; , \; \frac{Ci}{2} + 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n+4)} = Q \, ,$$

dopo essersi assicurato della convergenza di tali serie, si ottiene

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} = e^{P+Qt} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{a_n}\right) e^{\frac{t}{a_n}} .$$

L'ordine apparente della funzione intera di t, che figura al secondo membro risultando evidentemente 1, si avrà per r sufficientemente grande

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)} < e^{r^{1+\varepsilon''}}, \tag{102}$$

comunque piccolo sia ε''.

Infine

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} x^{s-1} dx \right| \leqq \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\left(\frac{1}{2} - r \operatorname{sen} \varphi\right) - 1} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2} - r \operatorname{sen} \varphi\right) < \Gamma\left(\frac{1}{2} + r\right).$$

Ora in virtù della serie di Stirling si sa che $e^{r \log\left(\frac{1}{2}+r\right)}$ è un valore assintotico di $\Gamma\left(\frac{1}{2} + r\right)$; quindi per r sufficientemente grande si finirà per avere

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} x^{s-1} dx \right| < e^{r^{1+\varepsilon'''}}, \tag{103}$$

essendo ε''' piccolo ad arbitrio.

Da (100), (101), (102), (103) si ricava che, da un certo valore di r in poi, e per ε piccolo quanto si voglia, si avrà

$$|\xi(t)| < e^{|t^2|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}. \tag{104}$$

Essendo $\xi(t)$ una funzione pari di t, i valori che essa assume nei punti del semipiano, in cui $\mathcal{R}(s) > \frac{1}{2}$, sono identici ai valori, che assume nei punti simmetrici rispetto al punto $s = \frac{1}{2}$. Quindi la (104) è valida in tutto il piano.

Da essa si raccoglie che l'ordine apparente di $\xi(t)$ rispetto a t^2 non può superare $\frac{1}{2}$; e quindi il genere è zero, il che era da dimostrarsi.

L'assenza dei fattori esponenziali nello sviluppo di $\xi(t)$ in fattori primarii, accerta della esistenza delle radici di $\xi(t)$; lo sviluppo di $\xi(t)$ secondo le potenze ascendenti di t^2 (che si ricava da una delle espressioni (80) rimpiazzando il coseno col suo sviluppo) dando luogo a una serie infinita, assicura che queste radici non sono in numero finito (cfr. § 64).

76. Circa il numero delle radici di ξ, la cui parte reale sia compresa fra 0 e un numero positivo T molto grande, secondo Hadamard, e von Mangoldt.— Oltre a ciò, da considerazioni fatte circa la deduzione della legge di crescenza delle radici da quella dei coefficienti dello sviluppo della funzione intera. Hadamard, trae che

Il rapporto $\frac{1}{|\alpha_\nu|} \frac{\nu}{\log \nu}$ *resta finito, e il suo limite superiore per* ν *infinito è compreso fra* $\frac{1}{7.56}$ *ed* $\frac{e}{4}$.

Di qui risulta che il numero delle radici, la cui parte reale sia compresa fra 0 e un numero positivo T molto grande, è dell'ordine del prodotto $T \log T$.

Questa conclusione dedotta in modo, che pur qualche dubio resta, non giunge a provare la proposizione *a)* di Riemann, giacchè paragonata alla formola ivi data, non costata in questa l'esattezza nè del coefficiente $\frac{1}{2\pi}$ di $T \log T$, nè quella del termine consecutivo in T.

La proposizione *a)* si trova ineccepibilmente stabilita nella prima parte della memoria:

von Mangoldt — Zu Riemanns Abhandlung « Ueber di Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze ». *Crelle Journal fur die r. u. a. M.* Bd. CXIV, p. 255, 1896.

In questa dopo lunghe calcolazioni e ingegnose considerazioni si arrivano a porre in sodo i risultati:

1.° *L'equazione* $\xi(t) = 0$ *non ammette nessuna radice, la cui parte reale, presa in valore assoluto, sia* $\leqq 12$.

2.° *Per tutti i valori del numero reale* T, *superiori a* 12, *il numero delle radici dell'equazione* $\xi(t) = 0$, *le cui parti reali sono positive, e non più grandi di* T, *è rappresentato dall'espressione*

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{5}{4} + \eta \left[0{,}34 (\log T)^2 + 1{,}35 \log T + 1{,}33 \right],$$

dove η *indica un numero compreso fra* -1 *e* $+1$, *e dove, allorchè si presentano radici multiple, ciascuna è contata per tante unità quante ne contiene il suo ordine di multiplicità.*

3.° *L'equazione* $\xi(t)=0$ *ammette almeno una radice, la cui parte reale è compresa fra* 0 *e* 53 (cfr. VIII, 71).

Queste proprietà, per quanto importanti per lo studio della funzione $\xi(t)$, e per la calcolazione delle sue radici, non occorrono, come s'è osservato nel § 74, per dedurre lo sviluppo

$$\xi(t)=\xi(0)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\alpha_\nu^2}\right),$$

e quindi la formola (88). Ecco perchè stimo opportuno limitarmi a questo cenno.

La proposizione *a)* trovasi anche dedotta. come caso particolare, nelle recenti ricerche:

Borel — Sur les zéros des fonctions entières. *Acta Mathematica.* Vol. XX, p. 395, 1897.

Riguarda pure gli enunciati *a)* e *c)* la nota

Franel — Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann, et son application à l'arithmétique. *Festschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich-Vierteljahrsschrift.* Jahrgang XLI; Zweiter Theil, p. 7, 1896.

In essa si cerca di giungere al risultato finale sviluppando più da vicino il pensiero di Riemann; ma, pur prescindendo da qualche dubio, che lasciano i ragionamenti, essi sono fondati sulla proposizione *b)*, che rimane non ancora provata.

77. Realità delle radici α secondo Stieltjes, Mertens e Jensen. — Relativamente a questo enunciato *b)* va letta la breve nota:

Stieltjes — Sur une fonction uniforme. *Comptes rendus des s. d. l'A. d. s.* T. CI, p. 153, 1885.

In essa si osserva che la proposizione riuscirebbe provata, dimostrato che si fosse che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$ è convergente, e definisce una funzione analitica fin quando $\mathcal{R}(s)>\frac{1}{2}$. Imperocchè, se questo fosse accertato, s'avrebbe (cfr. VIII, 70)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

In conseguenza $\zeta(s)$ non potrebbe annullarsi allorchè $\mathcal{R}(s)>\frac{1}{2}$. Non potrebbe esistere una radice s' di $\zeta(s)$ con $\mathcal{R}(s')<\frac{1}{2}$, giacchè in virtù della relazione funzionale di Schlömilch (cfr. VIII, 62) s'avrebbe $\zeta(1-s')=0$, il che non potrebbe avvenire giacchè $\mathcal{R}(1-s')>\frac{1}{2}$; e per conseguenza tutte le radici non reali di $\zeta(s)$ dovrebbero aver la forma $\frac{1}{2}+bi$ con b reale.

Però lo Stieltjes asserisce d'essere in possesso della convergenza suenunciata, ma tale dimostrazione l'autore, omai defunto, non l'ha pubblicata.

Il Mertens nella nota citata nel (VIII, 73) mostra come la convergenza in quistione può dedursi quale conseguenza della sua proposizione empirica.

Ha fatto risorgere la speranza di avere fra non molto una dimostrazisne della proposizione *b)* la nota

Jensen — Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. *Acta Mathematica*. Vol. XXII, p. 359, 1899.

In essa l'autore considera una funzione meromorfa in una regione del piano, che contiene nel suo interno il punto $c = 0$, nel quale la funzione non sia nè zero, nè infinita. Siano poi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tutti gli zeri, e $b_1, b_2, \ldots, b_m$ tutti i poli della funzione situati all' interno, o sulla circonferenza d'un circolo $|z| = r$ compreso tutto nella regione assegnata: di questi zeri, e di questi poli ciascuno va contato tante volte quante l' indica il suo grado di multiplicità.

Con tali notazioni il teorema, cui egli perviene mediante semplicissima dimostrazione, è espresso dalla eguaglianza

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{\theta i})|\,d\theta = \log|f(0)| + \log\frac{r^{n-m}|b_1 b_2 \ldots b_m|}{|a_1 a_2 \ldots a_n|}.$$

Se $f(z)$ è una funzione intera, si può scegliere r grande quanto piace, e, supposto che non vi siano zeri all' interno del cerchio, il secondo membro dell'ultima eguaglianza si riduce al suo primo termine, che è costante. Si ha così un criterio prezioso per decidere sull' assenza di radici di una funzione intera all' interno d'un cerchio. In fine della nota l'autore annunzia che mediante le sue ricerche sulle serie di Dirichlet, e applicando il precedente teorema è riuscito a provare che la funzione $\xi(t)$ non ha zeri in un qualunque cerchio avente il centro al finito sull'asse immaginario e passante per l' origine: il che equivale ad affermare che tutte le radici di $\xi(t)$ sono reali. Ma si riserva di far conoscere la dimostrazione annunziata, dopo che avrà terminata la redazione d'una memoria sulle funzioni numeriche. Soggiunge che ivi egli dedurrà per la funzione $\vartheta(n)$ la formola

$$\vartheta(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\log \nu} + \rho_n,$$

essendo

$$\lim_{n=\infty} \frac{|\rho_n|}{(\sqrt{n})^{1+\varepsilon}} = 0, \quad (\varepsilon > 0),$$

e non essendo d'altra parte ρ_n d'un ordine più piccolo di $\sqrt{n}$ (cfr. l'enunciato di Dirichlet, III, 18 e V, 30).

78. Dimostrazione rigorosa della formola di Riemann data da von Mangoldt. Dissertazione di Piltz. — Vengo ora alla lacuna più grave della memoria di Riemann indicata nel (VIII, 67). Questa resterebbe colmata, dimostrando che la serie

$$\sum_\alpha \left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right) \right\},$$

per l'ordinamento delle α specificato nel (VIII, 64), converge, ed ha per somma quella indicata da Riemann.

Però il von Mangoldt, nella seconda parte della memoria citata a § 76, prende le mosse da ben più lontano, sicchè riesce a provare la formola (88) per una via totalmente diversa da quella tracciata da Riemann.

A riassumere questa importantissima investigazione nella forma più breve, comincerò col dare le definizioni di alcune funzioni, che conviene preliminarmente introdurre, e mi limiterò ad enunciare alcune proprietà fondamentali. Poscia definita una funzione $g(x, r)$, la quale pel valore 0 di r si riduce alla funzione $f_1(x)$ di Riemann, esporrò nei suoi particolari il ragionamento per mezzo del quale, si deduce una formola, che esibisce il valore della $g(x, r)$; in questa formola, ponendo $r = 0$, si trarrà come caso speciale quella di Riemann.

a) Definizione della funzione $\mathrm{L}(n)$. Sia n un numero intero, che può prendere tutti i valori positivi, il simbolo $\mathrm{L}(n)$ indicherà una funzione di n definita dalle tre seguenti equazioni

$$\mathrm{L}(1) = 0 \quad ; \quad \mathrm{L}(n) = 0 \, ,$$

se n ammette almeno due fattori primi differenti;

$$\mathrm{L}(n) = \log p \, , \qquad \text{se} \qquad n = p^{\alpha} \, ,$$

p indicando, come al solito, un numero primo

b) Definizione della funzione $\Lambda(x, \rho)$. Siano x e ρ due numeri reali, e sia $x > 1$. Col simbolo $\Lambda(x, \rho)$ si indichi una funzione definita dall'eguaglianza

$$\Lambda(x, \rho) = \sum_{n=1}^{\mathrm{E}(x)} \frac{\mathrm{L}(n)}{n^{\rho}} \, ,$$

se x non è potenza intera d'un numero primo; e invece dall'altra

$$\Lambda(x, \rho) = \sum_{n=1}^{x} \frac{\mathrm{L}(n)}{n^{\rho}} - \frac{1}{2} \frac{\mathrm{L}(x)}{x^{\rho}} \, ,$$

se x è potenza intera d'un numero primo.

c) Definizione delle funzioni $\mathrm{W}_{\nu}(x, \rho)$. Le funzioni $\mathrm{W}_{\nu}(x, \rho)$ sono quelle costruite per mezzo delle radici α_{ν} (cfr. VIII, 64) mediante la formola

$$\mathrm{W}_{\nu}(x, \rho) = \frac{2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_{\nu}^2} - 2x^{-\rho + \frac{1}{2}} \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}\right) \cos(\alpha_{\nu} \log x) - \alpha_{\nu} \operatorname{sen}(\alpha_{\nu} \log x)}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_{\nu}^2}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

d) Teorema. Allorchè i termini della serie $\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{W}_{\nu}(x, \rho)$ sono ordinati secondo la successione dei valori crescenti dell' indice ν, questa serie è convergente

per tutti i valori reali di ρ, e per tutti i valori reali positivi di x, e allorchè $x > 1$, la sua somma è rappresentata dalla espressione

$$-\mathrm{A}(x,\rho)+\frac{1-x^{1-\rho}}{\rho-1}-\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{2}\mathrm{C}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho+2nx^{-\rho-2n}}{2n(\rho+2n)},$$

dove C è la costante d'Eulero, e dove nel caso che un valor particolare di ρ faccia assumere al termine $\frac{1-x^{\rho-1}}{\rho-1}$, o ad un termine $\frac{\rho+2nx^{-\rho-2n}}{2n(\rho+2n)}$ della sommatoria, la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, questi termini saranno rimpiazzati rispettivamente dai valori limiti corrispondenti $\log x$, $\frac{1}{2n}-\log x$.

Questo teorema fornisce per la funzione $\mathrm{A}(x,\rho)$ la formola

$$(105)\qquad \mathrm{A}(x,\rho)=\frac{1-x^{1-\rho}}{\rho-1}-\frac{1}{2}\log\pi-\frac{1}{2}\mathrm{C}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho+2nx^{-\rho-2n}}{2n(\rho+2n)}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{W}_\nu(x,\rho).$$

e) Teorema. La serie $\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{W}_\nu(x,\rho)$ può essere rappresentata come somma di due parti, delle quali una

$$2\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1-x^{-\rho+\frac{1}{2}}\cos(\alpha_\nu\log x)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}-\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x^{-\rho+\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu\left[\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2\right]}\right\}$$

per tutti i valori positivi di x converge assolutamente ed uniformemente, mentre l'altra

$$2x^{-\rho+\frac{1}{2}}\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}$$

risulta dalla moltiplicazione della serie convergente non uniformemente $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}$ per un fattore, che è una funzione continua di x.

f) Quando invece nella serie $\sum_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{W}_\nu(x,\rho)$ si considera ρ come variabile, e si dà a x un qualunque valore determinato superiore ad 1, si potrà considerare la detta serie come somma delle parti

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2},\quad -2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu\log x)\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2},\quad -2\sum_{\nu=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\alpha_\nu\left[\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2\right]}$$

$$2x^{-\rho+\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}.$$

Sicchè, dovendo integrare la funzione di ρ rappresentata dalla serie $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} W_\nu(x, \rho)$, si può, anche quando l'intervallo si estenda all' ∞, procedere all'integrazione di ciascun termine delle serie, che figurano come seconda e terza delle parti poc'anzi scritte. La prima sarà integrata dopo aver sostituita ad essa la somma della serie, che vi comparisce, e l'ultima lo sarà mediante l'osservazione che essa è il prodotto di $x^{-\rho+\frac{1}{2}}$ per una funzione indipendente da ρ.

79. — Ciò premesso si introduca una nuova funzione $g(x, r)$ caratterizzata dalle seguenti proprietà:

Se x non è nè un numero primo, nè una potenza intera d'un numero primo sia

$$g(x, r) = \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{L(n)}{\log n} \cdot \frac{1}{n^r},$$

cioè [§ 78, *a)*]

$$g(x, r) = \sum_{\nu=1}^{\theta(x)} \frac{1}{p_\nu^r} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} \frac{1}{p_\nu^{2r}} + \frac{1}{3} \sum_{\nu=1}^{\theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right)} \frac{1}{p_\nu^{3r}} + \cdots.$$

Se poi x è un numero primo, o una potenza intera d'un numero primo, sia

$$g(x, r) = \frac{g(x+0, r) + g(x-0, r)}{2}.$$

Tenendo presente la definizione della funzione $\Lambda(x, \rho)$ (§ 78, *b)*), si ha subito

$$g(x, r) = \int_r^\infty \Lambda(x, \rho) d\rho,$$

e quindi [§ 78, *d)*, equaz. (105), e *f)*] si ricava

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} g(x, r) = & \int_r^\infty \left(\frac{1 - x^{1-\rho}}{\rho - 1} - \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho + 2n x^{-\rho-2n}}{2n(\rho + 2n)} \right) d\rho \\ & - \int_r^\infty \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\left(\rho - \frac{1}{2}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_r^\infty \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}\right) x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu} \int_r^\infty \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu} \int_r^\infty x^{-\rho+\frac{1}{2}} d\rho. \end{aligned} \right.$$

Per trasformare il secondo membro di questa eguaglianza, si ricorre allo svi-

luppo fornito dal teorema *c)* del (VIII, 64) omai stabilito in modo ineccepibile nel § 75; pongavisi $i\left(\frac{1}{2}-\rho\right)$ al posto di t, e si prendano i logaritmi d'ambo i membri: si ha

$$\log\xi(0)+\sum_{\nu=1}^{\infty}\log\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}{\alpha_\nu^2}=\log\xi\left[i\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right],$$

e derivando si ottiene

$$(107)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}=\frac{d\log\xi\left[i\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right]}{d\rho}.$$

Per la (81) (VIII, 64) è

$$\xi\left[i\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right]=(\rho-1)\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\zeta(\rho)\pi^{-\frac{\rho}{2}};$$

d'altra parte si ha per la nota formola di Weierstrass, già altre volte citata,

$$\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho+2n}{2n}+\frac{\rho}{2}\log\frac{n}{n+1}\right),$$

quindi la (107) si trasforma in

$$(108)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}=\frac{1}{\rho-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\rho+2n}+\frac{1}{2}\log\frac{n}{n+1}\right)+\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}-\frac{1}{2}\log\pi.$$

Inoltre

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\int_r^{\infty}\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\int_r^{\infty}x^{-\rho+\frac{1}{2}}d\rho=$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\int_r^{\infty}\frac{\alpha_\nu^2x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho=-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)\int_r^{\infty}\frac{x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho;$$

e per conseguenza tenendo conto di quest' ultima, di (108), e del valore di $\frac{1}{2}C$ (CESÀRO — Analisi Algebrica, p. 147)

$$\frac{1}{2}C=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\log\frac{n}{n+1}\right),$$

la (106) diventa

$$(109)\quad \left\{\begin{aligned} g(x,r) &= \int_r^{\infty}\left(\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-\rho-2n}}{\rho+2n}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right)d\rho \\ &+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos(\alpha_\nu\log x)\int_r^{\infty}\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\operatorname{sen}(\alpha_\nu\log x)\int_r^{\infty}\frac{x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho. \end{aligned}\right.$$

80. — Per l'ulteriore trasformazione di questa formola occorre notare che per $r>1$ nessun termine sotto il primo integrale diventa infinito; mentre per $\rho=1$ diventano infiniti $\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}$, $\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}$, e per $\rho=-2$ lo diventa $\frac{x^{-\rho-2}}{\rho+2}$. Quindi occorre distinguere tre casi

$$1^\circ\ \ r>1\ ,\quad 2^\circ\ \ 1\geq r>-2\ ,\quad 3^\circ\ \ -2>r\ .$$

Nella memoria in esame vengono trattati tutti tre per ottenere la espressione finale della $g(x,r)$ quale che sia r; ma io qui, avendo in mira esclusivamente la deduzione della formola di Riemann, m'occupo solo del 2°.

Chiamando con a un numero arbitrario maggiore di 1, si ha

$$(110)\quad \int_r^{\infty}\left[\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right]d\rho=\int_r^{a}\left[\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right]d\rho-\int_a^{\infty}\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}d\rho+\int_a^{\infty}\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}d\rho\ .$$

Cominciando dall'ultimo integrale si trae facilmente

$$\int_a^{\infty}\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}d\rho=-\int_a^{\infty}\int_x^{\infty}y^{-\rho}dy\,d\rho=-\int_x^{\infty}\int_a^{\infty}y^{-\rho}d\rho\,dy=-\int_x^{\infty}\frac{1}{\log y}\frac{dy}{y^a}\ ,$$

e, ponendo $y=e^u$,

$$(111)\quad \int_a^{\infty}\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}d\rho=-\int_{\log x}^{\infty}\frac{e^{(1-a)u}du}{u}\ .$$

Pel penultimo integrale al secondo membro di (110) si ha subito

$$(112)\quad -\int_a^{\infty}\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}d\rho=\log\zeta(a)\ .$$

Pel primo si ha finalmente

$$\int_r^{a}\left[\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right]d\rho=\int_r^{a}\left\{\frac{x^{1-\rho}-1}{1-\rho}-\left[\frac{1}{\rho-1}+\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right]\right\}d\rho=$$

$$\int_r^{a}\int_1^{x}y^{-\rho}dy\,d\rho-\log(a-1)-\log\zeta(a)+\log[(r-1)\zeta(r)]$$

$$=\int_1^{x}\frac{y^{-r}-y^{-a}}{\log y}dy-\log(a-1)-\log\zeta(a)+\log[(r-1)\zeta(r)]=$$

$$\int_0^{\log x}\frac{e^{(1-r)u}-e^{(1-a)u}}{u}du-\log(a-1)-\log\zeta(a)+\log[(r-1)\zeta(r)]\ ;$$

e poichè è

$$\log(a-1)=\int_2^a \frac{dv}{v-1}=\int_2^a\int_0^\infty e^{-u(v-1)}\,du\,dv=\int_0^\infty\int_2^a e^{-u(v-1)}\,dv\,du=$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du=\int_0^{\log x}\frac{e^{-u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du+\int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du\,;$$

segue che

$$(113)\qquad \int_r^a\left(\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right)d\rho=$$

$$\int_0^{\log x}\frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\,du-\int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}-e^{(1-a)u}}{u}\,du-\log\zeta(a)+\log[(r-1)\zeta(r)]\,.$$

Sostituendo nel secondo membro di (110) i valori dei tre integrali dati rispettivamente da (111), (112), (113) si ottiene dopo alcune riduzioni

$$\int_r^\infty\left(\frac{x^{1-\rho}}{1-\rho}-\frac{\zeta'(\rho)}{\zeta(\rho)}\right)d\rho=\int_0^{\log x}\frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\,du-\int_{\log x}^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du+\log[(r-1)\zeta(r)]\,.$$

Inoltre si ha, giacchè r e quindi ρ supera -2,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\rho-2n}}{\rho+2n}=\int_x^\infty \frac{1}{y^2-1}\,\frac{dy}{y^{\rho+1}}\,,$$

quindi

$$\int_r^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{-\rho-2n}}{\rho+2n}\,d\rho=\int_r^\infty\int_x^\infty \frac{1}{y^2-1}\,\frac{dy}{y^{\rho+1}}\,d\rho=\int_x^\infty\int_r^\infty \frac{1}{y^2-1}\,\frac{d\rho}{y^{\rho+1}}\,dy=\int_x^\infty \frac{1}{y^2-1}\,\frac{1}{\log y}\,\frac{dy}{y^{r+1}}\,;$$

in conseguenza la (109) si trasforma finalmente in

$$(114)\quad\left\{\begin{aligned}g(x,r)=&\int_0^{\log x}\frac{e^{(1-r)u}-e^{-u}}{u}\,du-\int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du+\log[(r-1)\zeta(r)]+\int_x^\infty\frac{1}{y^2-1}\,\frac{1}{\log y}\,\frac{dy}{y^{r+1}}\\&+2\sum_{\nu=1}^\infty\cos(\alpha_\nu\log x)\int_r^\infty\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho-2\sum_{\nu=1}^\infty\alpha_\nu\,\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)\int_r^\infty\frac{x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho\,.\end{aligned}\right.$$

81. — Se in questa si pone $r=0$, si deduce, tenendo presente la seconda delle (76) (VIII, 60),

$$(115)\quad\left\{\begin{aligned}g(x,0)=&\int_0^{\log x}\frac{e^{u}-e^{-u}}{u}\,du-\int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du-\log 2+\int_x^\infty\frac{1}{y^2-1}\,\frac{1}{\log y}\,\frac{dy}{y}\\&+2\sum_{\nu=1}^\infty\cos(\alpha_\nu\log x)\int_0^\infty\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho-2\sum_{\nu=1}^\infty\alpha_\nu\,\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)\int_0^\infty\frac{x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}\,d\rho\,.\end{aligned}\right.$$

Ora per la definizione della funzione $g(x, \rho)$ (§ 79), se x non è un numero primo, nè potenza intera d'un numero primo, è

$$g(x, 0) = \theta(x) + \frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots = \theta_1(x) = f_1(x) ;$$

se invece x eguaglia una potenza intera d'un numero primo, è

$$g(x, 0) = \frac{g(x+0, 0) + g(x-0, 0)}{2} = \frac{f_1(x+0) + f_1(x-0)}{2} = f_1(x) .$$

Inoltre si ha

$$\int_0^{\log x} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \lim_{h=1} \left[\int_{\log h}^{\log x} \frac{e^u du}{u} + \int_{\log \frac{1}{x}}^{\log \frac{1}{h}} \frac{e^u du}{u} \right] + \int_{\log 0}^{\log \frac{1}{x}} \frac{e^u du}{u}$$

$$= \lim_{h=1} \left\{ \int_h^x \frac{dy}{\log y} + \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{h}} \frac{dy}{\log y} \right\} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dy}{\log y} = \lim_{h=1} \left\{ \int_h^x \frac{dy}{\log y} + \int_0^{\frac{1}{h}} \frac{dy}{\log y} \right\} =$$

$$\text{valor principale di} \int_0^x \frac{dy}{\log y} = \mathrm{Li}(x) .$$

Laonde, tenendo anche presente la (90) (cfr. VIII, 68) la (115) si trasforma finalmente in

$$(88) \quad f_1(x) = -\log 2 + \int_x^{\infty} \frac{dy}{y(y^2-1)\log y} + \mathrm{Li}(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha_\nu i}\right) + \mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right) \right\},$$

che è la formola di Riemann, la quale si trova così dimostrata in modo inattaccabile: non reggendo l'objezione che DE LA VALLÉE POUSSIN (Recherches analytiques etc. I Partie. p. 70. nota a piè di pagina) avea temuto potersi fare contro la dimostrazione del teorema *d*, § 78; cosa che lo stesso autore ha poi riconosciuto nella nota a piè della pag. 119 della III parte della medesima opera.

82. — Alla lacuna colmata dalla memoria di von Mangoldt nel modo, che ora ho finito d'esporre, avea però già provveduto se non con tanti sviluppi, almeno nella parte sostanziale, una pubblicazione precedente cioè

PILTZ — Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und über verwandte Gesetze. *Dissertation zur erlangung der Venia docendi.* Jena, 1884.

Su questa dissertazione, che per la poca diffusione era rimasta inosservata, ha richiamata l'attenzione degli studiosi il BACHMANN nella Zahlentheorie (Appendice al vol. II, p. 487). Però se da una parte va riconosciuto al Piltz d'essere pel primo penetrato più profondamente nel pensiero di Riemann, non può negarsi che riesce più agevole pervenire agli stessi risultati, seguendo gli sviluppi di von Mangoldt.

Ritornerò sulla dissertazione di Piltz a proposito del problema più generale, di cui parlerò nel Capitolo XI.

CAPITOLO X.

83. Valore completo di $\sum_{i=1}^{\vartheta(x)} \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{p_i^2} + \cdots$. **Osservazione di Kluyver. —** Il possesso della formola di Riemann rende possibile di trovare le espressioni complete di funzioni, per le quali, non erano noti che valori assintotici, come pure agevola a stabilire con tutto rigore le formole assintotiche, che s'erano rinvenute ammettendo come postulato l'esistenza del limite. Ed in primo luogo noto come la formola (114) di von Mangoldt fornisce il valore completo della somma

$$\sum_{i=1}^{\vartheta(x)} \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{3}})} \frac{1}{p_i^3} + \cdots .$$

Infatti, posto nella (114) $r = 1$, si ha

$$g(x, 1) = \int_0^{\log x} \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_x^{\infty} \frac{dy}{(y^2 - 1) y^2 \log y}$$

$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_1^{\infty} \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}\right) x^{-\rho + \frac{1}{2}}}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x) \int_1^{\infty} \frac{x^{-\rho + \frac{1}{2}}}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho .$$

Ma si ricava facilmente

$$\int_0^{\log x} \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \log \log x - \lim_{u=\infty} \left[\log u - u + \frac{u^2}{2 . 2!} - \frac{u^3}{3 . 3!} + \cdots \right],$$

e si ha d'altronde per la costante d'Eulero C l'espressione (Pascal — Repertorio I, p. 496)

$$C = - \int_0^{\infty} \left(e^{-u} - \frac{1}{1 + u} \right) \frac{du}{u} = - \lim_{u=\infty} \left(\log u - u + \frac{u^2}{2 . 2!} - \frac{u^3}{3 . 3!} + \cdots \right),$$

quindi ricordando il significato di $g(x, 1)$ (IX, 79) si deduce

$$(116) \quad \sum_{i=1}^{\vartheta(x)} \frac{1}{p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{3}})} \frac{1}{p_i^3} + \cdots = \log \log x + C + \int_x^{\infty} \frac{dy}{(y^2 - 1) y^2 \log y}$$

$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos(\alpha_\nu \log x) \int_1^{\infty} \frac{\left(\rho - \frac{1}{2}\right) x^{-\rho + \frac{1}{2}}}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2} d\rho - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x) \int_1^{\infty} \frac{x^{-\rho + \frac{1}{2}} d\rho}{\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2},$$

che è la formola cercata (cfr. § 89 in fine).

A proposito dell' eguaglianza (116) va fatta la seguente utile osservazione. Valutando delle funzioni simmetriche dei numeri primi non superiori ad x, si trova un gruppo di termini dipendenti dalle α_ν. La parte più importante di questi è spesso costituita dai termini discontinui, che compariscono nella espressione di $\vartheta_1(x)$, o in quella di $\vartheta(x)$. Supponendo conosciuti i valori di queste ultime due funzioni, ed eliminando i detti termini discontinui, si otterranno delle formole di approssimazione abbastanza soddisfacenti delle considerate funzioni simmetriche. Questo concetto si trova esplicato e messo a partito nella nota

Kluyver — Benaderingsformules betreffende de Priemgetallen beneden eene gegeven Greens. *Verslagen en mededelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen-Amsterdam*, t. VIII, p. 672, 1899-1900.

84. Valore completo della funzione $\psi(x)$ di Tchebichef tratto da Gram, Cahen, e von Mangoldt. — Gram, nel lavoro Undersogelser etc. (già più volte citato, cfr. IV, 25) pubblicato nel 1884, registrò sotto il numero (178) una formola, che forniva il valor completo della funzione $\psi(x)$ di Tchebichef (IV, 26). Posteriormente, nella tesi da me già citata nella nota a piè della pag. 92, Cahen esibì una formola poco diversa per la stessa funzione. Ambedue le deduzioni lasciano a desiderare in quanto a rigore di ragionamento, sicchè è loro da preferirsi quella che ha soggiunto il von Mangoldt nel suo lavoro, di cui trovasi il titolo nel (IX, 76). Da questa apparisce che le formole di Gram, e di Cahen non erano prive di mende.

Ecco dunque il procedimento del tutto corretto.

Dalla definizione della funzione $\Lambda(x, \rho)$ (IX, 78, *b*)) si trae $\Lambda(x, 0) = \psi(x)$, o meglio $\Lambda(x, 0) = \dfrac{\psi(x+0) + \psi(x-0)}{2}$.

Ora da (105) si deduce

$$\Lambda(x, 0) = x - 1 - \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2} - x^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_\nu \log x) + 2\alpha_\nu \operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x)}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2}. \tag{117}$$

Dalla (86) e seguente del (Cap. VIII, § 66) si ha

$$\log\zeta(s) = \log\xi(0) - \log(s-1) + \frac{1}{2}Cs + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\log\left(1 + \frac{s}{2m}\right) - \frac{s}{2m}\right] + \frac{s}{2}\log\pi + \sum_{\nu=1}^{\infty}\log\left[1 + \frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2}{\alpha_\nu^2}\right],$$

e derivando si deduce

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{2}C + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2m+s} - \frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{2}\log\pi + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha_\nu^2}.$$

la quale, per $s = 0$, dà

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = 1 + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\log\pi - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{4} + \alpha_\nu^2};$$

ma si son trovati (VIII, 60, 61) i valori

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \quad , \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) \; ;$$

dunque

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha_\nu^2} = 1 + \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\log\pi - \log 2 \; ;$$

perciò la (117) diviene

$$\psi(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - x^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_\nu \log x) + 2\alpha_\nu \operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x)}{\frac{1}{4}+\alpha_\nu^2} \; ,$$

che è la formola cercata.

In vista di futura estensione, analogamente a quanto fu fatto per la formola di Riemann (VIII, 68, form. (88')), osservando che $\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{-2m}}{-2m}$, la precedente formola potrà scriversi

$$\psi(x) = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + x - \sum_{c} \frac{x^c}{c} \; ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutti gli 0 di $\zeta(s)$ (cfr. XI, 110).

Per mezzo della (91) (VIII, 69) poi si ha

$$\lambda(x) = \sum \mu(n)\, \psi(x^{\frac{1}{n}}) \; .$$

85. Ricerca dei valori assintotici di $\psi(x)$, e $\lambda(x)$ secondo Hargreave, Halphen, Cahen, Cesàro, Hadamard, de la Vallée Poussin, e Mertens. Limitazione dell'ordine di grandezza delle differenze $\psi(x) - x$, $\lambda(x) - x$ secondo de la Vallée Poussin. — Sebbene le precedenti espressioni per $\psi(x)$, $\lambda(x)$ siano più semplici di quelle relative ad $f_1(x)$, $f(x)$, pure la presenza delle radici α ne rende difficile la calcolazione; perciò non sono senza importanza le formole, che offrono valori assintotici per $\psi(x)$, $\lambda(x)$.

Hargreave, fin dal 1849, nel primo dei suoi lavori da me più sopra esaminati (cfr. VII, 49), con argomentazione non rigorosa, dedusse essere x il valore per $\lambda(x)$.

Halphen nella nota

Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques. *Comptes rendus des s. de l'A. d. s.* Vol. XCVI, p. 634, 1883

asserì d'aver pronta una dimostrazione inattaccabile della proposizione

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = 1 \; .$$

Nel 1894 Cahen nella tesi citata a piè della pag. 92 ridusse la quistione della valutazione assintotica di $\lambda(x)$, e $\psi(x)$ alla determinazione dell' integrale

$\int \frac{x^s}{s} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$ lungo un certo contorno racchiudente il punto 1; ma la sua argomentazione non è solidamente basata, giacchè richiede la sicurezza che in prossimità della retta $\mathfrak{R}(s) = 1$ non vi siano radici di $\zeta(s)$; sicurezza, che neppure può aversi ora che s'è trovato un limite superiore più basso di 1 della parte reale delle radici non reali di $\zeta(s)$ (VIII, 63); giacchè detto limite tende a 1, quando il coefficiente di i nella parte immaginaria cresce indefinitamente.

La proposizione $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = 1$ si trova pure dimostrata, data l'esistenza del limite, nella nota di Cesàro già citata nel (VI, 47).

Ma dove le due eguaglianze

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = 1 \quad , \quad \lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

sono state la prima volta dimostrate, senza nulla ammettere, si è al N. 54 del lavoro di de la Vallée Poussin Recherches analytiques etc. (già più volte ricordato cfr. VIII, 61). Quasi contemporaneamente Hadamard nei lavori, di cui ho riportato i titoli nel (VIII, 63) dimostra la proposizione:

La somma $\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum \log p \left(\log \frac{x}{p}\right)^{\mu-1}$ *estesa ai numeri primi inferiori ad* x, *e dove* μ *è supposta maggiore di* 1, *è assintotica ad* x; e poscia fa vedere come in questa è contenuta, come caso particolare, quella relativa al valore assintotico di $\lambda(x)$.

Riferisco la dimostrazione di de la Vallée-Poussin, che apre l'adito a ulteriori conseguenze. Però assumo come dimostrata (cfr. il N. 54 della I parte delle Recherches analytiques etc.) l'eguaglianza

$$\sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = \log y - C - 1 + \varepsilon , \tag{118}$$

dove ε indica qui e nel seguito di questo Capitolo una funzione, che tende a 0, quando la variabile y cresce all'∞, senza che le varie funzioni indicate dal medesimo simbolo ε in successive relazioni siano astrette a prendere lo stesso valore.

Moltiplico ambo i membri di (118) per dy, integro fra 1 ed x, e divido per x; ottengo

$$\frac{1}{x} \int_1^x dy \sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \frac{1}{x} \int_1^x \frac{dy}{y} \sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = \frac{1}{x} \int_1^x \log y \, dy - (C+1) \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x \varepsilon \, dy .$$

Ora è

$$\frac{1}{x} \int_1^x \log y \, dy = \log x - 1 + \frac{1}{x} ;$$

d'altra parte

$$\frac{1}{x} + \frac{C+1}{x} + \frac{1}{x} \int_1^x \varepsilon \, dy$$

tende a 0 per x eguale ad ∞; perciò la precedente eguaglianza può scriversi

$$(119)\qquad \frac{1}{x}\int_1^x dy \sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \frac{1}{x}\int_1^x \frac{dy}{y}\sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = \log x - 2 - C + \varepsilon .$$

Calcoliamo ora il primo degl'integrali, che stanno al primo membro. Cominciamo dallo spezzare l'intervallo da 1 a x negl' intervalli da 1 a p_1, da p_1 a $p_2, \ldots$, da $p_{\theta(x)}$ ad x, ed osserviamo che la funzione $\sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1}$ nel primo intervallo parziale è nulla, e lungo gli altri assume ordinatamente i valori costanti

$$\frac{\log p_1}{p_1 - 1}, \quad \frac{\log p_1}{p_1 - 1} + \frac{\log p_2}{p_2 - 1}, \ldots, \frac{\log p_1}{p_1 - 1} + \frac{\log p_2}{p_2 - 1} + \cdots + \frac{\log p_{\theta(x)}}{\log p_{\theta(x)} - 1} ;$$

perciò

$$\int_1^x dy \sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} = \frac{1}{x}\left\{ \frac{\log p_1}{p_1 - 1}(p_2 - p_1) + \left(\frac{\log p_1}{p_1 - 1} + \frac{\log p_2}{p_2 - 1}\right)(p_3 - p_2) + \cdots + \left(\frac{\log p_1}{p_1 - 1} + \frac{\log p_2}{p_2 - 1} + \cdots + \frac{\log p_{\theta(x)}}{p_{\theta(x)} - 1}\right)(x - p_{\theta(x)}) \right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left\{ \frac{\log p_1}{p_1 - 1}(x - p_1) + \frac{\log p_2}{p_2 - 1}(x - p_2) + \cdots + \frac{\log p_{\theta(x)}}{p_{\theta(x)} - 1}(x - p_{\theta(x)}) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{p_i}{p_i - 1}\log p_i = \sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} - \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i - \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} ;$$

e quindi in virtù di (118)

$$(120)\qquad \frac{1}{x}\int_1^x dy \sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} = \log x - C - 1 + \varepsilon - \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} .$$

D'altra parte la (118), combinata col primo lemma di Mertens (VII, 51), dà

$$\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} < \frac{1}{x}(\log x - C + 1 + \varepsilon) ;$$

perciò $\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i - 1}$ tende a 0 per $x = \infty$; dunque, per la (120),

$$\frac{1}{x}\int_1^x dy \sum_{i=1}^{\theta(y)} \frac{\log p_i}{p_i - 1} = \log x - C - 1 + \varepsilon .$$

Sostituendo questo valore in (119), e riducendo si trae

$$\int_1^x \frac{dy}{y}\sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = (1 + \varepsilon)x .$$

Sia ora k un numero positivo dato indipendente da x, e arbitrariamente piccolo; si cambii nella precedente eguaglianza x in $(1+k)x$; si avrà, tenendo presente quanto s'è convenuto sul simbolo ε,

$$\int_1^{(1+k)x} \frac{dy}{y} \sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = (1+\varepsilon)(1+k)x \ .$$

Da questa si sottragga la precedente, e si divida il risultato per kx, si otterrà

$$\frac{1}{kx}\int_x^{(1+k)x} \frac{dy}{y} \sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i = 1+\varepsilon \ .$$

Ora la funzione $\sum\limits_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i$ sempre positiva è costante o crescente nell'intervallo dell'integrazione, propriamente costante nei punti, in cui la variabile non è un numero primo, crescente nei punti, in cui la variabile eguaglia un numero primo: quindi

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i \int_x^{(1+k)x} \frac{dy}{y} \leqq \int_x^{(1+k)x} \frac{dy}{y} \sum_{i=1}^{\theta(y)} \log p_i \leqq \sum_{i=1}^{\theta[(1+k)x]} \log p_i \int_x^{(1+k)x} \frac{dy}{y} \ ,$$

e perciò

$$\frac{\log(1+k)}{kx} \cdot \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i \leqq 1+\varepsilon \leqq \frac{\log(1+k)}{kx} \cdot \sum_{i=1}^{\theta[(1+k)x]} \log p_i \ ;$$

donde

$$\frac{1}{x} \cdot \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i \leqq (1+\varepsilon)\frac{k}{\log(1+k)} \quad , \quad \frac{1}{(1+k)x} \cdot \sum_{i=1}^{\theta[(1+k)x]} \log p_i \geqq \frac{1+\varepsilon}{1+k} \cdot \frac{k}{\log(1+k)} \ ,$$

e, mutando in questa ultima x in $\frac{x}{1+k}$, si ha

$$(1+\varepsilon)\frac{k}{\log(1+k)} \geqq \frac{1}{x} \cdot \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i \geqq \frac{1+\varepsilon'}{1+k} \cdot \frac{k}{\log(1+k)} \ ;$$

e facendo tendere k a 0

$$1+\varepsilon \geqq \frac{1}{x} \cdot \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i \geqq 1+\varepsilon' \ .$$

Se ora x cresce indefinitamente l'espressione $\frac{1}{x}\sum\limits_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i$, cioè $\frac{\lambda(x)}{x}$, tende a un limite, e questo limite è 1; o in altre parole $\lambda(x)$ è assintotico ad x.

Poichè

$$\frac{\psi(x)}{x}=\frac{\lambda(x)}{x}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\frac{\lambda(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\frac{\lambda(x^{\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}}+\ldots$$

si ha pure

$$\lim_{x=\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1\ ,$$

cioè $\psi(x)$ è pure assintoticamente eguale ad x.

Termino notando che Mertens nella nota citata al (Cap. VIII, § 72) ha dedotto che se l' ineguaglianza $\left|\sum_{m=1}^{n}\mu(m)\right|<\sqrt{n}$ è soddisfatta da $n=2$ fino ad $n=x$, si ha $\psi(x)=x+\Delta$, dove Δ è di ordine non superiore a quello di $x^{\frac{3}{4}}\log x$: donde il valore assintotico x di $\psi(x)$ può dedursi come conseguenza della proposizione empirica di Mertens.

86. — La scoperta di un limite superiore, più basso che l'unità, della parte reale delle radici non reali di $\zeta(s)$ (cfr. VIII, 63) ha condotto de la Vallée-Poussin nel medesimo lavoro a un più accurato riconoscimento dei valori dei rapporti $\frac{\psi(x)}{x}, \frac{\lambda(x)}{x}$. Egli ha dimostrato cioè, che, se si pone

$$\frac{\psi(x)}{x}=1+\eta(x)\quad ,\quad \frac{\lambda(x)}{x}=1+\eta_1(x)\ ,$$

$\eta(x)$, $\eta_1(x)$ sono infinitamente piccoli con $\frac{1}{x}$, e d'un ordine di piccolezza almeno eguale a quello della espressione

$$\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}\; e^{-\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}}\ .$$

(Vedi ancora quanto al riguardo è soggiunto nell'appendice al § 90).

Rimando per la dimostrazione all'originale, nel quale si troverà anche provato che, se si pongono

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)}\frac{\log p_i}{p_i^m}+\sum_{i=1}^{\theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}\frac{\log p_i}{p_i^m}+\sum_{i=1}^{\theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}\frac{\log p_i}{p_i^m}+\ldots=\log x-C+\eta_2(x)$$

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)}\frac{\log p_i}{p_i-1}=\log x-C+\eta_3(x)\ ,$$

$\eta_2(x)$, ed $\eta_3(x)$ godono della medesima proprietà di $\eta(x)$, $\eta_1(x)$.

87. Dimostrazione di Cahen del teorema di Sylvester-Stieltjes espresso dall' eguaglianza $\lim_{x=\infty}\{\theta[x(1+k)]-\theta(x)\}=\infty$. — Notevoli conseguenze possono trarsi dai risultati esposti nel § 85. Comincio dalla dimostrazione data da Cahen,

nella sua Tesi citata nella nota a piè della pagina 92, di un teorema da lui attribuito allo Stieltjes senza precisar data, e che è stato pure formulato da Sylvester nel 1881 (cfr. IV, 28).

Detto teorema è:

La totalità dei numeri primi compresi fra x *e* (1 + k)x, *per piccolo che sia* k, *cresce indefinitamente con* x.

Ecco come Cahen dimostra tale verità. Dal § 84 si trae

$$\sum_{i=\theta(x)}^{\theta[x(1+k)]} \log p_i = x(k+\varepsilon) ,$$

donde

$$\theta[x(1+k)] - \theta(x) > \sum_{i=\theta(x)}^{\theta[x(1+k)]} \frac{\log p_i}{\log[x(1+k)]} = \frac{x(k+\varepsilon)}{\log[x(1+k)]} ;$$

ma

$$\lim_{x=\infty} \frac{x(k+\varepsilon)}{\log[x(1+k)]} = \infty ,$$

in conseguenza

$$\lim_{x=\infty} \{ \theta[x(1+k)] - \theta(x) \} = \infty .$$

88. Prove complete di de la Vallée-Poussin, e von Mangoldt delle eguaglianze

$$\lim_{x=\infty} \frac{\theta(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1 , \quad \lim_{x=\infty} \frac{\theta_1(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1 .$$

Limitazione dell'ordine di grandezza delle differenze $\mathrm{Li}(x) - \theta_1(x)$, $\mathrm{Li}(x) - \theta(x)$ secondo de la Vallée-Poussin. — Ma più importante corollario è la dimostrazione rigorosa, che prima mancava, delle eguaglianze

$$\lim_{x=\infty} \frac{\theta(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1 , \quad \lim_{x=\infty} \frac{\theta_1(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1 .$$

Queste non risultavano dalle ricerche esposte nei Cap. IV e V, giacchè queste presuppongono l'esistenza del limite, nè da quelle di Riemann, giacchè questi col proposito di provare che nelle radici $a_\nu + b_\nu i$ di $\zeta(s)$ è $a_\nu = \frac{1}{2}$ (cfr. VIII, 64), non avea tentato di dimostrare almeno essere $a_\nu < 1$, il che basta per la deduzione in discorso, come tra poco si vedrà (§ 89).

De la Vallée-Poussin ha dunque dedotto le precedenti eguaglianze come conseguenze del risultato riferito a § 85. Dalla eguaglianza

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i = 1$$

ricavasi

$$(121) \qquad \sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i = (1+\varepsilon)x\ ,$$

ε essendo, come al solito, una funzione di x, che s'annulla per $x=\infty$. Ora poichè per $i \leqq \theta(x)$ è $\log p_i < \log x$, si trae

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i < \theta(x) . \log x$$

e quindi in virtù di (121)

$$(122) \qquad \theta(x) > (1+\varepsilon)\frac{x}{\log x}\ .$$

Si ha evidentemente

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i > \sum_{i=\theta\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)+1}^{\theta(x)} \log p_i\ .$$

Il numero dei termini della somma al 2° membro è $\theta(x) - \theta\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$; e poichè

$$\theta\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) < \frac{x}{(\log x)^2}\ ,$$

il detto numero di termini è maggiore di $\theta(x) - \frac{x}{(\log x)^2}$. D'altra parte ogni termine supera $\log \frac{x}{(\log x)^2}$, cioè $\log x - 2\log\log x$; dunque si ha con maggiore ragione

$$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \log p_i > \left(\theta(x) - \frac{x}{(\log x)^2}\right)(\log x - 2\log\log x)\ ;$$

donde per la (121)

$$\frac{(1+\varepsilon)x}{\log x - 2\log\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} > \theta(x)\ .$$

Questa e la (122) dànno dunque luogo a

$$(1+\varepsilon)\frac{\frac{x}{\log x}}{\mathrm{Li}(x)} < \frac{\theta(x)}{\mathrm{Li}(x)} < \left(\frac{1+\varepsilon}{1-2\frac{\log\log x}{\log x}} + \frac{1}{\log x}\right)\frac{\frac{x}{\log x}}{\mathrm{Li}(x)}\ .$$

Per $x=\infty$ le quantità rappresentate dalle espressioni estreme tendono ad 1 (IV, 24, nota), quindi

$$\lim_{x=\infty} \frac{\theta(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1\ .$$

Ora poichè

$$\theta_1(x) = \theta(x) + \frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}}) + \dots\ ,$$

si deduce

$$\frac{\theta_1(x)}{\mathrm{Li}(x)}=\frac{\theta(x)}{\mathrm{Li}(x)}+\frac{1}{2}\,\frac{\theta(x^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}})}\cdot\frac{\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}})}{\mathrm{Li}(x)}+\frac{1}{3}\,\frac{\theta(x^{\frac{1}{3}})}{\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}})}\,\frac{\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{3}})}{\mathrm{Li}(x)}+\cdots$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty}\frac{\theta_1(x)}{\mathrm{Li}(x)}=1\,.$$

Naturalmente le due eguaglianze vanno estese pure alle due funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ di Riemann. Ecco dunque dimostrato rigorosamente il fatto che la differenza fra il logaritmo integrale e ciascuna delle funzioni $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ (o ciascuna delle $f(x)$, $f_1(x)$) finisce per annullarsi relativamente alle stesse $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ (oppure $f(x)$, $f_1(x)$).

89. — Dopo la pubblicazione del libro di de la Vallée-Poussin riuscì a von Mangoldt di dedurre il teorema ora dimostrato dalla stessa formola di Riemann. Tale investigazione si trova pubblicata nel lavoro:

von Mangoldt — Ueber eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze. *Crelle-Fuchs Journal fur die r. u. a. M.* Vol. CXIX, p. 65, 1898.

Essendo oltremodo interessante l'apprezzamento dell'ordine di grandezza delle varie parti della formola di Riemann credo opportuno riferire sommariamente le argomentazioni di von Mangoldt.

Egli comincia dall'osservare che dalla formola più sopra indicata con (**117**) si trae

$$\lim_{x=\infty}\left\{x^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\right\}=0\,. \tag{123}$$

Nota poi che la (115) dopo agevoli trasformazioni può scriversi

$$g(x,0)=\mathrm{Li}(x)+\int_x^{\infty}\frac{dy}{(y^2-1)y\log y}-\log 2-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}\left\{\left(1-\frac{2}{\log x}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\log x}+\frac{4}{(\log x)^2}\right)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\right\}-$$

$$-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{\cos(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}\int_0^{\infty}\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^3x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho+\frac{\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}\int_0^{\infty}\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^4x^{-\rho+\frac{1}{2}}}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}d\rho\right\},$$

dalla quale dopo varii artifizii si ricava

$$\left|\frac{f(x)-\mathrm{Li}(x)}{f(x)}\right|<\frac{2\log x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{\log x}{x^2}+\frac{2\log 2\,.\,\log x}{x}+4\left|x^{-\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu}\right|+$$

$$+4\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}\right|+3\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\alpha_\nu^2}\right|\,.$$

Se $a_\nu + b_\nu i$ sono gli zeri non reali di $\zeta(s)$ si ha

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\cos(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu^2}\right| = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^{-2a_\nu}+x^{-2(1-a_\nu)}+2x^{-1}\cos(2b_\nu \log x)}}{b_\nu^2+\left(\frac{1}{2}-a_\nu\right)^2}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(\alpha_\nu \log x)}{\alpha_\nu^2}\right| = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^{-2a_\nu}+x^{-2(1-a_\nu)}-2x^{-1}\cos(2b_\nu \log x)}}{b_\nu^2+\left(\frac{1}{2}-a_\nu\right)^2}.$$

Per l'uniforme convergenza di queste due ultime serie, e per essere $a_\nu < 1$, risulta che queste due sommatorie tendono a 0 per $x = \infty$; ricordando poi la (123), si conchiude

$$\lim_{x=\infty}\left|\frac{f(x)-\mathrm{Li}(x)}{f(x)}\right| = 0$$

che è il risultato già ottenuto nel § precedente.

Lo stesso metodo applicato alla (116) conduce da questa alla formola

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{i=1}^{\vartheta(x)}\frac{1}{p_i} - \log\log x\right) = \mathrm{C} - \mathrm{A}\ ,$$

già trovata nel (VII, 50, 51).

90. — La dimostrazione di von Mangoldt riassunta nel § precedente, sebbene più lunga di quella di de la Vallée-Poussin, supera questa in quanto che fornisce qualche indicazione dippiù circa l'ordine col quale $\frac{f(x)-\mathrm{Li}(x)}{f(x)}$ diventa infinitamente piccolo.

Però il de la Vallée-Poussin nella più recente sua pubblicazione (cfr. VIII, 63) ha data dell' importante teorema una nuova dimostrazione, che vince alla sua volta quella di von Mangoldt, giacchè si prova inoltre che le differenze $\mathrm{Li}(x)-\theta_1(x)$, $\mathrm{Li}(x)-\theta(x)$ non possono essere d'un ordine di grandezza superiore a quello della funzione

$$\frac{x}{\log x}\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}\ e^{-\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}}\ .$$

Troppo lungo sarebbe il riportare qui i ragionamenti, che conducono a questa conchiusione. Richiamo solo l' attenzione del lettore sulla importanza di questa, giacchè essa, soggiunge il de la Vallée-Poussin, conduce alla conseguenza interessantissima:

Il logaritmo integrale è una espressione assintotica di $\theta(x)$ *più esatta di tutte le sue espressioni possibili sotto forma finita.*

Per dedurre questa io noto che basta far vedere che la deviazione, cui dà luogo il logaritmo integrale finisce per diventare e mantenersi minore di quella offerta da qualunque espressione assintotica di $\mathrm{Li}(x)$ in termini finiti. Ed in vero

ricordando la legge assintotica (cfr. IV, 24, nota)

$$\frac{x}{\log x}+\frac{1!\,x}{(\log x)^2}+\frac{2!\,x}{(\log x)^3}+\cdots+\frac{(n-1)!\,x}{(\log x)^n}+\cdots$$

di $\mathrm{Li}(x)$, si vede che qualunque valore assintotico in termini finiti di $\mathrm{Li}(x)$ deve offrire una deviazione da $\theta(x)$ dell'ordine di una certa $\frac{x}{(\log x)^n}$. Ora

$$\lim_{x=\infty}\frac{\frac{x}{\log x}\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}\;e^{-\sqrt{0{,}03282\ldots\log x}}}{\frac{x}{(\log x)^n}}=0\ ,$$

quindi resta provato l'asserto: e rimane decisa in generale la quistione messa da Gauss in particolare, quando pose in paragone il logaritmo integrale col valore dato da Legendre (cfr. III, 17).

Appendice al § 90. Limitazione dell' ordine di grandezza delle differenze $|\psi(x)-x|$, $|\lambda(x)-x|$, $|\vartheta_1(x)-\mathrm{Li}(x)|$, $|\vartheta(x)-\mathrm{Li}(x)|$ secondo von Koch. — Un'elegante memoria venuta a luce il 30 settembre 1900 (cioè dopo la presentazione del presente lavoro) ha aumentata la luce, che i recenti lavori di de la Vallée-Poussin e von Mangoldt aveano già fatta sull'argomento della limitazione dell'ordine di grandezza delle differenze $|\psi(x)-x|$, $|\lambda(x)-x|$, $|\vartheta_1(x)-\mathrm{Li}(x)|$, $|\vartheta(x)-\mathrm{Li}(x)|$.

Essa ci indica alcuni teoremi, che risulteranno definitivamente stabiliti, quando si sarà dimostrato che la parte reale delle radici non reali di $\zeta(s)$ è $\frac{1}{2}$.

Questa nuova memoria è

von Koch — Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica*. Vol. 24, p. 159, 1900, e *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* Vol. CXXX, p. 1243, 1900.

L'autore comincia dal dare delle espressioni nuove per le funzioni $\vartheta_1(x)$, $\psi(x)$, le quali, per lo studio delle quistioni assintotiche, presentano dei vantaggi su quelle, che finora si conoscevano. Queste espressioni sono

$$\vartheta_1(x)=\varepsilon+\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}x^{\nu}\log(\nu s)\ ,\quad \psi(x)=\omega-\lim_{s=\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}x^{\nu s}\frac{\zeta'(\nu s)}{\zeta(\nu s)}\ ,$$

dove ε ed ω sono nulle, se x non è potenza d'un numero primo, e sono invece rispettivamente eguali ad $\frac{1}{\lambda e}$, $\frac{\log p}{e}$, se x è la potenza λ^{esima} del numero primo p.

Combinando poi risultati già ottenuti dai due matematici più sopra citati con sue proprie riflessioni, egli perviene a queste proposizioni:

Le differenze $\left|\frac{\psi(x)}{x}-1\right|$, $\left|\frac{\lambda(x)}{x}-1\right|$ *tendono verso zero per* $x=\infty$, *ed esse sono degl' infinitesimi d'ordine di piccolezza almeno eguale a quelle di* $x^{\sigma-\frac{1}{2}}$, *indicando con* σ *un numero positivo comunque piccolo.*

Le differenze $|\vartheta_1(x)-\mathrm{Li}(x)|$, $|\vartheta(x)-\mathrm{Li}(x)|$ *non possono essere d'un ordine di*

grandezza superiore a quello di $x^{\frac{1}{2}+\sigma}$, σ *indicando un numero positivo comunque piccolo.*

Secondo una osservazione di Phragmén le dette differenze *non possono essere d'un ordine inferiore a* $x^{\frac{1}{2}-\sigma}$.

Che anzi può con maggiore precisione enunciarsi:

Gli errori, che si commettono ponendo

$$\psi(x)=x \quad , \quad \lambda(x)=x$$

sono inferiori a $\sqrt{x}.(\log x)^2$ *moltiplicato per una costante: e quelli, che si commettono scrivendo*

$$\vartheta_1(x)=\mathrm{Li}(x) \quad , \quad \vartheta(x)=\mathrm{Li}(x) \; ,$$

sono inferiori a $\sqrt{x}.\log x$ *moltiplicato per una costante.*

91. Prove non complete di Mertens e Franel. — Il Mertens nella nota citata nel (VIII, 72) fa notare che nella ipotesi che l'ineguaglianza

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\mu(m)\right|<\sqrt{n}$$

valga da $n=2$ fino ad $n=x$, si ha $\theta(x)=\int_2^x \frac{dx}{\log x}+\delta$, dove δ è una grandezza di ordine non superiore a quello di $x^{\frac{3}{4}}$; e in conseguenza il valore assintotico $\mathrm{Li}(x)$ di $\theta(x)$ può anche dedursi come conseguenza della proposizione empirica di Mertens.

Così pure il Franel nella nota citata nel (IX, 76) riconduce la dimostrazione dell'eguaglianza $\theta(x)=\int_2^x \frac{dx}{\log x}+x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\rho(x)$, dove ε è una quantità piccola quanto si voglia, e $\rho(x)$ tende a 0 per $x=\infty$, alla proposizione *b*) del (VIII, 64).

92. Teoremi di Phragmen sul modo di comportarsi delle differenze $f_1(x)-[\mathrm{Li}(x)-\log 2]$, $\psi(x)-[x-\log(2\pi)]$.—Oltre queste varie proposizioni sull'ordine di grandezza di sommatorie estese alle radici α_ν, vanno notati due teoremi del Phragmén connessi ai precedenti, giacchè riguardano il modo di comportarsi delle differenze

$$f_1(x)-[\mathrm{Li}(x)-\log 2] \quad , \quad \psi(x)-[x-\log(2\pi)]$$

al crescere della x. Essi si trovano nella nota

Phragmén — Sur le logaritme intégral et la fonction de Riemann. *Ofversigt af Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar*, annata 1891, p. 599.

Essi stabiliscono il fatto che:

Non v'ha limiti, al di là dei quali le differenze

$$f_1(x)-[\mathrm{Li}(x)-\log 2] \quad , \quad \psi(x)-[x-\log(2\pi)]$$

cessano di cambiar di segno.

Si fa così palese che $\sum_c \int_0^{\infty} \frac{x^{-r+c}}{r-c}\, dr$ (cfr. VIII, 68, form. (88')) oscilla intorno allo zero, o in altre parole che la parte discontinua del secondo membro della formola di Riemann ha un *carattere essenzialmente periodico.* Lo stesso è di $\sum \frac{x^c}{c}$ (cfr. § 84).

93. Cenno delle dimostrazioni di von Mangoldt, Landau, de la Vallée-Poussin del teorema d'Eulero espresso da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$, e della dimostrazione di Landau del teorema di Möbius espresso da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log k = -1$. — Terminerò questo capitolo ritornando, come promisi al § 70, sulle eguaglianze (93), (94).

Già Gram a pag. 198, 291 della sua monografia premiata avea dimostrato che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$ non potea essere divergente, giacchè $\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} = \frac{1}{n} \pm \frac{\eta}{n}$, essendo $0 < \eta < 1$.

La prima dimostrazione completa e rigorosa della (93) si trova nella nota:

von Mangoldt — Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. *Mathematische und Naturwissenschaftliche Mittheilungen aus den Sitzungsberichten der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,* annata 1897, p. 493.

Ivi con alquanta fatica si stabilisce prima la eguaglianza

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\log k}{k} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} \right) \right] = 0 ,$$

e da questa successivamente si trae che i limiti superiore e inferiore, al crescere illimitato di k, della somma $\sum_{\lambda=1}^{k} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda}$ non possono essere nè positivi, nè negativi, quindi

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda} = 0 .$$

Lungo le sue deduzioni von Mangoldt dimostra ancora che

$$\left| \log n . \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log k \right| \leqq 3 + C .$$

Il Landau nella

Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. *Doctordissertation. Berlin,* 1899,

fondandosi su questa relazione, e provando che

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k} \log k}{\log n} = 0 ,$$

deduce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0 .$$

Posteriormente DE LA VALLÉE-POUSSIN nell' ultimo capitolo della pubblicazione, della quale ho riportato il titolo nel (VIII, 63), espone una dimostrazione più istruttiva della medesima proprietà. Essa è fondata sulla eguaglianza

$$(\log x - C) \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{\mu(k)}{k} + \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{\mu(k)}{k} \eta_2\left(\frac{x}{k}\right) = 0 ,$$

la funzione η_2 essendo quella definita al § 86 di questo capitolo.

Da tale relazione si deduce il teorema: La somma $\sum_{k=1}^{E(x)} \frac{\mu(k)}{k}$ tende verso 0, quando x tende verso l'infinito, e il suo valore assoluto resta inferiore a una espressione della forma $\frac{h}{\log x}$, dove h è un numero fisso *).

Finalmente in quanto alla (94) va consultata la comunicazione

LANDAU — Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.*, t. CXXIX, p. 812, 1899.

Definita la funzione $\varepsilon(x)$ mediante l'eguaglianza

$$\frac{1}{x} \sum_{i=1}^{\vartheta(x)} \log p_i = 1 + \varepsilon(x) \quad \text{con} \quad \varepsilon(0) = 0 ,$$

e posto

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = g(x) ,$$

---

*) Nella nota venuta a luce mentre il presente lavoro è alle stampe:

LANDAU — Ueber die asymptotischen Werthe einiger zahlentheoretischer Functionen. *Mathematische Annalen*, Bd. LIV, p. 570, 1901

si esibisce una dimostrazione, che, come quella di de la Vallée-Poussin, prova che

$$\lim_{x=\infty} \left[\log x \,.\, \sum_{k=1}^{E(x)} \frac{\mu(k)}{k} \right] = 0 .$$

Tenendo poi conto dei più recenti risultati di quest'ultimo autore, preziosi per rendere più complete le valutazioni assintotiche, il Landau li applica a varie funzioni, fra cui $\sum_{k=1}^{x} \mu(k)$ (cfr. VIII, 72, MERTENS) per la quale dimostra che essa è al più dell'ordine di grandezza $\frac{x}{\log x \cdot e^{c\sqrt{\log\log x}}}$.

il Landau stabilisce la relazione

$$-\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}\log x = 1+\sum_{\nu=1}^{x}\varepsilon(\nu)\left[g\left(\frac{x}{\nu}\right)-g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right]+\sum_{\nu=1}^{x}\frac{\varepsilon(\nu-1)}{\nu}g\left(\frac{x}{\nu}\right)+$$

$$\sum_{i=1}^{\vartheta(x)}\log p_i\left[\frac{1}{p_i^2}g\left(\frac{x}{p_i^2}\right)+\frac{1}{p_i^3}g\left(\frac{x}{p_i^3}\right)+\cdots\right].$$

Poi fa vedere che ciascuna delle tre somme, che compariscono a secondo membro, per $x=\infty$ tende a zero, e ne conchiude che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k}\log k = -1 .$$

CAPITOLO XI.

94. Teoremi di Tchebichef e Poincaré sulla distribuzione dei numeri primi fra le due forme $4y+1$; $4y+3$. Estensione di essi fatta da Stanievitch.— Scherk, in fine dell'articolo già citato al Cap. VI § 42, istituisce un paragone fra la totalità dei numeri primi appartenenti alla forma $4y+1$, e la totalità di quelli della forma $4y+3$.

Mediante la effettiva enumerazione, formato un quadro, in cui si trovano iscritte queste totalità corrispondenti ai numeri di 1000 in 1000 da 1000 a 50000, conchiude che, con grande probabilità, può assumersi la totalità, fino al limite x, dei numeri primi della forma $4y+1$ non superiore, in generale, a quella dei numeri primi della forma $4y+3$, e che inoltre, fino a un certo valore del limite x, esse sono presso a poco eguali.

Questa osservazione può essere controllata mediante il ragionamento; infatti si è costatato già nel (Cap. VII, § 53) che indicando le totalità dei numeri primi delle due forme $4y+1$, $4y+3$, non superiori ad x, rispettivamente con $\vartheta(4y+1,x)$, $\vartheta(4y+3,x)$ si ha

$$\lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(4y+1,x)}{\vartheta(4y+3,x)}=1 .$$

Ma due quantità possono paragonarsi non solo mediante rapporto, ma anche mercè differenza. Non può certo dedursi che debba essere nullo il limite per $x=\infty$ di $\vartheta(4y+3,x)-\vartheta(4y+1,x)$, ma solo che per $x=\infty$ la differenza dei due infiniti $\vartheta(4y+3,x)$, $\vartheta(4y+1,x)$ sia di ordine inferiore all'ordine comune di essi, cosicchè la differenza $\vartheta(4y+3,x)-\vartheta(4y+1,x)$ può bene crescere indefinitamente con x. Che infatti ciò si verifichi lo si vedrà tra poco.

Sicchè chiamando frequenza delle forme $4y+1$, $4y+3$ frai numeri primi rispettivamente le due espressioni

$$\lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(4y+1,x)}{\vartheta(x)} \quad , \quad \lim_{x=\infty}\frac{\vartheta(4y+3,x)}{\vartheta(x)}$$

si comprende il senso della proposizione, la quale può parere un paradosso, ma pure è vera:

Sebbene le due forme 4y + 1, 4y + 3 *siano egualmente frequenti frai numeri primi, pure di questi quelli della forma* 4y + 3 *sono molto dippiù degli altri della forma* 4y+1.

Il suaccennato modo di comportarsi della differenza $\vartheta(4y+3,x)-\vartheta(4y+1,x)$ fu messo in luce dallo scritto:

Tchebichef — Lettre a M. Fuss. Théorème relatif aux nombres premiers de la forme $4m+1$ et $4m+3$. *Bulletin de la classe phisico-mathématique de l'Académie Impériale des sciences de S. Petersbourg.* T. XI, p. 208, 1853, nel quale è indicata $\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}})$ quale espressione assintotica di

$$\vartheta(4y+3,x)-\vartheta(4y+1,x)\ .$$

Questo teorema trovasi dedotto nella memoria di Phragmén citata nel (Cap. X, 92) e ancora nella nota

Cesàro — Sulla distribuzione dei numeri primi. *Rendiconto della R. Accademia delle scienze fis. e mat. di Napoli.* Serie 3ª, vol. II, p. 297, 1896.

Io non riporto queste dimostrazioni, giacchè più sotto, fondendo il metodo dell'ultima nota con altro, perverrò a formole più generali di quelle assintotiche di Cesàro, e allora menzionerò qualche altra importante deduzione della nota stessa.

95. — Ma prima, per esaurire la parte storica, converrà che io accenni alle quattro note connesse tra loro:

Poincaré — Sur la distribution des nombres premiers. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* Vol. CXIII, p. 819, 1891.

Idem — Extension aux nombres premiers complexes des théorèmes de M. Tchebichef. *Journal de Mathématiques pures et appliquées de Jordan.* 4ème Série, t. VIII, p. 25, 1892.

Stanievitch — Sur un théorème arithmétique de M. Poincaré. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* Vol. CXIV, p. 109, 1892.

Phragmén — Sur la distribution des nombres premiers. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* Vol. CXIV, p. 337, 1892.

Nella prima l'autore enuncia due teoremi, che io [chiamate rispettivamente $\theta(4y+1,x)$, $\lambda(4y+1,x)$ la totalità dei numeri primi della forma $4y+1$ inferiori ad x, e la somma dei logaritmi neperiani dei numeri primi della forma $4y+1$ inferiori ad x] esprimerò più concisamente così:

Non v'è limite, al di là del quale cessano di esistere numeri, che verificano le inequazioni:

$$\theta(4y+1,x)<\frac{ax}{2\log x}\ ,\quad \lambda(4y+1,x)<\frac{ax}{2}\ ,\quad se\quad a>1$$

o le altre

$$\theta(4y+1,x)>\frac{ax}{2\log x}\ ,\quad \lambda(4y+1,x)>\frac{ax}{2}\ ,\quad se\quad a<1\ .$$

Queste proposizioni si trovano dedotte dallo stesso matematico nell'altra sua

nota più sopra indicata; la quale è di sommo interesse non tanto per questi risultati a cui perviene, ma quanto pel metodo usato; il quale consiste nel riattaccare questi problemi di distribuzione dei numeri primi alla teoria dei numeri primi complessi (cfr. LEJEUNE-DIRICHLET, Lezioni sulla teoria dei numeri, trad. Faifofer, Supplemento XI, come pure BACHMANN, Zahlentheorie. Dritter Theil, XII, XIV, XVIII Vorlesungen). Io, seguendo il cammino inverso, dedurrò più sotto [§ 104, *d)*, e § 111, *a)*], anzi generalizzerò, i teoremi di Poincaré.

Nella nota di Stanievitch sono pure dimostrate queste verità; anzi, più generalmente, chiamate rispettivamente $\theta(My+N, x)$, $\lambda(My+N, x)$ la totalità dei numeri primi, compresi nella forma lineare $My+N$, inferiori ad x, e la somma dei logaritmi neperiani dei medesimi numeri primi, e indicata, come al solito, con $\varphi(M)$ la totalità dei numeri inferiori, e primi relativi ad M, si deduce che:

Non v'è limite al di là del quale cessano di esistere numeri, che verificano le inequazioni

$$\theta(My+N, x) < \frac{ax}{\varphi(M) . \log x}, \quad \lambda(My+N, x) < \frac{ax}{\varphi(M)}, \quad \textit{se} \quad a > 1;$$

oppure

$$\theta(My+N, x) > \frac{ax}{\varphi(M) . \log x}, \quad \lambda(My+N, x) > \frac{ax}{\varphi(M)}, \quad \textit{se} \quad a < 1.$$

Finalmente il Phragmén nella sua nota mostra come i teoremi di Poincaré possono trarsi dal teorema analitico fondamentale della memoria citata nel (Cap. IX, § 92).

I teoremi suenunciati diventano delle evidenze, dopo i risultati, cui è pervenuto de la Vallée-Poussin, dei quali parlerò più sotto (§ 113).

96. Problema della frequenza dei numeri primi nella progressione aritmetica abbordato da Piltz. — Il problema dunque della distribuzione dei numeri primi fra le forme $4y+1$, $4y+3$ è compreso nello studio della frequenza dei numeri primi nella progressione aritmetica $\div N \cdot M + N \cdot 2M + N \cdot \ldots \cdot My + N \cdot \ldots$ (il primo termine N, e la ragione M essendo interi primi fra loro).

Sotto tale forma la quistione è stata abbordata da PILTZ nella dissertazione citata nel (IX, 82), che anzi questi, ridottosi al caso, in cui la ragione della progressione sia un numero primo impari, indica una formola, la quale comprende quella, che fornisce la chiesta totalità (§ 99).

La dissertazione di Piltz, quand'anche succintamente, mette in evidenza il fatto, che generalizzando gli enti, i quali concorrono a costruire la formola di Riemann, colla scorta degli elementi introdotti da Dirichlet (Teoria dei numeri, trad. Faifofer, p. 336) nella celebre dimostrazione del teorema « *Nella progressione aritmetica* $\div N \cdot M + N \cdot 2M + N \cdot \ldots$ *vi sono infiniti numeri primi, se gl'interi* N *ed* M *sono primi fra loro* » si può pervenire a determinare la totalità $\theta(My+N, x)$ dei numeri primi rappresentabili mediante la forma lineare $My+N$ ed inferiori al limite x.

Occorre, per andare avanti con chiarezza, cominciare dalla sopradetta estensione. Io seguirò in questo DE LA VALLÉE-POUSSIN, che mirabilmente l'esegue

nelle sue preziose Recherches già tante volte citate; mi limiterò ad esporre soltanto i risultati, e per le dimostrazioni rimanderò il lettore alla fonte. Poscia per rinvenire l'espressione di $\theta(My + N, x)$ invece di seguire le tracce di Piltz, stimo opportuno di iniziare il mio modesto contributo alla teoria della distribuzione dei numeri primi, procedendo col metodo di von Mangoldt, che ha fornito la dimostrazione inattaccabile, e più accessibile della formola di Riemann.

97. Amplificazione della funzione $\zeta(s)$ per mezzo delle funzioni $\zeta(s, \chi)$. Zeri di queste funzioni. — Comincio dall'amplificazione della $\zeta(s)$. Fissato un carattere χ_j secondo un modulo M (cfr. VII, 54 a 58) indichi

$$\sum_n{}' \frac{\chi_j(n)}{n^s}$$

una somma estesa a tutti i numeri interi, che siano primi relativi ad M, e dinoti

$$\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right)$$

un prodotto esteso a tutti i numeri primi assoluti, che non dividano M. Per tutti i valori complessi di s, la cui parte reale è maggiore di 1, si ha (Lejeune-Dirichlet, Lezioni sulla Teoria dei numeri, trad. Faifofer, p. 339)

$$\sum_n{}' \frac{\chi_j(n)}{n^s} = \frac{1}{\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right)}.$$

La funzione della variabile complessa s, che nel campo considerato ha l'una e l'altra di queste due forme sarà indicata da $\zeta(s, \chi_j)$; sicchè in detto campo, in cui la serie e il prodotto infinito sono assolutamente convergenti, si ha

$$\zeta(s, \chi_j) = \sum_n{}' \frac{\chi_j(n)}{n^s} = \frac{1}{\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi_j(p)}{p^s}\right)}$$

Se χ_j non è il carattere principale, nella striscia $0 < \mathcal{R}(s) < 1$ la serie

$$\sum_n{}' \frac{\chi_j(n)}{n^s}$$

seguita a convergere, ma semplicemente; ivi dunque sussiste sempre la prima delle due ultime eguaglianze. Circa il modo di comportarsi del prodotto parlerò più oltre (§ 102).

Nel resto del presente § suppongo essere χ_j un carattere proprio.

Per definire la funzione $\zeta(s, \chi_j)$ in tutto il piano si comincia dallo estendere la funzione ξ di Riemann; e per far ciò prima si amplifica la Ψ (cfr. VIII, 64).

Però questa funzione amplificata non può essere la stessa per tutti i caratteri χ_j, e bisogna distinguere il caso, in cui j è tale che $\chi_j(-1)$ sia $+1$, da quello, in cui $\chi_j(-1)=-1$, (VII, 55, 56). Pongasi

$$\Psi_1(x, \chi_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi_j(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}};$$

evidentemente il secondo membro equivale a

$$[1 + x_j(-1)] \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi_j(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}};$$

quindi la funzione Ψ_1 ha un valore diverso da 0 se $\chi_j(-1)=1$, ed è sempre nulla, se $\chi_j(-1)=-1$. Pongasi

$$\Psi_2(x, \chi_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi_j(n) \,.\, n e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}};$$

evidentemente il secondo membro equivale a

$$[1 - x_j(-1)] \sum_{n=1}^{\infty}{}' \chi_j(n) \,.\, n e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}},$$

e questa ha un valore diverso da 0, se $\chi_j(-1)=-1$, ed è sempre nulla se $\chi_j(-1)=1$.

Corrisponderanno dunque alla funzione Ψ del (Cap. VIII, § 64) la Ψ_1, quando $\chi_j(-1)=1$, e Ψ_2 quando $\chi_j(-1)=-1$. Ciò premesso nelle pag. da 51 a 64 del lavoro di DE LA VALLÉE-POUSSIN si trova dimostrato quanto nel resto di questo § andrò enunciando.

Se, nel caso di $\chi_j(-1)=1$, si pone

$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \Psi_1(x, \chi_j) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \frac{1}{2}\varepsilon_1(\chi_j)\int_1^{\infty} \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi_j}\right) x^{-\frac{s+1}{2}} dx = \xi_1(s, \chi_j),$$

dove

$$\varepsilon_1(\chi_j) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^{M}{}' \chi_j(k) \cos \frac{2k\pi}{M},$$

si ha

$$\zeta(s, \chi_j) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1} \xi_1(s, \chi_j); \tag{124}$$

e, nel secondo caso di $\chi_j(-1)=-1$, se si pone

$$\frac{1}{2}\int_1^{\infty} \Psi_2(x, \chi_j) x^{\frac{s-1}{2}} dx + \frac{1}{2}\varepsilon_2(\chi_j)\int_1^{\infty} \Psi_2\left(x, \frac{1}{\chi_j}\right) x^{-\frac{s}{2}} dx = \xi_2(s, \chi_j),$$

dove

$$\varepsilon_2(\chi_j) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^{M}{}' \chi_j(k) \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{M} ,$$

si ha

$$(125) \qquad \zeta(s, \chi_j) = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{-1} \xi_2(s, \chi_j) .$$

Le (124), (125) definiscono la funzione $\zeta(s, \chi_j)$ in tutto il piano della variabile complessa s.

98. — *a*) Vengo ora agli zeri delle funzioni $\zeta(s, \chi_j)$, che sono gli elementi analitici per mezzo dei quali va costruita la formola, che si ha in mira. Continuando per ora a supporre χ_j un carattere proprio, la funzione $\zeta(s, \chi_j)$ non ha radici, la cui parte reale sia ≥ 1; ne ha infinite reali, che sono i poli di $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, cioè

$$s = 0, -2, -4, \ldots, -2m, \ldots, \qquad \text{quando} \qquad \chi_j(-1) = 1 ,$$

o quelli di $\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$, cioè

$$s = -1, -3, -5, \ldots, -(2m+1), \ldots, \qquad \text{quando} \qquad \chi_j(-1) = -1 ,$$

e in ultimo ha un'infinità di radici non reali γ_j, la cui parte reale è compresa fra 0 ed 1 (cfr. osservazione finale di § 102), e che sono gli zeri delle funzioni ξ_1 o ξ_2. Queste funzioni ξ_1 e ξ_2 sono funzioni intere di primo genere, sicchè potrà scriversi

$$\xi_1(s, \chi_j) = \xi_1(0, \chi_j) e^{\omega s} \prod_{\gamma_j} \left(1 - \frac{s}{\gamma_j}\right) e^{\omega(\gamma_j) s}$$

$$\xi_2(s, \chi_j) = \xi_2(0, \chi_j) e^{\omega s} \prod_{\gamma_j} \left(1 - \frac{s}{\gamma_j}\right) e^{\omega(\gamma_j) s},$$

essendo la ω e le $\omega(\gamma_j)$ dei convenienti parametri dipendenti da j, ma non da s.

b) Se il carattere χ_j è improprio rispetto al modulo M sarà proprio rispetto a un divisore di M (VII, 57). Epperò quanto è detto nel § 97 va lievemente modificato, ma la conchiusione espressa nell'alinea *a)* di questo § rimane valida.

c) Sia χ_j un carattere incompleto rispetto al modulo M, contenendo esso come fattori componenti i caratteri principali relativamente ai moduli $h_1^{\varpi_1}, h_2^{\varpi_2} \ldots, h_t^{\varpi_t}$. e caratteri diversi dal principale pei fattori rimanenti di M. Se poniamo

$$M_1 = \frac{M}{h_1^{\varpi_1} h_2^{\varpi_2} \ldots h_t^{\varpi_t}} ,$$

il carattere χ_j eguaglierà un carattere χ_{j_1} proprio o improprio rispetto al modulo M_1. Poichè

$$\zeta[s, \chi_j(\text{mod. M})] = \frac{1}{\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi_j(p, \text{mod. M})}{p^s}\right)} ,$$

si avrà

$$\zeta[s, \chi_j(\text{mod. M})] = \left(1 - \frac{\chi_{j_1}(h_1, \text{mod. M}_1)}{h_1^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{\chi_{j_1}(h_t, \text{mod. M}_1)}{h_t^s}\right) \zeta[s, \chi_{j_1}(\text{mod. M}_1)] .$$

Ora l'ultimo fattore del 2° membro $\zeta[s, \chi_{j_1}$ (Mod. $\text{M}_1)]$ possiede le radici, che gli attribuisce l'alinea *a)*. I fattori precedenti si annullano nei punti

$$\frac{2k\pi i - \log \chi_{j_1}(h_1, \text{mod. M}_1)}{\log h_1}, \ldots, \frac{2k\pi i - \log \chi_{j_1}(h_t, \text{mod. M}_1)}{\log h_t}$$

$$k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots ,$$

i quali evidentemente sono tutti situati sull' asse immaginario; dunque la funzione $\zeta(s, \chi_j)$, nel caso che χ_j sia un carattere incompleto, possiede tutto questo insieme di radici, parte reali, parte puramente immaginarie, parte complesse al di fuori degli assi. Ed è necessario qui notare che sia fra le radici reali, una volta, sia fra le puramente immaginarie, più volte, può presentarsi la radice 0; in conseguenza a questa in ognuna delle $\zeta(s, \chi_j)$ io attribuirò il grado di multiplicità n_j, convenendo che sia n_j nullo, se 0 non è tra le radici. In tutte tre le ipotesi degli alinea *a)*, *b)*, *c)* indicherò con c_j le radici di qualunque specie della funzione $\zeta(s, \chi_j)$.

d) Sia finalmente $j = 0$, cioè rappresenti χ_j il carattere principale: si ha, analogamente al caso dei caratteri incompleti,

$$\zeta(s, \chi_0) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{h_1^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{h_m^s}\right) \zeta(s) ,$$

e quindi $\zeta(s, \chi_0)$ possiede oltre le radici di $\zeta(s)$, le altre puramente immaginarie

$$\frac{2k\pi i}{\log 2}, \frac{2k\pi i}{\log h_1}, \ldots, \frac{2k\pi i}{\log h_m}, \quad (k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) .$$

In questo caso $k = 0$ dà sempre la radice 0, quindi il grado di multiplicità n_0 della radice 0 è $m + 1$. A simiglianza dei casi precedenti indicherò con c_0 le radici di qualsiasi specie di $\zeta(s, \chi_0)$, mentre quelle di $\zeta(s)$ le ho già indicate con c (VIII, 68).

La $\zeta(s, \chi_0)$ possiede inoltre in comune con $\zeta(s)$ il polo 1.

99. Contribuzione dell'autore del presente scritto alle leggi di distribuzione dei numeri primi (da § 99 a 112). Formola per la totalità $\vartheta(\text{M}y + \text{N}, x)$ dei numeri primi compresi nella forma lineare $\text{M}y + \text{N}$, e non superiori ad x, trovata estendendo il metodo adoperato da von Mangoldt per $\vartheta(x)$. — Non s' incontra difficoltà ad estendere le funzioni Λ, e g adoperate da von Mangoldt [IX, 78, *b)*, e 79]. Se x non è potenza intera d'un numero primo, le predette funzioni verranno

definite dalle eguaglianze

$$\Lambda(x, r, \chi_j) = \sum_{n=1}^{E(x)} L(n) \frac{\chi_j(n)}{n^r}, \quad g(x, r, \chi_j) = \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{L(n)}{\log n} \frac{\chi_j(n)}{n^r},$$

e, se x è potenza d'un numero primo, lo saranno da

$$\Lambda(x, r, \chi_j) = \frac{\Lambda(x+0, r, \chi_j) + \Lambda(x-0, r, \chi_j)}{2},$$

$$g(x, r, \chi_j) = \frac{g(x+0, r, \chi_j) + g(x-0, r, \chi_j)}{2}.$$

Si avrà perciò

$$g(x, r, \chi_j) = \int_r^{\infty} \Lambda(x, r, \chi_j)\, dr.$$

Ciò premesso tutte le deduzioni della seconda parte della memoria di von Mangoldt, che si riferiscono a quanto ho detto nel (Cap. IX, § 78 a 81), si possono con lievi modificazioni imitare, e si ricava:

Indicando χ_j un carattere (modulo M) completo, allorchè i termini della serie infinita $\sum_{\gamma_j} \frac{x^{-r+\gamma_j}}{r-\gamma_j}$ sono ordinati, in guisa che i moduli delle γ_j formino una successione non mai decrescente, questa serie è convergente per tutti i valori reali di r, e per tutti i valori reali positivi di x, e allorchè $x > 1$, la sua somma è rappresentata dalla espressione:

$$-\Lambda(x, r, \chi_j) - \frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n}, \quad \text{se} \quad \chi_j(-1) = +1,$$

e dall'altra

$$-\Lambda(x, r, \chi_j) - \frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-r-2n-1}}{r+2n+1}, \quad \text{se} \quad x_j(-1) = -1;$$

sicchè, se si pone per brevità

$$\left.\begin{array}{ll} \text{nel primo caso} & \sum_{\gamma_j} \frac{x^{-r+\gamma_j}}{r-\gamma_j} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-r-2n}}{r+2n} \\ \text{nel secondo caso} & \sum_{\gamma_j} \frac{x^{-r+\gamma_j}}{r-\gamma_j} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{-r-2n-1}}{r+2n+1} \end{array}\right\} = \sum_{c_j} \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j},$$

si potrà scrivere

$$\Lambda(x, r, \chi_j) = -\frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + \sum_{c_j} \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j}, \tag{126}$$

coll'avvertenza che, se, per avventura, alla variabile reale r è attribuito il valore

ρ di una c_j reale, nel secondo membro, in luogo dei termini

$$-\frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + \frac{x^{-r+\rho}}{r-\rho},$$

bisogna porre

$$\lim_{r=\rho}\left(-\frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + \frac{x^{-r+\rho}}{r-\rho}\right).$$

Se χ_j indica un carattere incompleto diverso dal principale, la medesima eguaglianza resta valida, purchè la $\sum_{c_j}$ includa anche la sommatoria relativa alle radici puramente immaginarie, che allora viene ad acquistare la ζ relativa.

Se $\rho = 0$, ricordando quanto ho detto nel § 98 c), in luogo dei termini

$$-\frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + n_j \frac{x^{-r}}{r},$$

bisogna sostituire

$$\lim_{r=0}\left(-\frac{\zeta'(r, \chi_j)}{\zeta(r, \chi_j)} + n_j \frac{x^{-r}}{r}\right),$$

cioè

$$-\frac{1}{n_j+1}\frac{\zeta^{(n_j+1)}(0, \chi_j)}{\zeta^{(n_j)}(0, \chi_j)} - n_j \log x.$$

Se χ_j è il carattere principale, allora la presenza del polo 1 introduce al 2° membro di (126) un altro termine, e si ha

$$\Lambda(x, r, \chi_0) = \frac{-x^{1-r}}{r-1} - \frac{\zeta'(r, \chi_0)}{\zeta(r, \chi_0)} + \sum_{c_0} \frac{x^{-r+c_0}}{r-c_0}, \tag{126'}$$

coll'analoga avvertenza di poc'anzi in quanto ai valori di r eguali alle radici c_0, o al polo 1.

Da questi valori della funzione Λ si passsa poi a quelli di g, integrando da r ad ∞. Se quest' intervallo non comprende alcuna radice della funzione $\zeta(r, \chi_j)$ si ha

$$g(x, r, \chi_j) = \log \zeta(r, \chi_j) + \sum_{c_j} \int_r^\infty \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j} dr \quad , \quad j \neq 0;$$

se invece l'intervallo (r, ∞) comprende la sola radice 0 delle $\zeta(r, \chi_j)$, e quindi dalla $\zeta(r . \chi_0)$ la sola radice 0, e il polo 1 si ha

$$\left\{\begin{aligned} g(x, r, \chi_0) &= \log \frac{(r-1)\zeta(r, \chi_0)}{r^{n_0}} + \left\{\int_0^{\log x} \frac{e^{(-r+1)u} - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} - \\ & n_0 \left\{\int_0^{\log x} \frac{e^{-ru} - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} + \sum_{c_0 \neq 0} \int_r^\infty \frac{x^{-r+c_0}}{r-c_0} dr \\ g(x, r, \chi_j) &= \log \frac{\zeta(r, \chi_j)}{r^{n_j}} - n_j \left\{\int_0^{\log x} \frac{e^{-ru} - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du\right\} + \sum_{c_j \neq 0} \int_r^\infty \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j} dr. \end{aligned}\right. \tag{127}$$

Faccio ora $r=0$; ricordando (IX, 81; X, 83) che

$$\int_0^{\log x} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \mathrm{Li}(x)$$

$$\int_0^{\log x} \frac{1 - e^{-u}}{u} du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = \log\log x + \mathrm{C} ,$$

si avrà

$$g(x, 0, \chi_0) = \log\left(-\frac{\zeta(r, \chi_0)}{r^{n_0}}\right)_{r=0} + \mathrm{Li}(x) - n_0(\log\log x + \mathrm{C}) + \sum_{c_0 \neq 0} \int_0^{\infty} \frac{x^{-r+c_0}}{r - c_0} dr$$

$$g(x, 0, \chi_j) = \log\left(\frac{\zeta(r, \chi_j)}{r^{n_j}}\right)_{r=0} - n_j(\log\log x + \mathrm{C}) + \sum_{c_j \neq 0} \int_0^{\infty} \frac{x^{-r+c_j}}{r - c_j} dr .$$

Dinoto ora ad imitazione di Riemann con $f(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x)$ una funzione, che eguaglia $\theta(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x)$ se N ed x non sono punti di discontinuità di questa funzione θ, vale invece $\theta(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x) + \frac{1}{2}$ se lo è un solo di essi, e infine è eguale a $\theta(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x) + 1$, se lo sono ambedue: pongo inoltre

$$f_1(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x) = f(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x) + \frac{1}{2} f(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3} f(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

e chiamo con $1, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mathrm{M} - 1$, i numeri primi con M e inferiori ad M; si ha

$$g(x, 0, \chi_j) = f_1(\mathrm{M}y + 1, x)\chi_j(1) + f_1(\mathrm{M}y + \mu_1, x)\chi_j(\mu_1) + \cdots + f_1(\mathrm{M}y + \mathrm{M} - 1, x)\chi_j(\mathrm{M} - 1)$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, \varphi(\mathrm{M}) - 1 .$$

Questo sistema fornirà facilmente il valore di $f_1(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x)$, quando nei primi membri si sostituiscano per le funzioni g i valori ultimamente trovati. Infatti essendo N primo con M, ed inferiore ad M sarà eguale ad una delle μ, quindi moltiplicando ordinatamente le equazioni del sistema per

$$\frac{1}{\chi_0(\mathrm{N})}, \frac{1}{\chi_1(\mathrm{N})}, \ldots, \frac{1}{\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(\mathrm{N})},$$

sommando, e tenendo presenti le (73) (cfr. VII, 58) si trae

$$(128) \left\{ \begin{aligned} f_1(\mathrm{M}y + \mathrm{N}, x) = \frac{1}{\varphi(\mathrm{M})} \Bigg\{ & \log\left[\left(-\frac{\zeta(r, \chi_0)}{r^{n_0}}\right)^{\frac{1}{\chi_0(\mathrm{N})}} \left(\frac{\zeta(r, \chi_1)}{r^{n_1}}\right)^{\frac{1}{\chi_1(\mathrm{N})}} \cdots \left(\frac{\zeta(r, \chi_{\varphi(\mathrm{M})-1})}{r^{n_{\varphi(\mathrm{M})-1}}}\right)^{\frac{1}{\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(\mathrm{N})}}\right]_{r=0} \\ & + \mathrm{Li}(x) - (\log\log x + \mathrm{C}) \sum_{j=0}^{\varphi(\mathrm{M})-1} \frac{n_j}{\chi_j(\mathrm{N})} + \frac{1}{\chi_0(\mathrm{N})} \sum_{c_0 \neq 0} \int_0^{\infty} \frac{x^{-r+c_0}}{r - c_0} dr \\ & + \frac{1}{\chi_1(\mathrm{N})} \sum_{c_1 \neq 0} \int_0^{\infty} \frac{x^{-r+c_1}}{r - c_1} dr + \cdots + \frac{1}{\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(\mathrm{N})} \sum_{c_{\varphi(\mathrm{M})-1} \neq 0} \frac{x^{-r+c_{\varphi(\mathrm{M})-1}}}{r - c_{\varphi(\mathrm{M})-1}} dr \Bigg\} . \end{aligned} \right.$$

Trattando questa coi fattori di Möbius come la (88) nel Cap. VIII, § 69, 70, si ricava

$$(129)\quad \begin{cases} f(\mathrm{M}y+\mathrm{N}, x)=\dfrac{1}{\varphi(\mathrm{M})}\Bigg\{\sum\limits_k \dfrac{\mu(k)}{k}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{k}})+\sum\limits_{j=0}^{\varphi(\mathrm{M})-1}\dfrac{n_j}{\chi_j(\mathrm{N})}+\dfrac{1}{\chi_0(\mathrm{N})}\sum\limits_{c_0 \neq 0}\sum\limits_k \dfrac{\mu(k)}{k}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^{\frac{-r+c_0}{k}}}{r-c_0}\,dr \\ \quad +\dfrac{1}{\chi_1(\mathrm{N})}\sum\limits_{c_1 \neq 0}\sum\limits_k \dfrac{\mu(k)}{k}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^{\frac{-r+c_1}{k}}}{r-c_1}\,dr+\dots+\dfrac{1}{\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(\mathrm{N})}\sum\limits_{c_{\varphi(\mathrm{M})-1}}\sum\limits_k \dfrac{\mu(k)}{k}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^{\frac{-r+c_{\varphi(\mathrm{M})-1}}{k}}}{r-c_{\varphi(\mathrm{M})-1}}\,dr\Bigg\}. \end{cases}$$

Se in quest'ultima si pone successivamente $\mathrm{N}=1, \mu_1, \mu_2, \dots, \mathrm{M}-1$, e si moltiplicano ordinatamente le eguaglianze ottenute per $\chi_j(1), \chi_j(\mu_1), \chi_j(\mu_2), \dots, \chi_j(\mathrm{M}-1)$, si ricava, se $j=0$,

$$(130)\qquad f(x)-(m+1)=\sum_k \frac{\mu(k)}{k}\,\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{k}})+n_0+\sum_{c_0 \neq 0}\sum_k \frac{\mu(k)}{k}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-r+c_0}{k}}}{r-c_0}\,dr,$$

dove $m+1$ indica, come al solito, il numero dei fattori primi diversi di M. Se poi $j \neq 0$, si ottiene

$$f(\mathrm{M}y+1, x)\chi_j(1)+f(\mathrm{M}y+\mu_1, x)\chi_j(\mu_1)+\dots+f(\mathrm{M}y+\mathrm{M}-1, x)\chi_j(\mathrm{M}-1)$$

$$=n_j+\sum_{c_j \neq 0}\sum_k \frac{\mu(k)}{k}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-r+c_j}{k}}}{r-c_j}\,dr,$$

o più brevemente

$$(131)\qquad \sum_{n=1}^{f(x)} \chi_j(p_n)=n_j+\sum_{c_j \neq 0}\sum_k \frac{\mu(k)}{k}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{-r+c_j}{k}}}{r-c_j}\,dr.$$

In virtù di (130) e (131) la (129) può assumere la forma

$$(132)\qquad f(\mathrm{M}y+\mathrm{N}, x)=\frac{1}{\varphi(\mathrm{M})}\Bigg\{f(x)-(m+1)+\frac{1}{\chi_1(\mathrm{N})}\sum_{n=1}^{f(x)}\chi_1(p_n)+$$

$$+\frac{1}{\chi_2(\mathrm{N})}\sum_{n=1}^{f(x)}\chi_2(p_n)+\dots+\frac{1}{\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(\mathrm{N})}\sum_{n=1}^{f(x)}\chi_{\varphi(\mathrm{M})-1}(p_n)\Bigg\},$$

che fra breve sarà oltremodo utile. Del resto, tenendo presenti le relazioni (73) del (Cap. VII, § 58), con considerazioni semplicissime apparisce che il secondo membro della (32) è identico al primo.

Nel caso particolare che M sia un numero primo, a formole analoghe ma meno perfette di quelle del presente paragrafo giunge il Piltz nella sua dissertazione (IX, 82) per una via più astrusa della presente.

100. Nuova distinzione frai caratteri d'un numero. Caratteri appartenenti a un esponente. Somma dei caratteri d'un numero N appartenenti ad un esponente privo di fattori quadratici. — Per ottenere l'estensione dei risultati di Cesàro menzionati in fine del § 94 occorre procedere ad una valutazione assintotica del secondo membro di (132).

E per far ciò introduco una nuova distinzione frai caratteri, la quale conduce a graduare le diverse parti dell'anzidetto secondo membro, secondo l'ordine di grandezza, col quale esse aumentano al crescere indefinitamente di x.

a) Comincio dall'esaminare i caratteri secondo il modulo 2^β, e pongo per ora da parte il caso di $\beta = 2$, che esaminerò in ultimo.

Il grado $2^{\beta-2}$ dell'equazione binomia, che serve a determinare detti caratteri ha per divisori $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{\beta-2}$; quindi le radici di ciascuna equazione

$$x^{2^i} = 1 \qquad (1 \leqq i \leqq \beta - 2)$$

sono comprese fra le radici di

$$x^{2^{\beta-2}} = 1 \ ;$$

e quelle di tali radici, che sono radici primitive di

$$x^{2^i} = 1$$

elevate a potenza 2^i dànno 1, e a potenza inferiore non dànno 1; quindi i caratteri corrispondenti sono tali che elevati a potenza 2^i dànno, quali che siano gli indici α, e λ, il carattere principale, ed elevati ad esponenti minori non dànno, quali che siano α e λ sempre χ_0. Dirò che tali caratteri *appartengono all' esponente* 2^i, e ve ne sono, per $i > 1$, $2\varphi(2^i) = 2^i$; per $i = 1$, oltre ai $2\varphi(2) = 2$, vi è l'altro $\tau_1{}^\alpha \eta_1{}^\lambda$ anch'esso appartenente all'esponente 2. Laonde frai $2^{\beta-1} - 1$ caratteri, secondo il modulo 2^β, che restano dopo escluso il carattere principale, ve ne sono

3 appartenenti all' esponente 2				
2^2	»	»	»	2^2
2^3	»	»	»	2^3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$2^{\beta-2}$	»	»	»	$2^{\beta-2}$;

e per verifica si trova

$$2^{\beta-2} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 3 = 2^{\beta-1} - 1 \ .$$

Poichè una radice primitiva di un'equazione binomia elevata successivamente ai diversi numeri primi relativi al grado dell'equazione, ed inferiori a questo, dà tutte le radici primitive della medesima equazione, ne segue che uno qualunque dei caratteri dell'uno e dell'altro gruppo

$$\tau_0^\alpha \eta_0^\lambda \, , \; \tau_0^\alpha \eta_1^\lambda \, , \; \ldots \, , \; \tau_0^\alpha \eta_{2^{\beta-2}-1}^\lambda$$

$$\tau_1^\alpha \eta_0^\lambda \, , \; \tau_1^\alpha \eta_1^\lambda \, , \; \ldots \, , \; \tau_1^\alpha \eta_{2^{\beta-2}-1}^\lambda \, ,$$

appartenente all' esponente 2^i, elevato ai successivi numeri dispari $1, 3, 5, \ldots, 2^i - 1$, dà tutti i caratteri dello stesso gruppo appartenenti all'esponente 2^i. Due caratteri conjugati appartengono allo stesso esponente.

Se $\beta = 2$, non vi sono che due caratteri $\chi_0 = 1$, $\chi_1 = (-1)^\alpha$; ed è $\chi_1^2 = \chi_0$. Quindi il carattere diverso dal principale appartiene all'esponente 2.

b) Considero ora i caratteri secondo il modulo h^ϖ. Il grado $\varphi(h^\varpi) = h^{\varpi-1}(h-1)$ dell'equazione binomia, che serve a determinarli, abbia per divisori

$$1, \delta_1, \delta_2, \ldots, \varphi(h^\varpi);$$

quindi le radici di ciascuna equazione

$$x^{\delta_i} = 1$$

sono comprese fra le radici di

$$x^{\varphi(h^\varpi)} = 1;$$

e quelle fra queste radici, che sono radici primitive di

$$x^{\delta_i} = 1,$$

elevate a potenza δ_i dànno 1, ed elevate a potenza minore non dànno 1; quindi i caratteri corrispondenti sono tali che elevati a potenza δ_i, dànno, quale che sia l'indice ν, il carattere principale χ_0; ed elevati ad esponente minore non dànno, quale che sia l'indice ν, sempre χ_0. Dirò che tali caratteri *appartengono all' esponente* δ_i, e ve ne sono $\varphi(\delta_i)$. Laonde frai $\varphi(h^\varpi) - 1$ caratteri secondo il modulo h^ϖ, che restano dopo escluso il carattere principale, ve ne sono

$\varphi(\delta_1)$	appartenenti	all'esponente		δ_1
$\varphi(\delta_2)$	»	»	»	δ_2
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\varphi[\varphi(h^\varpi)]$	»	»	»	$\varphi(h^\varpi)$;

e per verifica si trova

$$\varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \cdots + \varphi[\varphi(h^\varpi)] = \varphi(h^\varpi) - 1$$

(cfr. Lejeune-Dirichlet, Teoria dei numeri, trad. Faifofer, p. 22).

Inoltre, se uno dei caratteri appartenenti all'esponente δ_i si eleva successivamente alle diverse potenze indicate dei numeri primi relativi a δ_i e inferiori a questo, esso produrrà tutti i caratteri appartenenti a questo esponente. Due caratteri coniugati appartengono allo stesso esponente.

c) Infine mi occupo dei caratteri secondo il modulo

$$M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} h_2^{\varpi_2} \ldots h_m^{\varpi_m}.$$

Si sa che essi sono definiti dalla eguaglianza

$$\chi(n, \text{mod. } M) = \chi(n, \text{mod. } 2^\beta)\chi(n, \text{mod. } h_1^{\varpi_1}) \dots \chi(n, \text{mod. } h_m^{\varpi_m}) .$$

Suppongasi che i caratteri componenti appartengano rispettivamente agli esponenti $2^i, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(m)}$, e sia Δ il minimo multiplo comune a questi esponenti; evidentemente, quale che sia n, è

$$\chi(n, \text{mod. } M)^\Delta = 1 .$$

Elevisi invece $\chi(n, \text{mod. } M)$ ad un esponente Δ' minore di Δ, dico che non s'otterrà, quale che sia n, sempre 1. Infatti vi dev'essere, frai numeri $2^i, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(m)}$, almeno uno, che non divida Δ'; suppongasi dunque che Δ' diviso per δ', δ'', δ''' dia per resti $d', d'', d''' \neq 0$, e sia invece divisibile per gli altri; scelgasi n in modo che $d'\nu_1$ non sia multiplo di δ', e invece $d''\nu_2$ sia multiplo di δ'', e $d'''\nu_3$ di δ'''; e quindi

$$\chi(n, \text{mod. } 2^\beta)^{\Delta'} = 1 \ , \ \chi(n, \text{mod. } h_2^{\varpi_2})^{\Delta'} = 1 \ , \ \dots \ , \ \chi(n, \text{mod. } h_m^{\varpi_m})^{\Delta'} = 1$$

e

$$\chi(n, \text{mod. } M)^{\Delta'} = \chi(n, \text{mod. } h_1^{\varpi_1})^{\Delta'} = \chi(n, \text{mod. } h_1^{\varpi_1})^{d'} \neq 1 .$$

Dirò dunque che il carattere $\chi(n, \text{mod. } M)$ considerato *appartiene all' esponente* Δ.

Gli esponenti $2^i, \delta', \delta'', \dots, \delta^{(m)}$ sono rispettivamente divisori di

$$2^{\beta-2} \ , \ \varphi(h_1^{\varpi_1}) \ , \ \varphi(h_2^{\varpi_2}) \ , \ \dots \ , \ \varphi(h_m^{\varpi_m}) \ ;$$

il minimo multiplo comune Δ è formato dunque con fattori primi figuranti in questi ultimi, elevati ad esponenti non superiori a quelli con cui compariscono in essi; Δ è dunque un divisore del minimo multiplo comune di

$$2^{\beta-2} \ , \ \varphi(h_1^{\varpi_1}) \ , \ \varphi(h_2^{\varpi_2}) \ , \ \dots \ , \ \varphi(h_m^{\varpi_m}) \ .$$

Questa e qualche altra semplicissima considerazione permettono di conchiudere: *Se* $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots$ *è il sistema dei divisori del minimo multiplo comune ai numeri*

$$2^{\beta-2} \ , \ \varphi(h_1^{\varpi_1}) \ , \ \varphi(h_2^{\varpi_2}) \ , \ \dots \ , \ \varphi(h_m^{\varpi_m}) \ ,$$

i caratteri rispetto al modulo

$$M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} h_2^{\varpi_2} \dots h_m^{\varpi_m} ,$$

che restano dopo escluso il carattere principale, si ripartiscono in gruppi di caratteri rispettivamente appartenenti agli esponenti $\Delta_1, \Delta_2, \dots$

Si potrebbe, anche in questo caso, calcolare quanti sono i caratteri appartenenti

a ciascuno degli esponenti Δ, e ritrovar poi la totalità $\varphi(M)$ dei caratteri, ma, per brevità, ometto questa verifica.

101. — Per la ricerca attuale importa, dato un numero N primo con

$$M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} \dots h_m^{\varpi_m},$$

calcolare la somma dei caratteri $\chi(N, \text{mod. } M)$ appartenenti ad un esponente assegnato privo di fattori quadratici; vale a dire, se si indicano con $q_0 = 2, q_1, q_2, \dots$ i fattori primi differenti di

$$\varphi(M) = 2^{\beta-1} h_1^{\varpi_1 - 1} \dots h_m^{\varpi_m - 1}(h_1 - 1) \dots (h_m - 1),$$

si vuole la somma dei caratteri del numero N, secondo il modulo M, appartenenti ad un esponente che sia eguale o ad uno dei fattori q, o al prodotto di più di questi fattori elevati a prima potenza.

Distingo tre casi

a) $M = 2^\beta$; allora $\varphi(M) = 2^{\beta-1}$; non v'è dunque da considerare che i caratteri appartenenti all'esponente 2, i quali sono

$$\chi_1(N) = (-1)^\alpha, \quad \chi_2(N) = (-1)^\lambda, \quad \chi_3(N) = (-1)^{\alpha+\lambda},$$

se $\beta > 2$; e invece si riducono al solo $\chi_1(N) = (-1)^\alpha$ se $\beta = 2$.

Ora ricordando la definizione degl' indici α, e λ data dalla congruenza

$$N \equiv (-1)^\alpha . 5^\lambda \qquad (\text{mod. } 2^\beta)$$

si ha che se $\beta > 2$, sono

$\alpha = 0$,	λ pari	se	$N = 8y + 1$
$\alpha = 1$,	λ impari	»	$N = 8y + 3$
$\alpha = 0$,	λ impari	»	$N = 8y + 5$
$\alpha = 1$,	λ pari	»	$N = 8y + 7$.

Se poi $\beta = 2$, è $\lambda = 0$, e, secondo che N è della forma $4y + 1$, o $4y + 3$, α è eguale a 0 o ad 1.

Perciò se $M = 2^\beta \geq 8$, si ha

$$\chi_1(N) + \chi_2(N) + \chi_3(N) = 3, \qquad \text{se} \qquad N = 8y + 1$$

$$\chi_1(N) + \chi_2(N) + \chi_3(N) = -1, \qquad \text{se} \qquad \begin{cases} N = 8y + 3 \\ N = 8y + 5 \\ N = 8y + 7; \end{cases}$$

se invece $M = 4$

$$\chi_1(N) = 1 \qquad \text{se} \qquad N = 4y + 1$$
$$\chi_1(N) = -1 \qquad » \qquad N = 4y + 3.$$

Osservando che se $M = 2^\beta \geq 8$, secondo che N diviso per 8 dà o no per resto 1, è N residuo o non residuo quadratico di 2^β; e se $M = 4$, secondo che N diviso per 4 dà o no per resto 1, è N residuo o non residuo quadratico di 4, il precedente risultato può enunciarsi:

Se si indica con $\rho(N, 2)$ *una funzione numerica, che vale* 1, *se* N *è non residuo quadratico di* 2^β, *e se* N *è residuo quadratico di* 2^β, *vale* -3, *se* $\beta > 2$, *vale* -1, *se* $\beta = 2$, *la somma dei caratteri di* N *rispetto al modulo* 2^β, *appartenenti all'esponente* 2, *è data da* $\mu(2)\rho(N, 2)$.

b) $M = h^\varpi$, $\varphi(M) = h^{\varpi-1}(h-1)$, e siano $q_0 = 2, q_1, q_2, \ldots$ i fattori primi di questo prodotto.

Vi è un sol carattere appartenente all'esponente 2, ed è $(-1)^\nu$.

Pei caratteri appartenenti ad uno qualunque degli esponenti q impari, bisogna cercare la somma delle potenze ν^{me} delle radici primitive dell'equazione $x^q = 1$. Ora essendo q numero primo, tutte le radici, eccetto 1, sono radici primitive; quindi, per un noto teorema sulle equazioni binomie, la somma cercata è eguale a -1, se ν non è divisibile per q, ed è invece eguale a $q-1$, se ν è multiplo di q. Osservando che nel caso presente, secondo che ν è o no divisibile per q (sia questo 2, o un fattore primo dispari), è N residuo o non-residuo q^{ico} di h^ϖ, può trarsi da quanto finora s'è detto in quest'alinea che:

Se s' indica con $\rho(N, q)$ *una funzione numerica, che vale* 1, *se* N *è non-residuo* q^{ico} *di* h^ϖ, *e vale invece* $1 - q$, *se* N *è residuo* q^{ico} *di* h^ϖ, *la somma dei caratteri di* N *rispetto al modulo* h^ϖ, *appartenenti all'esponente* q, *è data da* $\mu(q)\rho(N, q)$.

Suppongo ora che si tratti dei caratteri appartenenti ad un esponente $\Delta = q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} \ldots$ essendo $i_1, i_2, i_3, \ldots$ indici tutti differenti, e di cui uno può essere anche 0. Bisogna allora ricorrere alla regola di Cauchy, che fornisce la somma delle potenze simili delle radici primitive d'una equazione binomia, regola già citata nel (Cap. VIII, § 69). In virtù di essa si ha che, se $q_{i_a}, q_{i_b}, q_{i_c}, \ldots$ sono i fattori primi di Δ, che dividono ν, la richiesta somma di caratteri è

$$\mu(\Delta)(1 - q_{i_a})(1 - q_{i_b})(1 - q_{i_c}) \ldots ;$$

sicchè se ν è primo con Δ, la precedente espressione riducesi a $\mu(\Delta)$. Questo risultato converrà enunciarlo nel seguente modo:

Se $\Delta = q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} \ldots$, *e si pone*

$$\rho(N, q_{i_1})\rho(N, q_{i_2})\rho(N, q_{i_3}) \ldots = \rho(N, \Delta),$$

la somma dei caratteri di N, *rispetto al modulo* $M = h^\varpi$, *appartenenti all'esponente* Δ, *è data da* $\mu(\Delta)\rho(N, \Delta)$.

c) $M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} \ldots h_m^{\varpi_m}$, $\varphi(M) = 2^{\beta-1} h_1^{\varpi_1-1} \ldots h_m^{\varpi_m-1}(h_1-1)\ldots(h_m-1)$, e siano, come al solito, $q_0 = 2, q_1, q_2, \ldots$ i fattori primi differenti di quest'ultimo prodotto.

Comincio col determinare la somma dei caratteri di N, secondo il modulo M, appartenenti all'esponente 2.

Poichè

$$\chi(N, \text{mod. } M) = \chi(N, \text{mod. } 2^\beta)\chi(N, \text{mod. } h_1^{\varpi_1}) \ldots \chi(N, \text{mod. } h_m^{\varpi_m}) ,$$

e l'esponente, cui appartiene il carattere, che sta al primo membro, è il minimo multiplo comune degli esponenti, cui appartengono i caratteri componenti; così se il primo esponente è un numero primo, i secondi debbono essere o 1 (cioè i caratteri relativi debbono eguagliare il carattere principale), o debbono essere lo stesso numero primo.

Nel caso dunque che tal numero primo è 2, e che sia $\beta > 2$, dev'essere

$$\chi(N, \text{mod. } 2^\beta) = 1 \;,\; (-1)^\alpha \;,\; (-1)^\lambda \;,\; (-1)^{\alpha+\lambda} ,$$
$$\chi(N, \text{mod. } h_1^{\varpi_1}) = 1 \;,\; (-1)^{\nu_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\chi(N, \text{mod. } h_m^{\varpi_m}) = 1 \;,\; (-1)^{\nu_m} .$$

Perciò la somma dei caratteri, in questo caso, è data dall'espressione

$$[1 + (-1)^\alpha + (-1)^\lambda + (-1)^{\alpha+\lambda}][1 + (-1)^{\nu_1}] \ldots [1 + (-1)^{\nu_m}] - 1 .$$

Se $\beta = 2$, il primo fattore del primo termine di questa espressione si riduce a $1 + (-1)^\alpha$; e se $\beta < 2$, questo primo fattore va soppresso del tutto.

La espressione soprascritta vale -1 nella supposizione che non tutti gl'indici del numero N relativi ai moduli $2^\beta, h_1^{\varpi_1}, \ldots, h_m^{\varpi_m}$ siano pari; e quando invece questi indici sono tutti pari, equivale a $2^{m+2} - 1$ se $\beta > 2$, a $2^{m+1} - 1$ se $\beta = 2$, a $2^m - 1$ se $\beta < 2$. Ma secondo che si avvera l'una o l'altra ipotesi circa gl' indici, il numero N è un non-residuo o un residuo quadratico di M; dunque può conchiudersi:

Se si indica con $\rho(N, 2)$ *una funzione numerica, che vale* 1, *se* N *è un non-residuo quadratico di* M, *e, quando* N *è un residuo quadratico di* M, *vale*

$$\begin{array}{lll} 1 - 2^{m+2} , & \text{se} & \beta > 2 , \\ 1 - 2^{m+1} , & » & \beta = 2 , \\ 1 - 2^{m} , & » & \beta < 2 , \end{array}$$

la somma dei caratteri di N, *rispetto al modulo* M, *appartenenti all'esponente* 2, *è data da* $\mu(2)\rho(N, 2)$.

Passo ora a determinare la somma dei caratteri di N, secondo il modulo M, appartenenti ad un esponente, che sia un numero primo dispari q.

In tal caso vi dovranno essere uno o più caratteri componenti appartenenti all'esponente q, e siano essi quelli relativi ai moduli

$$h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} , h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} , \ldots , h_{n_r}^{\varpi_{n_r}} ;$$

sicchè il fattore primo q è posseduto dai corrispondenti r numeri $\varphi(h^\varpi)$. In con-

seguenza, se indico con $\omega_0 = 1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{q-1}$ le radici dell'equazione binomia $x^q = 1$, la richiesta somma di caratteri è data dall'espressione

$$(1+\omega_1^{\nu_{n_1}}+\omega_2^{\nu_{n_1}}+\cdots+\omega_{q-1}^{\nu_{n_1}})\cdots(1+\omega_1^{\nu_{n_r}}+\omega_2^{\nu_{n_r}}+\cdots+\omega_{q-1}^{\nu_{n_r}})-1 \; .$$

Questa vale -1, nella supposizione che non tutti gl' indici $\nu_{n_1}, \nu_{n_2}, \ldots, \nu_{n_r}$ siano divisibili per q; e vale invece $q^r - 1$, se tutti detti indici sono divisibili per q; ma secondo che si avvera l'una o l'altra ipotesi circa gl' indici di N, questo è un non-residuo q^{ico}, o un residuo q^{ico} del prodotto $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$; si potrà dunque conchiudere:

Sia il modulo M *decomposto in fattori primi eguale a*

$$2^\beta h_1^{\varpi_1} \ldots h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} \ldots h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}} \ldots h_m^{\varpi_m} \; ,$$

e sia il fattore primo dispari q *comune a*

$$\varphi(h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}) \; , \; \varphi(h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}) \; , \; \ldots \; , \; \varphi(h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}) \; ,$$

e si indichi con $\rho(\mathrm{N}, \mathrm{q})$ *una funzione numerica, che vale* 1, *se* N *è un non-residuo* q^{ico} *del prodotto* $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$, *e quando* N *è un residuo* q^{ico} *di questo prodotto, vale invece* $1 - \mathrm{q}^r$, *allora la somma dei caratteri di* N, *rispetto al modulo* M, *appartenenti all'esponente* q, *è data dalla funzione* $\mu(q)\rho(\mathrm{N}, q)$.

Finalmente si tratti della somma dei caratteri appartenenti a un esponente $\Delta = q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3}, \ldots$ essendo gl' indici $i_1, i_2, i_3, \ldots$ tutti differenti, e di cui uno può essere anche 0. Colla guida dei precedenti risultati si perviene alla proposizione:

Se $\Delta = \mathrm{q}_{i_1} \mathrm{q}_{i_2} \mathrm{q}_{i_3} \ldots$, *e si pone*

$$\rho(\mathrm{N} . q_{i_1}) \rho(\mathrm{N}, q_{i_2}) \rho(\mathrm{N}, q_{i_3}) \ldots = \rho(\mathrm{N}, \Delta) \; ,$$

la somma dei caratteri di N, *rispetto al modulo* $\mathrm{M} = 2^\beta \mathrm{h}_1^{\varpi_1} \ldots \mathrm{h}_m^{\varpi_m}$, *appartenente all'esponente* Δ *è data da* $\mu(\Delta)\rho(\mathrm{N}, \Delta)$.

102. Convergenza del prodotto $\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)$, quando χ è un carattere non principale, ed s è reale compresa fra 0 ed 1. In tali ipotesi sussiste l'identità analoga a quella di Eulero $\sum_n{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{1}{\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)}$. — La funzione $\zeta(s, \chi)$, quando è $\mathfrak{R}(s) > 1$ è definita dalle espressioni assolutamente convergenti

$$\zeta(s, \chi) = \sum_n{}' \frac{\chi(n)}{n^s} = \frac{1}{\prod_p{}' \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)} \; ,$$

dove la somma è estesa a tutti gl' interi n primi relativi col modulo M, e il prodotto a tutti i numeri primi assoluti p, che non dividono M.

Se $\mathfrak{R}(s)$ è compresa fra 0 ed 1, la serie converge (ma non assolutamente), il prodotto invece diverge; la funzione $\zeta(s;\chi)$ può ancora essere definita dalla somma; ma non è più lecito asserire che abbia luogo l'eguaglianza col prodotto. Però può dimostrarsi che se χ è un carattere non principale, ed s, essendo astretta a prendere solo valori reali, scende fra 0 ed 1, il prodotto si serba convergente (non però assolutamente), e l'eguaglianza fra serie e prodotto continua ad aver luogo.

Ecco con quali restrizioni può estendersi al caso in esame la proposizione di Eulero.

La (126) può scriversi sotto la forma (cfr. § 99, e Cap. IX, § 78)

$$\sum_{n=1}^{E(x)}{}' \mathrm{L}(n)\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \frac{\chi(p_n)\log p_n}{p_n^{\ s}}+\sum_{n=1}^{\vartheta\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{}' \frac{\chi(p_n^{\ 2})\log p_n}{p_n^{\ 2s}}+\sum_{n=1}^{\vartheta\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}{}' \frac{\chi(p_n^{\ 3})\log p_n}{p_n^{\ 3s}}+\dots=-\frac{\zeta'(s,\chi)}{\zeta(s,\chi)}-\sum_c\frac{x^{c-s}}{c-s},$$

dove alle c, per comodità, si è soppresso l' indice j, ma non perciò esse cessano di indicare le radici della funzione $\zeta(s,\chi)$ contenente il carattere χ, che si considera.

Ora io dico che, al crescere indefinitamente di x, la somma della serie $\sum\limits_c \frac{x^{c-s}}{c-s}$ tende a zero. Per mostrarlo, indicando con s_1 un altro numero, come s, compreso fra 0 ed 1, faccio prima vedere che $\sum\limits_c \frac{x^{c-s_1}}{c-s}$ tende a un limite finito per $x=\infty$, e poi fondandomi su di ciò, mostro che $\lim\limits_{x=\infty}\sum\limits_c\frac{x^{c-s}}{c-s}=0$.

Chiamo ordinatamente c' e $c''i$ le parti reale ed immaginaria di c: è noto [§ 98, a'] che c' è sempre inferiore ad 1. Essendo m un numero reale arbitrario l' espressione $\frac{(x+m)^{c-s_1}-x^{c-s_1}}{c-s}$ può scriversi

$$\begin{aligned}\frac{1}{c-s}\Big\{&[(x+m)^{c'-s_1}\cos(c''\log(x+m))-x^{c'-s_1}\cos(c''\log x)]+\\ &i[(x+m)^{c'-s_1}\operatorname{sen}(c''\log(x+m))-x^{c'-s_1}\operatorname{sen}(c''\log x)]\Big\},\end{aligned}$$

ossia, applicando alle due funzioni reali

$$x^{c'-s_1}\cos(c''\log x)\ ,\ x^{c'-s_1}\operatorname{sen}(c''\log x)$$

il teorema di Lagrange sul valor medio si ha

$$\begin{aligned}\frac{(x+m)^{c-s_1}-x^{c-s_1}}{c-s}=\frac{m}{c-s}\Big\{&(x+\eta m)^{c'-s_1-1}[(c'-s_1)\cos(c''\log(x+\eta m))-c''\operatorname{sen}(c''\log(x+\eta m))]\\ &+i(x+\eta'm)^{c'-s_1-1}[(c'-s_1)\operatorname{sen}(c''\log(x+\eta'm))+c''\cos(c''\log(x+\eta'm))]\Big\},\end{aligned}$$

essendo η,η' due numeri reali compresi fra 0 ed 1. Poichè è $c'<1$ risulta $c'-s_1-1<0$.

Fissato m arbitrariamente, e facendo crescere x indefinitamente, $x+\eta m$ ed $x+\eta' m$ cresceranno anch' esse indefinitamente e $\lim\limits_{x=\infty} \frac{(x+m)^{c-s_1} - x^{c-s_1}}{c-s} = 0$.

Ora con considerazioni analoghe a quelle adoperate da von Mangoldt [cfr. IX, 78 *e), f)*] potendo giustificarsi la inversione dei simboli limite e Σ, sarà lecito conchiudere

$$\lim_{x=\infty} \sum_c \frac{(x+m)^{c-s_1} - x^{c-s_1}}{c-s} = 0 ,$$

e quindi anche

$$\lim_{x=\infty} \left| \sum_c \frac{(x+m)^{c-s_1}}{c-s} - \sum_c \frac{x^{c-s_1}}{c-s} \right| = 0 .$$

Perciò, in virtù della nota condizione di Cauchy per l' esistenza del limite, l' espressione $\sum\limits_c \frac{x^{c-s_1}}{c-s}$, al crescere indefinitamente di x, tende a un limite finito.

Ora supponiamo $s_1 < s$, e sia $s_1 = s - \eta$, sarà

$$\sum_c \frac{x^{c-s_1}}{c-s} = x^{\eta} \sum_c \frac{x^{c-s}}{c-s} .$$

Al crescere indefinitamente di x il primo membro tende a un limite finito, lo stesso quindi deve avvenire pure dal secondo membro, x^{η} cresce indefinitamente, dunque

$$\lim_{x=\infty} \sum_c \frac{x^{c-s}}{c-s} = 0 .$$

In conseguenza il valore di $\sum\limits_{n=1}^{E(x)}{}' \mathrm{L}(n) \frac{\chi(n)}{n^s}$ più sopra scritto mostra che per s reale compreso fra 0 ed 1 la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}' \mathrm{L}(n) \frac{\chi(n)}{n^s}$ è convergente, e che

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\chi(p_n) \log p_n}{p_n^s} + \frac{\chi^2(p_n) \log p_n}{p_n^{2s}} + \frac{\chi^3(p_n) \log p_n}{p_n^{3s}} + \dots \right) = - \frac{\zeta'(s,\chi)}{\zeta(s,\chi)} .$$

Moltiplicando per ds, e integrando frai limiti s ed ∞, si ricava

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s} + \frac{1}{2} \frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}} + \frac{1}{3} \frac{\chi^3(p_n)}{p_n^{3s}} + \dots \right) = \log \zeta(s,\chi)$$

cioè

$$- \sum_{n=1}^{\infty}{}' \log \left(1 - \frac{\chi(p_n)}{p_n^s} \right) = \log \zeta(s,x)$$

e infine

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\chi(p_n)}{p_n^s}\right)} = \zeta(s, \chi) .$$

Resta così estesa l'identità di Eulero. La convergenza del prodotto però non è assoluta perchè $\sum' \frac{1}{p_n^s}$ è divergente per $s \leq 1$. La convergenza del prodotto prova ancora il fatto che la funzione $\zeta(s, \chi)$ non ha radici reali comprese fra 0 ed 1, o in altre parole. come fu costatato per la $\zeta(s)$, che tutti gli zeri γ compresi nella striscia $0 < \mathcal{R}(s) < 1$ sono non reali.

103. Valutazione assintotica della funzione $\vartheta(My + N, x)$. Formole assintotiche di distribuzione, le quali estendono alla forma $My + N$ il teorema trovato da Tchebichef per $4y \pm 1$, e le formole assintotiche date da Cesàro. Teorema di Poincaré sulla totalità dei numeri primi complessi di Gauss. Estensione di questo teorema ai numeri primi ideali nel campo corrispondente all' equazione $x^\nu + 1 = 0$. — Procedo ora alla valutazione assintotica annunziata a principio del § 100. Essendo s una variabile reale, considero la serie

$$\varsigma(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(p_n)}{p_n^s}$$

estesa a tutti numeri primi non divisori del modulo M. Si è già notato (VII, 59; V, 31) che quando χ è il carattere principale essa si riduce a

$$\varsigma(s . \chi_0) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{p_n^s} ,$$

e che allora è convergente per $s > 1$, divergente per $s \leq 1$.

Ciò premesso suppongo che il carattere χ appartenga all'esponente Δ. Prendo in esame la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{j\Delta + 1} \frac{\chi(p_n)}{p_n^{(j\Delta+1)s}} + \frac{1}{j\Delta + 2} \frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{(j\Delta+2)s}} + \frac{1}{j\Delta + 3} \frac{\chi^3(p_n)}{p_n^{(j\Delta+3)s}} + \cdots \right) . \tag{133}$$

Essa è assolutamente convergente per $s > \frac{1}{j\Delta + 1}$. Infatti il modulo del termine generale non supera

$$\frac{1}{j\Delta + 1} \cdot \frac{1}{p_n^{(j\Delta+1)s}} + \frac{1}{j\Delta + 2} \cdot \frac{1}{p_n^{(j\Delta+2)s}} + \frac{1}{j\Delta + 3} \cdot \frac{1}{p_n^{(j\Delta+3)s}} + \cdots ,$$

che è minore di

$$\frac{1}{j\Delta + 1} \left(\frac{1}{p_n^{(j\Delta+1)s}} + \frac{1}{p_n^{(j\Delta+2)s}} + \frac{1}{p_n^{(j\Delta+3)s}} + \cdots \right) ,$$

cioè di

$$\frac{1}{j\Delta+1}\frac{\frac{1}{p_n^{(j\Delta+1)s}}}{1-\frac{1}{p_n^s}};$$

dunque la serie dei moduli dei termini della serie (133) ha i suoi termini inferiori a quelli della serie

$$\frac{1}{j\Delta+1}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\frac{1}{p_n^{(j\Delta+1)s}}}{1-\frac{1}{p_n^s}}.$$

Ora questa s'ottiene da

$$\frac{1}{j\Delta+1}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{p_n^{(j\Delta+1)s}}$$

moltiplicandone i termini per fattori, che non superano un numero finito; quindi convergerà insieme a questa, cioè per $s>\frac{1}{j\Delta+1}$, che era quanto voleva dimostrare.

In virtù del § precedente è convergente per $s>0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\frac{\chi^{\Delta-1}(p_n)}{p_n^{(j\Delta-1)s}}+\frac{1}{j\Delta}\frac{1}{p_n^{j\Delta s}}+\cdots\right);$$

perciò in virtù d'un noto teorema della teoria elementare delle serie, sarà convergente per $s>\frac{1}{j\Delta+1}$ la serie, che s'ottiene sottraendo termine a termine da questa la (133), cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\frac{\chi^{\Delta-1}(p_n)}{p_n^{(j\Delta-1)s}}+\frac{1}{j\Delta}\frac{1}{p_n^{j\Delta s}}\right),$$

e quindi con più ragione per $s\geqq\frac{1}{j\Delta}$; o in altre parole la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\frac{\chi^{\Delta-1}(p_n)}{p_n^{(j\Delta-1)s}}\right)+\frac{1}{j\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{p_n^{j\Delta s}}$$

per $s\geqq\frac{1}{j\Delta}$ rappresenta una quantità finita. Per $s>\frac{1}{j\Delta}$ la serie indicata dalla seconda sommatoria è convergente, quindi pure sarà tale la prima; ma per $s=\frac{1}{j\Delta}$ la seconda diventa divergente, lo stesso deve pure succedere della prima. Perciò $s=\frac{1}{j\Delta}$ è il massimo valore di s, pel quale sono divergenti le due serie: potrò dunque scrivere

$$\lim_{s=\frac{1}{j\Delta}+0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\frac{\chi^{\Delta-1}(p_n)}{p_n^{(j\Delta-1)s}}\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{p_n^{j\Delta s}}}=-\frac{1}{j\Delta}$$

e applicare il teorema di Cesàro (Cap. V, § 29). Mediante questo, posto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\chi(p_n)}{p_n^s}+\frac{1}{2}\frac{\chi^2(p_n)}{p_n^{2s}}+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\frac{\chi^{\Delta-1}(p_n)}{p_n^{(j\Delta-1)s}}\right)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{a_x}{x^s}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{1}{p_n^{j\Delta s}}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{b_x}{x^s},$$

potrò dedurre

$$\lim_{x=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_x}{b_1+b_2+\cdots+b_x}=-\frac{1}{j\Delta}.$$

Ora, restando convenuto che nel resto di questo capitolo frai numeri primi enumerati dalle funzioni ϑ siano esclusi quelli, che dividono il modulo M, si può scrivere

$$a_1+a_2+\cdots+a_x=\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi(p_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})}{}'\chi^2(p_n)+\cdots+\frac{1}{\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)+\frac{1}{\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}})+\frac{1}{\Delta+1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}'\chi(p_n)+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)$$

$$b_1+b_2+\cdots+b_x=\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta}});$$

in conseguenza

$$\lim_{x=\infty}\frac{\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi(p_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})}{}'\chi^2(p_n)+\cdots+\frac{1}{\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)+\frac{1}{\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}})+\frac{1}{\Delta+1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}'\chi(p_n)+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)}{\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta}})}=\frac{-1}{j\Delta}.$$

Questa eguaglianza può tradursi nel sistema

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi(p_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})}{}'\chi^2(p_n)+\cdots+\frac{1}{\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)+\frac{1}{\Delta+1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}'\chi(p_n)+\cdots+\frac{1}{j\Delta-1}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta-1}})}{}'\chi^{\Delta-1}(p_n)$$

$$=-\left\{\frac{1}{\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}})+\frac{1}{2\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{2\Delta}})+\cdots+\frac{1}{j\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{j\Delta}})\right\}+\Omega_j$$

$$(j=1,2,3\ldots.),$$

dove, si noti, i denominatori delle frazioni, che figurano al primo membro sono tutti non multipli di Δ, e invece al secondo membro figurano tutti multipli di Δ. La Ω_j indica una funzione, che, al crescere illimitato di x, diventa infinita di

ordine inferiore a $\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{j\Delta}})$. Questo sistema può riassumersi nell'unica *eguaglianza assintotica*.

$$(134)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x)}{}' \chi(p_n) + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{2}})}{}' \chi^2(p_n) + \cdots + \frac{1}{\Delta-1}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}' \chi^{\Delta-1}(p_n) + \frac{1}{\Delta+1}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}' \chi(p_n) + \frac{1}{\Delta+2}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{\Delta+2}})}{}' \chi^2(p_n) + \cdots + \\ \frac{1}{2\Delta-1}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{2\Delta-1}})}{}' \chi^{\Delta-1}(p_n) + \frac{1}{2\Delta+1}\sum\limits_{n=1}^{\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{2\Delta+1}})}{}' \chi(p_n) + \cdots = -\left\{ \frac{1}{\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{2\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{2\Delta}}) + \frac{1}{3\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{3\Delta}}) + \cdots \right\}. \end{cases}$$

Da essa, applicabile a ciascun carattere che non sia il principale, mi propongo eliminare tutte le sommatorie successive alla prima, e ricavar quindi il valore assintotico di questa. Per far ciò occorre distinguere due casi: *a)* Δ primo, *b)* Δ composto.

a) In questa ipotesi i caratteri $\chi^2, \chi^3, \ldots, \chi^{\Delta-1}$ sono tutti, come χ, appartenenti all'esponente Δ: posso a ciascuno di essi applicare la medesima eguaglianza (134). Fra la primitiva (134), e le dedotte si hanno $\Delta - 1$ eguaglianze, nelle quali prima rimpiazzo la x ordinatamente con

$$x\,,\ x^{\frac{1}{2}}\,,\ x^{\frac{1}{3}}\,,\ \ldots\,,\ x^{\frac{1}{\Delta-1}}\,,$$

e moltiplico per

$$1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \ldots\,,\ \frac{1}{\Delta-1}\,;$$

poi la x con

$$x^{\frac{1}{\Delta+1}}\,,\ x^{\frac{1}{\Delta+2}}\,,\ x^{\frac{1}{\Delta+3}}\,,\ \ldots\,,\ x^{\frac{1}{2\Delta-1}}\,,$$

e moltiplico per

$$\frac{1}{\Delta+1}\,,\ \frac{1}{\Delta+2}\,,\ \frac{1}{\Delta+3}\,,\ \ldots\,,\ \frac{1}{2\Delta-1}\,,$$

e via continuando. Si ottiene così un sistema, che, come quello del (Cap. VIII, § 69), può essere trattato coi fattori di Möbius. Nel caso attuale, moltiplicando le equazioni del sistema rispettivamente per $\mu(1)\,,\mu(2)\,,\ldots,\mu(\Delta-1)\,,\mu(\Delta+1)$, $\mu(\Delta+2)\,,\ldots,\mu(2\Delta-1)\,,\mu(2\Delta+1)\,\ldots$ e sommando si ricava

$$\sum_{n=1}^{\mathfrak{S}(x)}{}' \chi(p_n) = -\left\{ \mu(1)\sum_r \frac{1}{r\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{r\Delta}}) + \mu(2)\sum_r \frac{1}{2r\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{2r\Delta}}) + \cdots + \mu(\Delta-1)\sum_r \frac{1}{r(\Delta-1)\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{r(\Delta-1)\Delta}}) + \right.$$

$$\left. \mu(\Delta+1)\sum_r \frac{1}{r(\Delta+1)\Delta}\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{r(\Delta+1)\Delta}}) + \cdots \right\}.$$

Il secondo membro si può notevolmente ridurre; infatti è facile vedere che il coefficiente di $\mathfrak{S}(x^{\frac{1}{j\Delta}})$, se si pone $j = j'\Delta^t$, essendo j' non divisibile per Δ, è una

somma di funzioni μ estesa ai divisori di j', e quindi è nullo (cfr. VIII, 69). Non restano dunque che i termini, in cui $j'=1$; perciò si ha finalmente

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n) = -\left\{ \frac{1}{\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{\Delta^2}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^2}}) + \frac{1}{\Delta^3}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^3}}) + \dots \right\}.$$

e poichè, nell'ipotesi di quest'alinea, $\mu(\Delta) = -1$, posso scrivere

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n) = \mu(\Delta)\left\{ \frac{1}{\Delta}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{\Delta^2}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^2}}) + \frac{1}{\Delta^3}\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^3}}) + \dots \right\}.$$

b) Decompongo Δ in fattori primi, e suppongo che si abbia $\Delta = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda$. Sviluppo il prodotto

$$\varphi(\Delta) = \Delta\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\dots\left(1-\frac{1}{c}\right),$$

ed ho

$$\varphi(\Delta) = \Delta - \frac{\Delta}{a} - \dots + \frac{\Delta}{ab} + \dots - \frac{\Delta}{abc} - \dots .$$

I caratteri

$$\chi,\ \chi^a,\ \dots,\ \chi^{ab},\ \dots,\ \chi^{abc},\ \dots$$

appartengono rispettivamente agli esponenti

$$\Delta,\ \frac{\Delta}{a},\ \dots,\ \frac{\Delta}{ab},\ \dots,\ \frac{\Delta}{abc},\ \dots;$$

quindi, se Δ contiene fattori quadratici, nessuno di questi caratteri sarà principale; ma se Δ non contiene fattori quadratici, l'ultimo dei precedenti caratteri sarà il principale.

Nella prima di queste due ipotesi posso scrivere eguaglianze come la (134) relativamente a tutti i caratteri

$$\chi,\ \chi^a,\ \dots,\ \chi^{ab},\ \dots,\ \chi^{abc},\ \dots;$$

rimpiazzo poi in esse x rispettivamente con

$$x,\ x^{\frac{1}{a}},\ \dots,\ x^{\frac{1}{ab}},\ \dots,\ x^{\frac{1}{abc}},\ \dots,$$

moltiplico ordinatamente per

$$1,\ -\frac{1}{a},\ \dots,\ +\frac{1}{ab},\ \dots,\ -\frac{1}{abc},\ \dots$$

e sommo. Con tale artifizio si vengono a sopprimere dall'eguaglianza (134) tutti i termini, in cui compariscono frazioni aventi i denominatori non primi con Δ;

se quindi chiamo con $1, \nu_1, \nu_2, \ldots$ i numeri primi con Δ, la (134) si riduce a

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n) + \frac{1}{\nu_1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\nu_1}})}{}' \chi^{\nu_1}(p_n) + \frac{1}{\nu_2} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\nu_2}})}{}' \chi^{\nu_2}(p_n) + \cdots + \frac{1}{\Delta-1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}' \chi^{\Delta-1}(p_n) + \frac{1}{\Delta+1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}' \chi(p_n) + \cdots = 0.$$

Se invece Δ non contiene fattori quadratici, potrò scrivere eguaglianze come la (134) per tutti, meno l'ultimo, dei caratteri

$$\chi, \chi^a, \ldots, \chi^{ab}, \ldots, \chi^{abc}, \ldots;$$

e, operando come poc'anzi, risulta

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n) + \frac{1}{\nu_1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\nu_1}})}{}' \chi^{\nu_1}(p_n) + \frac{1}{\nu_2} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\nu_2}})}{}' \chi^{\nu_2}(p_n) + \cdots + \frac{1}{\Delta-1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta-1}})}{}' \chi^{\Delta-1}(p_n) + \frac{1}{\Delta+1} \sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{\Delta+1}})}{}' \chi(p_n) + \cdots =$$

$$\mu(\Delta) \left\{ \frac{1}{\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{2\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{2\Delta}}) + \frac{1}{3\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{3\Delta}}) + \cdots \right\};$$

della quale è caso particolare la precedente, giacchè questa risponde all' ipotesi $\mu(\Delta) = 0$.

I caratteri $\chi^{\nu_1}, \chi^{\nu_2}, \ldots$ sono pure essi appartenenti all'esponente Δ, quindi l'ultima eguaglianza trattata coi fattori di Möbius, come lo è stata la (134) nell'alinea precedente, dà

$$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n) = \mu(\Delta) \left\{ \frac{1}{\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{\Delta^2} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^2}}) + \frac{1}{\Delta^3} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^3}}) + \cdots \right\},$$

la quale è dunque quella, che in ogni caso porge assintoticamente il valore di $\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi(p_n)$.

104. — Si hanno adesso tutti gli elementi per la valutazione assintotica del secondo membro di (132), nella quale in virtù d'un noto teorema della teoria elementare dei limiti (IV, 23) potrà rimpiazzarsi la funzione f con ϑ, sicchè si abbia

$$\vartheta(My + N, x) = \frac{1}{\varphi(M)} \left\{ \vartheta(x) + \frac{1}{\chi_1(N)} \sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi_1(p_n) + \cdots + \frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)} \sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}' \chi_{\varphi(M)-1}(p_n) \right\}.$$

Delle sommatorie, che figurano al secondo membro, hanno il medesimo valore quelle corrispondenti a caratteri appartenenti allo stesso esponente Δ: e propriamente hanno il valore

$$\mu(\Delta) \left\{ \frac{1}{\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{\Delta^2} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^2}}) + \frac{1}{\Delta^3} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^3}}) + \cdots \right\}$$

perciò l'insieme di tali somme equivale a quest'ultima espressione moltiplicata per la somma dei caratteri del numero N appartenenti all'esponente Δ.

Tenendo presenti i risultati del § 101, ed assegnando il valore 0 a $\rho(N, \Delta)$, quando Δ ammette divisori quadratici, si rifletta inoltre che il sistema dei divisori Δ, di cui nell'enunciato finale del § 100, è contenuto nel sistema dei divisori del numero $\varphi(M)$; però quest'ultimo sistema può contenere in dippiù altri divisori, pei quali la funzione μ è nulla. Si conchiuderà dopo ciò che la totalità $\vartheta(My + N, x)$ dei numeri primi della forma $My+N$, e non superiori ad x, è data assintoticamente dalla formola

$$(135) \quad \vartheta(My + N, x) = \frac{1}{\varphi(M)} \left\{ \vartheta(x) + \sum_{\Delta} \rho(N, \Delta) \left[\frac{1}{\Delta} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta}}) + \frac{1}{\Delta^2} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^2}}) + \frac{1}{\Delta^3} \vartheta(x^{\frac{1}{\Delta^3}}) + \cdots \right] \right.$$

la sommatoria essendo estesa a tutti i divisori Δ, diversi da 1, di $\varphi(M)$.

Casi particolari.

a) Se si fa $M = 4$, ed N successivamente è eguale ad 1 e a 3, la precedente formola dà luogo alle due

$$(136) \quad \begin{cases} \vartheta(4y + 1, x) = \frac{1}{2} \left\{ \vartheta(x) - \frac{1}{2} \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4} \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) - \frac{1}{8} \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) - \cdots \right\} \\ \vartheta(4y + 3, x) = \frac{1}{2} \left\{ \vartheta(x) + \frac{1}{2} \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \frac{1}{8} \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots \right\}, \end{cases}$$

le quali sono le formole di Cesàro rese più complete, e costituiscono un perfezionamento del teorema o legge di distribuzione di Tchebichef (cfr. § 94).

b) Se si fa $M = 2^\beta$, essendo $\beta > 2$, si hanno le formole

$$\vartheta(2^\beta y + N, x) = \frac{1}{2^{\beta-1}} \vartheta(x) - \frac{3}{2^\beta} \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{3}{2^{\beta+1}} \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) - \frac{3}{2^{\beta+2}} \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) - \cdots,$$

se N è della forma $8y + 1$, e

$$\vartheta(2^\beta y + N, x) = \frac{1}{2^{\beta-1}} \vartheta(x) + \frac{1}{2^\beta} \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2^{\beta+1}} \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \frac{1}{2^{\beta+2}} \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots,$$

se N è delle forme $8y + 3$, $8y + 5$, $8y + 7$.

c) M sia un numero, pel quale sia possibile colla riga e col compasso la divisione in parti eguali del cerchio, cioè sia $M = 2^\beta h_1 h_2 \ldots h_m$, essendo $h_1 = 2^{\alpha_1} + 1$, $h_2 = 2^{\alpha_2} + 1, \ldots, h_m = 2^{\alpha_m} + 1$ (cfr. I, 4); sarà $\varphi(M) = 2^{\beta+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m-1}$, e quindi

$$\vartheta(My + N, x) = \frac{1}{2^{\beta+\alpha_1+\cdots+\alpha_m-1}} \left\{ \vartheta(x) + \rho(N, 2) \left[\frac{1}{2} \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4} \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \frac{1}{8} \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots \right] \right\}.$$

d) La formola (135)', e quelle segnatamente, cui essa riducesi nei casi particolari notati negli alinea *a)* e *c)*, possono essere utilmente applicate per determinare assintoticamente la totalità dei numeri primi fra gl' interi complessi,

la cui norma non supera il numero reale positivo x, e poi ad estendere il teorema ottenuto, conforme a quanto annunciai nel § 95.

E in primo luogo si consideri il campo degl' interi complessi generato dalla forma $a_0+a_1 i$, essendo, come al solito, i radice dell'equazione quadratica $x^2+1=0$. Riterrò qui e in seguito come non essenzialmente distinti i numeri associati, cioè quelli, il cui quoziente è una qualsiasi delle unità: e allora si sa (vedi le fonti citate nel suindicato § 95) che dei numeri primi complessi con norma non superiore ad x ne fornisce uno (avente per norma 2) il numero primo reale 2, uno ciascun numero reale positivo della forma $4y+3$ non superiore ad $x^{\frac{1}{2}}$, e due ciascun numero primo reale positivo della forma $4y+1$, il quale non supera x; di modo che la totalità cercata è espressa dalla formola

$$1+\vartheta(4y+3\,,x^{\frac{1}{2}})+2\vartheta(4y+1\,,x)\,.$$

Sostituendo in questa i valori forniti dalle (136) si ha

$$1+\frac{1}{2}\left\{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{4}})+\frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{8}})+\dots\right\}+\vartheta(x)-\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{4}})-\frac{1}{8}\vartheta(x^{\frac{1}{8}})-\dots=1+\vartheta(x)\;,$$

nella quale $\vartheta(x)$ non è enumerato il fattore primo 2, sicchè $1+\vartheta(x)$ esprime la totalità nei numeri primi reali positivi non superiori ad x. Si può quindi enunciare il teorema:

La totalità dei numeri primi complessi, dei quali la norma non supera il numero reale positivo x, *appartenenti al campo generato dalla forma* $\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\mathrm{i}$, *essendo* $\mathrm{i}^2+1=0$, *eguaglia assintoticamente la totalità dei numeri primi reali positivi non superiori ad* x, *e perciò assintoticamente è espressa dal logaritmo integrale di* x.

A questo risultato è per altra via pervenuto il Poincaré nella memoria citata in secondo luogo a § 95. Mediante la formola (135) esso può facilmente estendersi.

Supposto p un numero primo reale positivo dispari, pensiamo il campo dei numeri interi generato dalla forma

$$a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_{p-1}r^{p-1}\;,$$

dove r è una radice primitiva dell'equazione

$$x^p+1=0\;.$$

Com'è noto (vedi Bachmann, Zahlentheorie, III Theil, XVIII Vorlesung) per potere, quale che sia il numero primo dispari p, estendere a questo campo le medesime leggi della divisibilità degl' interi reali, occorre introdurre i così detti numeri ideali. Mediante tale ampliamento i fattori primi, in cui un numero può, ed in un unico modo, decomporsi potranno essere effettivi, ma saranno generalmente ideali. Tutti i numeri primi ideali del campo si potranno ottenere mediante la decomposizione in fattori primi ideali dei numeri primi reali.

Il numero primo reale p dà nel campo considerato un solo numero primo avente per norma p. Per trovare quanti numeri primi nel medesimo campo dà ogni numero primo reale q diverso da p, bisogna trovare l'esponente Δ, cui appartiene, secondo il modulo p, il numero q; tale esponente, come si sa, è un divisore di $\varphi(p)=p-1$, e allora il numero q si decompone nel prodotto di $\frac{p-1}{\Delta}$ numeri primi ideali di ognuno dei quali la norma è q^Δ.

Or poichè numeri congrui, secondo il modulo p, appartengono allo stesso esponente, se N è uno qualunque dei numeri $1, 2, \ldots, p-1$, e Δ è l'esponente cui N appartiene, secondo il modulo p, i numeri primi reali compresi nella medesima forma lineare $py+\mathrm{N}$ genereranno ognuno $\frac{p-1}{\Delta}$ numeri primi ideali, di ciascuno dei quali la norma è sempre la potenza Δ^{ma} del numero primo reale, che l' ha fornito.

In conseguenza, di numeri primi ideali aventi la norma non superiore ad x, i numeri primi reali racchiusi nella forma lineare $py+\mathrm{N}$ ne forniscono

$$\frac{p-1}{\Delta}\,\vartheta(py+\mathrm{N}, x^{\frac{1}{\Delta}}) .$$

Laonde la totalità dei numeri primi ideali del campo considerato, aventi norma non superiore ad x, è espressa dalla formola

$$1+(p-1)\sum_{\mathrm{N}=1}^{p-1}\frac{1}{\Delta}\,\vartheta(py+\mathrm{N}, x^{\frac{1}{\Delta}}) .$$

Questa sommatoria è estesa ai possibili valori di N, cioè a tutti i numeri $1, 2, \ldots, p-1$. Ora io dico che essa può trasformarsi in un'altra estesa soltanto a tutti i divisori Δ di $p-1$. Infatti dei numeri $1, 2, \ldots, p-1$ ve ne sono $\varphi(\Delta)$ appartenenti all'esponente Δ, e questi tutti sono di p residui degli ordini indicati dai divisori di $\frac{p-1}{\Delta}$, e non residui degli ordini indicati dai rimanenti divisori di $p-1$; in conseguenza la funzione $\vartheta(py+\mathrm{N}, x^{\frac{1}{\Delta}})$ per tutti i $\varphi(\Delta)$ numeri N appartenenti al medesimo esponente Δ, avrà sempre lo stesso valore. Indicando perciò con N_Δ uno qualunque dei $\varphi(\Delta)$ numeri N anzidetti, la precedente formola potrà scriversi

$$1+(p-1)\sum_{\Delta}\frac{\varphi(\Delta)}{\Delta}\,\vartheta(py+\mathrm{N}_\Delta, x^{\frac{1}{\Delta}}) .$$

Il termine della sommatoria di ordine di grandezza più elevato è $(p-1)\vartheta(py+1,x)$, e la parte di questo di ordine più elevato è $\vartheta(x)$; sicchè può dirsi che in una prima approssimazione, anche nel campo corrispondente a qualunque numero primo reale positivo dispari p, la totalità richiesta può essere espressa assintoticamente da $\vartheta(x)$, e quindi anche da $\mathrm{Li}(x)$.

Però v' ha un caso, in cui l'approssimazione, con cui $\vartheta(x)$ esprime il risultato è pari a quella raggiunta nel teorema surriferito di Poincaré.

Suppongo che p sia un numero primo reale positivo di Gauss, vale a dire della forma $2^{\tau}+1$. Allora i successivi divisori di $p-1$ sono $1, 2, 2^2, \ldots, 2^a$.

In conseguenza la formola ultima trovata diventa

$$1+2^a \sum_{r=0}^{a} \frac{\varphi(2^r)}{2^r} \vartheta(py+\mathrm{N}_{2^r}, a^{\frac{1}{2^r}})$$

e poichè N_{2^r} solo per $r=a$ è non-residuo quadratico di p, in virtù della formola dell'alinea $c)$, si ha per la totalità richiesta

$$1+\vartheta(x)+\sum_{r=0}^{a-1} \Big\} \varphi(2^r)-\varphi(2^{r-1})-\ldots-\varphi(2)-1 \Big\{ \frac{\vartheta(x^{\frac{1}{2^r}})}{2^r} + \Big\} \varphi(2^a)-\varphi(2^{a-1})-\ldots-\varphi(2)-1 \Big\{ \sum_{r=a} \frac{\vartheta(x^{\frac{1}{2^r}})}{2^r} ;$$

ma le somme fra grappe sono nulle, dunque la precedente somma si riduce ad $1+\vartheta(x)$, nella quale $\vartheta(x)$ non è enumerato il numero primo p, sicchè $1+\vartheta(x)$ esprime la totalità dei numeri primi reali positivi non superiori ad x. Si può quindi con *pari approssimazione che nel teorema di Poincaré* enunciare:

La totalità dei numeri primi ideali, dei quali la norma non supera il numero reale positivo x, *appartenente al campo generato dalla forma*

$$a_0+a_1 r+a_2 r^2+\cdots+a_{p-1} r^{p-1} ,$$

essendo r *radice primitiva dell'equazione binomia* $x^p+1=0$, *il cui grado è un numero primo reale positivo della forma* $2^{\alpha}+1$, *eguaglia assintoticamente la totalità dei numeri primi reali positivi non superiori ad* x, *e perciò assintoticamente è espressa dal logaritmo integrale di* x.

105. Distribuzione dei numeri primi fra le due classi dei residui e dei non residui quadratici, d'un dato numero M. Estensione al caso dei residui q^{ici} **(*q* essendo un fattore primo dispari di $\varphi(\mathrm{M})$). Illustrazioni numeriche.** — La legge di distribuzione di Tchebichef è caso particolare di una legge ben più generale. Mi propongo la ricerca della distribuzione dei numeri primi non superiori ad x fra le due classi dei residui e dei non-residui quadratici del numero M. Basterà immaginare scritta la (135) per tutti i numeri N primi con M, inferiori ad M, e residui quadratici di M, e sommare le formole risultanti. Occorrerà dunque calcolare la sommatoria $\sum \rho(\mathrm{N}, \Delta)$ estesa a tutti i predetti valori di N. Comincio dal caso $\Delta=2$. Suppongo, come al solito, che il numero M decompostò in fattori primi sia eguale a $2^{\beta} h_1^{\varpi_1} \ldots h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} \ldots h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}} \ldots h_m^{\varpi_m}$, che α, λ siano gl' indici di N relativamente al modulo 2^{β}, e $\nu_1, \ldots, \nu_{n_1}, \ldots, \nu_{n_2}, \ldots, \nu_{n_r}, \ldots, \nu_m$ siano quelli relativi ai moduli $h_1^{\varpi_1}, \ldots, h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}, \ldots, h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}, \ldots, h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}, \ldots, h_m^{\varpi_m}$.

Se N è residuo quadratico di M, tutti gl' indici sono pari, basta che ve ne sia uno impari, perchè N sia un non-residuo quadratico di M.

Inoltre dei possibili valori per ciascun indice, metà sono pari e metà impa-

ri. Quindi i possibili valori pari degl' indici sono 1 per α, $\frac{1}{2^2}\varphi(2^\beta)$ per λ (supposto $\beta > 2$), $\frac{1}{2}\varphi(h_1^{\varpi_1})$ per $\nu_1, \ldots, \frac{1}{2}\varphi(h_m^{\varpi_m})$ per ν_m; in conseguenza la totalità dei residui quadratici di M, frai numeri N primi con M ed inferiori ad M, è data dall'espressione $\frac{1}{2^{m+2}}\varphi(M)$. Se fosse $\beta = 2$, tale espressione si muterebbe in $\frac{1}{2^{m+1}}\varphi(M)$, e se $\beta < 2$ in $\frac{1}{2^m}\varphi(M)$.

Sicchè (cfr. § 101)

$$\begin{aligned}\sum\rho(N, 2) &= \frac{1 - 2^{m+2}}{2^{m+2}}\varphi(M) \quad \text{se} \quad \beta > 2\\ &= \frac{1 - 2^{m+1}}{2^{m+1}}\varphi(M) \quad \text{»} \quad \beta = 2\\ &= \frac{1 - 2^m}{2^m}\varphi(M) \quad \text{»} \quad \beta < 2,\end{aligned}$$

Calcolo ora $\Sigma\rho(N, q)$ con q primo dispari. I fattori di $\varphi(M)$, che posseggono il fattore primo dispari q, siano

$$\varphi(h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}),\ \varphi(h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}),\ \ldots,\ \varphi(h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}).$$

Dei possibili valori pari di $\nu_{n_1}, \nu_{n_2}, \ldots, \nu_{n_r}$ ve ne sono rispettivamente

$$\frac{1}{2q}\varphi(h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}),\ \frac{1}{2q}\varphi(h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}),\ \ldots,\ \frac{1}{2q}\varphi(h_{n_r}^{\varpi_{n_r}})$$

divisibili per q; quindi dei numeri N, già residui quadratici di M, che siano ancora residui q^{ici} di $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$ ve ne sono $\frac{1}{2^{m+2}} \cdot \frac{1}{q^r}\varphi(M)$, supposto $\beta > 2$, e quindi dei numeri N già residui quadratici di M, e che siano non-residui q^{ici} di $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$ ve ne ha $\frac{1}{2^{m+2}} \frac{q^r - 1}{q^r}\varphi(M)$.

Nel caso che sia $\beta = 2$ o $\beta < 2$ l'esponente $m + 2$ si muta in $m + 1$ o in m. In conseguenza si trova subito $\Sigma\rho(N, q) = 0$ (cfr. § 101).

In modo analogo ragionando per le altre $\Sigma\rho(N, \Delta)$, si perverrebbe alla conchiusione che anch'esse sono nulle.

Si potrà dunque enunciare la seguente legge:

La totalità dei numeri primi non superiori ad x *e residui quadratici di* $M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} \ldots h_m^{\varpi_m}$, *se* $\beta > 2$, *è data assintoticamente da*

$$\frac{1}{2^{m+2}}\left\{\vartheta(x) + (1 - 2^{m+2})\left[\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \frac{1}{8}\vartheta(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots\right]\right\},$$

e in conseguenza quella dei numeri primi non superiori ad x, *e non residui quadratici*

di M *è fornita da*

$$\frac{2^{m+2}-1}{2^{m+2}}\left\{\vartheta(x)+\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{4}})+\frac{1}{8}\vartheta(x^{\frac{1}{8}})+\cdots\right\}.$$

Se $\beta=2$, *o* $\beta<2$, *l'esponente* $m+2$ *si muta in* $m+1$, *o* m.

Ecco dunque la legge più generale di distribuzione, che comprende in sè la legge di Tchebichef. Se si cerca in quali casi particolari quella si riduce a questa, si trova che ciò non avviene che o quando $\beta=2$, $m=0$, e si hanno proprio le formole (136); oppure quando $\beta=1$, oppure 0, ed $m=1$, e si ha un teorema che, in una prima approssimazione, può enunciarsi:

Ogni numero potenza di un numero primo dispari, o doppio di una tale potenza, in media, ammette tanti residui quadratici primi inferiori a

$$x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{8}}+\cdots$$

quanti non-residui quadratici primi inferiori a $x-x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{8}}-\ldots$ (cfr. pag. 6 della nota di Cesàro citata a § 94).

Fra breve (§ 107) confermerò con esempii numerici le leggi dedotte in questo §.

106. — Un calcolo perfettamente analogo conduce alla distribuzione dei numeri primi non superiori ad x fra le due classi dei residui e non residui q^{ici} del numero $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}\ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$, e poichè la congruenza $x^q\equiv N$ (mod. M) ha o no soluzioni secondo che ne ha o no l'altra $x^q\equiv N$ (mod. $h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}\ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}$), si giunge al teorema:

Se q *è un numero primo dispari fattore comune a* $\varphi(h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}), \varphi(h_{n_2}^{\varpi_{n_2}}),\ldots,\varphi(h_{n_r}^{\varpi_{n_r}})$, *la totalità dei numeri primi non superiori ad* x, *e residui* q^{ici} *di* M *è data da*

$$\frac{1}{q^r}\left\{\vartheta(x)+(1-q^r)\left[\frac{1}{q}\vartheta(x^{\frac{1}{q}})+\frac{1}{q^2}\vartheta(x^{\frac{1}{q^2}})+\frac{1}{q^3}\vartheta(x^{\frac{1}{q^3}})+\cdots\right]\right\},$$

e quella dei numeri primi non superiori ad x *e non residui* q^{ici} *di* M *da*

$$\frac{q^r-1}{q^r}\left\{\vartheta(x)+\frac{1}{q}\vartheta(x^{\frac{1}{q}})+\frac{1}{q^2}\vartheta(x^{\frac{1}{q^2}})+\frac{1}{q^3}\vartheta(x^{\frac{1}{q^3}})+\cdots\right\}.$$

107. — Casi particolari dell' enunciato finale del § 105 sono le distribuzioni dei numeri primi fra le forme $3y+1$ e $3y+2$, o anche fra le altre $10y\pm1$, e $10y\pm3$ notate a pag. 4 della memoria di Cesàro poc'anzi ricordata.

Sarà bene, come più sopra ho promesso, confermare con qualche esempio numerico la legge più generale del medesimo § 105, e quella del § 106.

Esempio I. Sia $M=2^4.3^2.13=1872$, $x=1000$; nel calcolare i simboli ϑ bisogna non computare (cfr. 103) i numeri primi divisori di M; quindi

$$\vartheta(x)=165\quad,\quad\vartheta(x^{\frac{1}{2}})=8\quad,\quad\vartheta(x^{\frac{1}{4}})=1\ ,$$

e nulle le successive ϑ; perciò la legge fornisce che vi sono

$$\frac{1}{2^4}\left\{165 - 15\left(4 + \frac{1}{4}\right)\right\} = \frac{405}{64} = 6\frac{21}{24}$$

numeri primi inferiori a 1000, e residui quadratici di 1872, e $158\frac{43}{64}$ numeri primi inferiori a 1000 e non residui quadratici di 1872.

Dalle tavole degl' indici (Tchebichef, Teoria delle congruenze, trad. Massarini, p. 248) si trova che un numero per essere residuo quadratico di 1872 deve essere congruente ad 1 secondo il modulo 8, ad 1 secondo il modulo 3, e ad uno dei numeri 1, 3, 4. 9, 10, 12 secondo il modulo 13. Ora dalle tavole dei numeri primi si riscontra che frai numeri primi inferiori a 1000 non vi sono che solo i numeri 313, 337, 433, 601, 673, 937, che verificano tali condizioni; essendo essi in numero di 6, il risultato che dà la legge assintotica può dirsi soddisfacente.

Esempio II. Sia $M = 2.11^{\varpi}$, $x = 1300$; quindi

$$\vartheta(x) = 209 \quad , \quad \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) = 9 \quad , \quad \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) = 2 \; ,$$

e nulle le successive ϑ; perciò, secondo la legge vi sono

$$\frac{1}{2}\left(209 - \frac{9}{2} - \frac{2}{4}\right) = 102$$

numeri primi inferiori a 1300 e residui quadratici di 2.11^{ϖ}, e

$$\frac{1}{2}\left(209 + \frac{9}{2} + \frac{2}{4}\right) = 107$$

numeri primi inferiori a 1300, e non residui quadratici di 2.11^{ϖ}.

I residui quadratici debbono essere equivalenti a uno dei numeri 1, 3, 4, 5, 9 secondo il modulo 11, e i non residui congruenti a 2, 6, 7, 8, 10; laonde la effettiva enumerazione porge i numeri 103 in luogo di 102, e 106 in luogo di 107.

Esempio III. Essendo 3 fattore comune a $\varphi(3^2)$ e a $\varphi(13)$, cerchiamo la ripartizione dei numeri primi inferiori a 1000 fra le due classi dei residui e non residui cubici di $3^2.13 = 117$.

La legge del § 106 dà

pei residui cubici $\qquad \frac{1}{9}\left\{166 - 8\left(\frac{1}{3}.3 + \frac{1}{9}\right)\right\} = \frac{1414}{81} = 17\frac{37}{81}$

pei non residui cubici $\qquad \frac{8}{9}\left\{166 + \frac{1}{3}.3 + \frac{1}{9}\right\} = \frac{12032}{81} = 148\frac{44}{81}$.

D'altra parte i residui cubici di $3^2.13$ debbono essere congruenti ad 1 o ad 8 secondo il modulo 9, e ad uno dei numeri 1, 5, 8, 12 secondo il modulo 13.

Ora frai numeri primi inferiori a 1000 non vi sono che i numeri

53 , 73 , 109 , 181 , 233 , 307 , 359 , 467 , 521 , 541 , 577 , 593 ,
701 , 811 , 827 , 863 , 883 , 937

i quali soddisfino a queste condizioni. Essendo essi 18, la legge si trova verificata.

108. Modo come varia $\vartheta(My+N, x)$, quando N percorre la successione dei numeri inferiori ad M, e primi relativi ad M. Quali di queste forme $My+N$, che così s'ottengono, risultano più ricche di numeri primi. Desinenze n-cifre preferite dai numeri primi. Illustrazioni numeriche. — La formola (135) mette pienamente in luce come, dato M, varia la totalità dei numeri primi della forma lineare $My+N$ fino al limite x, quando N percorre la successione dei numeri inferiori ad M, e primi relativi ad M. Tutte le classi per le quali N è non residuo quadratico di M, e [considerati *tutti* i fattori primi impari q di $\varphi(M)$] non residuo q^{ico} di M, sono fra loro egualmente ricche di numeri primi, e più ricche delle rimanenti. Cominciano a scarseggiare i numeri primi quando N diventa uno dei detti residui, e segnatamente quadratico; le classi più povere di numeri primi sono appunto quelle, in cui N è residuo quadratico di M, e contemporaneamente (per tutte le q) residuo q^{ico} di M.

Il numero 1 è certamente fra questi, laonde la classe $My+1$ è sempre fra le più scarse di numeri primi.

Esempio I. Una importante applicazione di quanto precede è la seguente:

Chiamando *desinenza n-cifra* di un numero il numero espresso dalle ultime n cifre a destra di esso, si vuol determinare la totalità dei numeri primi fino al limite x, che hanno una desinenza n-cifra assegnata, e quindi appurare quelle desinenze che sono più o meno preferite dai numeri primi.

Per rispondere a tale quesito basta supporre in ciò che precede $M=10^n$, sarà $\varphi(M)=2^{n+1}.5^{n-1}$, $q_0=2$, $q_1=5$, supposta $n>1$. Ometto il caso di $n=1$, pel quale s'avrebbe la distribuzione fra le forme $10y\pm1$, $10y\pm3$ già notata dal Cesàro.

In virtù della (135) si ha dunque la totalità dei numeri primi aventi la desinenza n-cifra d, e non superiori ad x, espressa dalla formola

$$\vartheta(10^n y+d, x)=\frac{1}{2^{n+1}.5^{n-1}}\Big\{\vartheta(x)+\rho(d,2)\left[\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{4}})+\frac{1}{8}\vartheta(x^{\frac{1}{8}})+\cdots\right]$$

$$+\rho(d,5)\left[\frac{1}{5}\vartheta(x^{\frac{1}{5}})+\frac{1}{25}\vartheta(x^{\frac{1}{25}})+\cdots\right]+\rho(d,2)\rho(d,5)\left[\frac{1}{10}\vartheta(x^{\frac{1}{10}})+\frac{1}{100}\vartheta(x^{\frac{1}{100}})+\cdots\right]\Big\}$$

nella quale eguaglianza, quando d è residuo quadratico di 10^n, $\rho(d,2)$ è eguale a -7 o a -3 secondo che n è maggiore o eguale a 2, e, quando d è non residuo quadratico di 10^n, $\rho(d,2)=1$. Inoltre, quando d è residuo quintico di 10^n, $\rho(d,5)=-4$, e quando d è non residuo quintico di 10^n, $\rho(d,5)=1$.

Scendendo al caso particolare delle desinenze bicifre, si conchiude che fra esse le meno preferite dai numeri primi sono, le due desinenze, che sono ad un tempo residuo quadratico, e quintico di 100, vale a dire

$$d_{2,5} = 01 \ , \ 49 \ .$$

Seguono poi le otto desinenze, che sono soltanto residui quadratici di 100, cioè

$$d_2 = 09 \ , \ 21 \ , \ 29 \ , \ 41 \ , \ 61 \ , \ 69 \ , \ 81 \ , \ 89 \ .$$

Verranno poi con maggiore predilezione le sei desinenze, che sono soltanto residui quintici di 100, cioè

$$d_5 = 07 \ , \ 43 \ , \ 51 \ , \ 57 \ , \ 93 \ , \ 99 \ .$$

Le più preferite sono in ultimo le ventiquattro desinenze non-residui quadratici, e non-residui quintici di 100

$$d_0 = 03 \ , \ 11 \ , \ 13 \ , \ 17 \ , \ 19 \ , \ 23 \ , \ 27 \ , \ 31 \ , \ 33 \ , \ 37 \ , \ 39 \ , \ 47 \ , \ 53 \ , \ 59 \ , \ 63 \ ,$$
$$67 \ , \ 71 \ , \ 73 \ , \ 77 \ , \ 79 \ , \ 83 \ , \ 87 \ , \ 91 \ , \ 97 \ .$$

Per potere saggiare il grado di esattezza di questi risultati bisognerebbe confrontare, per grandi valori di x, i numeri dedotti dalle formole, e quelli ricavati colla ispezione delle tavole; ed occorre far ciò per rilevanti valori di x sia per la natura assintotica delle formole, sia perchè, pei valori minori di x, le differenze fra le totalità, per desinenze appartenenti a classi diverse, sono poco sensibili. Nondimeno, per moderati valori di x, dette differenze si possono rendere sensibili riunendo le totalità delle desinenze appartenenti alla medesima classe. Così in particolare suppongo $x = 6000$. Allora la formola precedente dà come valore della funzione $\mathfrak{S}$ per ciascuna desinenza $d_{2,5}$ il numero 18,755, per ogni desinenza d_2 18,780, per ciascuna desinenza d_5 19,755, e per ogni desinenza d_0 19,780.

Riunendo le dedotte totalità dei numeri primi per tutte le desinenze appartenenti alla medesima classe e confrontandole con quelle dedotte dalle tavole si ha

	valutata colla formola	valutata colla enum. sulle tavole
$\mathfrak{S}(100y + d_{2,5} \ , 6000) =$	37,510	38
$\mathfrak{S}(100y + d_2 \ , 6000) =$	150,240	146
$\mathfrak{S}(100y + d_5 \ , 6000) =$	118,530	122
$\mathfrak{S}(100y + d_0 \ , 6000) =$	474,720	475
	781	781

Ecco invece un esempio relativo ad $x = 1\,000\,000$ e per un'unica desinenza per ciascuna classe

	valutata colla formola	valutata colla enum. sulle tavole
$\vartheta(100y+49\ ,\ 1\,000\,000) =$	$1955\,\frac{1515}{1600}$	1960
$\vartheta(100y+41\ ,\ 1\,000\,000) =$	$1956\,\frac{15}{1600}$	1955
$\vartheta(100y+99\ ,\ 1\,000\,000) =$	$1964\,\frac{711}{1600}$	1966
$\vartheta(100y+19\ ,\ 1\,000\,000) =$	$1964\,\frac{891}{1600}$	1977

Esempio II.

$$M = 198 = 2\,.\,3^2\,.\,11\ ,\ \varphi(M) = 60\ ,\ q_0 = 2\ ,\ q_1 = 3\ ,\ q_2 = 5$$

perciò

$$\vartheta(198y + N, x) = \frac{1}{60}\Big\{\vartheta(x) + \rho(N,2)\left[\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{4}\vartheta(x^{\frac{1}{4}}) + \cdots\right]$$

$$+\rho(N,3)\left[\frac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{9}\vartheta(x^{\frac{1}{9}}) + \cdots\right] + \rho(N,5)\left[\frac{1}{5}\vartheta(x^{\frac{1}{5}}) + \cdots\right]$$

$$+\rho(N,2)\rho(N,3)\left[\frac{1}{6}\vartheta(x^{\frac{1}{6}}) + \cdots\right] + \rho(N,5)\rho(N,2)\left[\frac{1}{10}\vartheta(x^{\frac{1}{10}}) + \cdots\right]$$

$$+\rho(N,3)\rho(N,5)\left[\frac{1}{15}\vartheta(x^{\frac{1}{15}}) + \cdots\right] + \rho(N,2)\rho(N,3)\rho(N,5)\left[\frac{1}{30}\vartheta(x^{\frac{1}{30}}) + \cdots\right]\Big\}\,.$$

Ora supponiamo $x = 6000$; frai numeri primi occorre non contare 2, 3, 11 fattori di M; quindi

$$\vartheta(x) = 780\ ,\quad \vartheta(x^{\frac{1}{2}}) = 18\ ,\quad \vartheta(x^{\frac{1}{4}}) = 2\ ,\quad \vartheta(x^{\frac{1}{8}}) = 0\ ,$$
$$\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) = 4\ ,\quad \vartheta(x^{\frac{1}{9}}) = 0\ ,$$
$$\vartheta(x^{\frac{1}{5}}) = 1\ ,\quad \vartheta(x^{\frac{1}{25}}) = 0\ ,$$
$$\vartheta(x^{\frac{1}{6}}) = 0\ ;$$

perciò la formola precedente diventa

$$\vartheta(198y + N, 6000) = \frac{1}{1800}\left[23400 - 285\rho(N,2) - 40\rho(N,3) - 6\rho(N,5)\right]\,.$$

Ora i 60 valori di N si dividono in otto classi, l'una composta di numeri che chiamerò $N_{2,3,5}$, contemporaneamente residui quadratici, cubici, e quintici di 198. Essa è composta del solo numero 1. Poi la classe dei numeri $N_{2,3}$ nel contempo residui quadratici, residui cubici, non-residui quintici di 198; e così via fino a quella dei numeri N_0 non-residui quadratici, non-residui cubici, e non-residui quintici di 198.

Tale ripartizione è indicata dal quadro

$N_{2,3,5} = 1$

$N_{2,3} = 37 , 91 , 163 , 181$

$N_{2,5} = 67 , 133$

$N_{3,5} = 89 , 109 , 197$

$N_2 = 25 , 31 , 49 , 97 , 103 , 115 , 157 , 169$

$N_3 = 17 , 19 , 35 , 53 , 71 , 73 , 107 , 125 , 127 , 145 , 161 , 179$

$N_5 = 23 , 43 , 65 , 131 , 155 , 175$

$N_0 = 5 , 7 , 13 , 29 , 41 , 47 , 59 , 61 , 79 , 83 , 85 , 95 , 101 ,$
$113 , 119 , 137 , 139 , 149 , 151 , 167 , 173 , 185 , 191 , 193 .$

Valutando le totalità dei numeri primi, di ciascuna delle forme $198y + N$, non superiori a 6000, associando quelle corrispondenti alle N appartenenti alla medesima classe, e confrontando i risultati con quelli dedotti dalle tavole si ha

	formola	tavole
$\mathfrak{S}(198y + 1 \quad , 6000) =$	$12 \frac{841}{1800}$	13
$\mathfrak{S}(198y + N_{2,3} , 6000) =$	$49 \frac{1684}{1800}$	52
$\mathfrak{S}(198y + N_{2,5} , 6000) =$	$25 \frac{122}{1800}$	29
$\mathfrak{S}(198y + N_{3,5} , 6000) =$	$39 \frac{543}{1800}$	36
$\mathfrak{S}(198y + N_2 \quad , 6000) =$	$100 \frac{728}{1800}$	94
$\mathfrak{S}(198y + N_3 \quad , 6000) =$	$157 \frac{732}{1800}$	151
$\mathfrak{S}(198y + N_5 \quad , 6000) =$	$79 \frac{6}{1800}$	75
$\mathfrak{S}(198y + N_0 \quad , 6000) =$	$316 \frac{744}{1800}$	330
	780	780

109. Espressione completa della somma

$$\sum_{p \equiv N}^{x}{}' \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p^2 \equiv N}^{x^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{1}{p^2} + \frac{1}{3} \sum_{p^3 \equiv N}^{x^{\frac{1}{3}}}{}' \frac{1}{p^3} + \cdots$$

Le generalizzazioni finora operate pongono in grado di estendere parecchi risultati rinvenuti nel Capitolo X.

In primo luogo cerchisi la estensione della formola (116) (X, § 83).

A tale scopo nelle (127) (§ 99) attribuisco ad r il valore 1. In tale ipotesi l'intervallo (r, ∞) non racchiude alcuna radice c, perciò nei secondi membri non occorrerà considerare a parte alcuna di queste; d'altronde si ha [§ 98, d), e Cap. V, § 31, form. (25)]

$$\lim_{r=1} [\log(r-1)\zeta(r, \chi_0)] = \log\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{h_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h_m}\right)\right]$$

e inoltre (X, 83)

$$\int_0^{\log x} \frac{1-e^{-u}}{u}\, du - \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \log\log x + C$$

dunque

$$(137)\quad \begin{cases} g(x, 1, \chi_0) = \log\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{h_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h_m}\right)\right] + \log\log x + C + \sum_{c_0} \int_1^{\infty} \frac{x^{-r+c_0}}{r-c_0}\, dr \\ g(x, 1, \chi_j) = \log\zeta(1, \chi_j) + \sum_{c_j} \int_1^{\infty} \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j}\, dr \qquad j \neq 0\,. \end{cases}$$

Ora ricordando che

$$g(x, 1, \chi) = \sum_p^{x}{}' \frac{\chi(p)}{p} + \frac{1}{2}\sum_p^{x^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{\chi(p^2)}{p^2} + \frac{1}{3}\sum_p^{x^{\frac{1}{3}}}{}' \frac{\chi(p^3)}{p^3} + \cdots,$$

ponendo successivamente nelle (137) $j = 1, 2, \ldots, \varphi(M)-1$, moltiplicando ordinatamente per

$$\frac{1}{\chi_0(N)}, \frac{1}{\chi_1(N)}, \ldots, \frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)},$$

e sommando si ricava

$$\sum_{p\equiv N}^{x}{}' \frac{1}{p} + \sum_{p^2\equiv N}^{x^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{1}{p^2} + \sum_{p^3\equiv N}^{x^{\frac{1}{3}}}{}' \frac{1}{p^3} + \cdots = \frac{1}{\varphi(M)}\Big\{\log\log x + C + \log\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{h_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h_m}\right)\zeta(1, \chi_1)^{\frac{1}{\chi_1(N)}} \cdots \zeta(1, \chi_{\varphi(M)-1})^{\frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)}}\right]$$
$$+ \sum_{j=0}^{\varphi(M)-1} \frac{1}{\chi_j(N)} \sum_{c_j} \int_1^{\infty} \frac{x^{-r+c_j}}{r-c_j}\, dr \Big\}$$

(cfr. VII, § 59).

110. Espressioni complete delle funzioni $\psi(My+N, x)$, $\lambda(My+N, x)$, le quali estendono le funzioni $\psi(x)$, $\lambda(x)$ di Tchebichef. Valutazione assintotica di $\lambda(My+N, x)$ analoga a quella, che ha fornite le formole di distribuzione di $\vartheta(My+N, x)$. Teorema di Poincaré sulla somma dei logaritmi naturali delle norme dei numeri primi complessi di Gauss. Estensione ai numeri primi ideali nel campo corrispondente all'equazione $x^p + 1 = 0$. Illustrazioni numeriche. — Le formole, che dànno i valori completi delle funzioni di Tchebichef, $\psi(x)$, $\lambda(x)$ (X, 84) pure possono ricevere la loro estensione.

In effetti per la definizione della funzione $\Lambda(x, r, \chi_j)$ (cfr. § 99) si ha

$$\Lambda(x,0,\chi_j)=\psi(My+1,x)\chi_j(1)+\psi(My+\mu_1,x)\chi_j(\mu_1)+\cdots+\psi(My+M-1,x)\chi_j(M-1)\ .$$

Ora per le (126), (126') coll'aggiunta delle avvertenze relative alla radice 0, si ha

$$\Lambda(x,0,\chi_0)=-\frac{1}{n_0+1}\frac{\zeta^{(n_0+1)}(0,\chi_0)}{\zeta^{(n_0)}(0,\chi_0)}+x-n_0\log x-\sum_{c_0\neq 0}\frac{x^{c_0}}{c_0}$$

$$\Lambda(x,0,\chi_j)=-\frac{1}{n_j+1}\frac{\zeta^{(n_j+1)}(0,\chi_j)}{\zeta^{(n_j)}(0,\chi_j)}-n_j\log x-\sum_{c_j\neq 0}\frac{x^{c_j}}{c_j}\ ;$$

quindi procedendo come nel § 99 si trae

$$(138)\qquad \psi(My+N,x)=\frac{1}{\varphi(M)}\left\{-\sum_{j=0}^{\varphi(M)-1}\frac{1}{(n_j+1)\chi_j(N)}\frac{\zeta^{(n_j+1)}(0,\chi_j)}{\zeta^{(n_j)}(0,\chi_j)}+x-\sum_{j=0}^{\varphi(M)-1}\frac{n_j}{\chi_j(N)}\log x-\sum_{j=0}^{\varphi(M)-1}\frac{1}{\chi_j(N)}\sum_{c_j}\frac{x^{c_j}}{c_j}\right\}.$$

Se in questa ultima formola si fa N successivamente eguale ai numeri 1, $\mu_1, \mu_2, \ldots, M-1$ primi con M ed inferiori ad M, e si moltiplicano le eguaglianze, che s'ottengono, ordinatamente per

$$\chi_j(1)\ ,\ \chi_j(\mu_1)\ ,\ \chi_j(\mu_2)\ ,\ \ldots\ ,\ \chi_j(M-1)$$

si ricava, se $j=0$,

$$\psi(x)=-\frac{1}{n_0+1}\frac{\zeta^{(n_0+1)}(0,\chi_0)}{\zeta^{(n_0)}(0,\chi_0)}+x-\sum_{c_0\neq 0}\frac{x^{c_0}}{c_0}\ ,$$

essendo qui e in seguito nel calcolo delle funzioni ψ esclusi i logaritmi dei numeri primi componenti M; e, se $j\neq 0$, si ottiene

$$\psi(My+1,x)\chi_j(1)+\psi(My+\mu_1,x)\chi_j(\mu_1)+\cdots+\psi(My+M-1,x)\chi_j(M-1)=$$
$$-\frac{1}{n_j+1}\frac{\zeta^{(n_j+1)}(0,\chi_j)}{\zeta^{(n_j)}(0,\chi_j)}-n_j\log x-\sum_{c_j\neq 0}\frac{x^{c_j}}{c_j}\ ,$$

che potremo anche scrivere

$$-\frac{1}{n_0+1}\frac{\zeta^{(n_0+1)}(0,\chi_0)}{\zeta^{(n_0)}(0,\chi_0)}+x-n_0\log x-\sum_{c_0\neq 0}\frac{x^{c_0}}{c_0}=\lambda(x)+\lambda(x^{\frac{1}{2}})+\lambda(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$$

$$-\frac{1}{n_j+1}\frac{\zeta^{(n_j+1)}(0,\chi_j)}{\zeta^{(n_j)}(0,\chi_j)}-n_j\log x-\sum_{c_j\neq 0}\frac{x^{c_j}}{c_j}=\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi_j(p_n)\log p_n+\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{2}})}{}'\chi_j(p_n)\log p_n+\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{3}})}{}'\chi_j(p_n)\log p_n+\cdots$$

Per mezzo di queste la (138) si trasforma in

$$\psi(My+N,x)=\frac{1}{\varphi(M)}\sum_k\left\{\lambda(x^{\frac{1}{k}})+\frac{1}{\chi_1(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{}'\chi_1(p_n)\log p_n+\frac{1}{\chi_2(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{}'\chi_2(p_n)\log p_n+\dots+\frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x^{\frac{1}{k}})}{}'\chi_{\varphi(M)-1}(p_n)\log p_n\right\}.$$

Trattando questa coi fattori di Möbius, e notando che

$$\mu(1)\psi(My+N,x)+\mu(2)\psi(My+N,x^{\frac{1}{2}})+\mu(3)\psi(My+N,x^{\frac{1}{3}})+\dots=\lambda(My+N,x),$$

si ricava

$$(139)\quad \lambda(My+N,x)=\frac{1}{\varphi(M)}\left\{\lambda(x)+\frac{1}{\chi_1(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi_1(p_n)\log p_n+\frac{1}{\chi_2(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi_2(p_n)\log p_n+\dots+\frac{1}{\chi_{\varphi(M)-1}(N)}\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'\chi_{\varphi(M)-1}(p_n)\log p_n\right\},$$

dove nel computo delle λ vanno esclusi i logaritmi dei numeri primi divisori di M. Ho voluto dedurre l'ultima eguaglianza dalla (138) a guisa d' una ripruova di questa, ma, come fu notato a riguardo delle (132) in fine del § 99 , anche la (139) può dedursi direttamente con semplicissime considerazioni per mezzo delle (73) del (Cap. VII, § 58).

III. — Si può procedere ad una valutazione assintotica del secondo membro di (139) collo stesso procedimento adoperato per la formola (132).

Partendo dalla considerazione della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{\chi(p_n)\log p_n}{p_n^s},$$

invece che da quella delle $\varsigma(s,\chi)$, e adoperando deduzioni perfettamente analoghe, si giungerà alla eguaglianza assintotica

$$(140)\quad \lambda(My+N,x)=\frac{1}{\varphi(M)}\left\{\lambda(x)+\sum_{\Delta}\rho(N,\Delta)\left[\lambda(x^{\frac{1}{\Delta}})+\lambda(x^{\frac{1}{\Delta^2}})+\lambda(x^{\frac{1}{\Delta^3}})+\dots\right]\right\}.$$

Mi astengo dal notare i casi particolari di questa formola e dall' enunciare i teoremi corrispondenti, il che potrà agevolmente esser fatto dal lettore. Noto solo che mediante i ragionamenti dei § 104 *d)*, e 105 possono dedursi i teoremi seguenti, il primo dei quali va attribuito a Poincaré (§ 95):

a) *La somma dei logaritmi naturali delle norme dei numeri primi complessi, dei quali la norma non supera il numero reale positivo* x, *appartenenti al campo generato dalla forma* a_0+a_1i, *essendo* $i^2+1=0$, *eguaglia assintoticamente la somma dei logaritmi naturali di tutti i numeri primi reali positivi non superiori ad* x, *e perciò assintoticamente è espressa da* x.

b) *Anche nel campo dei numeri generati dalla forma*

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots + a_{p-1} r^{p-1}$$

essendo r *radice primitiva della equazione binomia, di grado primo reale positivo dispari,* $x^p + 1 = 0$, *la somma dei logaritmi naturali delle norme dei numeri primi ideali, dei quali la norma non supera il numero reale positivo* x, *è espressa, in una prima approssimazione, assintoticamente dalla somma dei logaritmi naturali di tutti i numeri primi reali positivi non superiori ad* x, *e perciò anche è data assintoticamente da* x, *però se* p *è della forma* $2^a + 1$, *l'approssimazione è pari a quella del precedente teorema.*

c) *La somma dei logaritmi naturali dei numeri primi non superiori ad* x, *e residui quadratici di* $M = 2^\beta h_1^{\varpi_1} \ldots h_m^{\varpi_m}$, *se* $\beta > 2$, *è data assintoticamente da*

$$\frac{1}{2^{m+2}} \left\{ \lambda(x) + (1 - 2^{m+2})[\lambda(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda(x^{\frac{1}{4}}) + \lambda(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots] \right\}, \tag{141}$$

e in conseguenza quella dei numeri primi non superiori ad x, *e non residui quadratici di* M *da*

$$\frac{2^{m+2} - 1}{2^{m+2}} [\lambda(x) + \lambda(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda(x^{\frac{1}{4}}) + \lambda(x^{\frac{1}{8}}) + \cdots]. \tag{141'}$$

Se $\beta = 2$, o $\beta < 2$ *l'esponente* $m + 2$ *si muta in* $m + 1$, *o in* m.

112.— Non bisogna dimenticare che tutte le eguaglianze dedotte sono assintotiche, laonde non è da aspettarsi di trovare una perfetta identità frai valori calcolati per mezzo delle formole, e quelli ottenuti colla diretta valutazione, quando questa è nei limiti della pazienza del calcolatore. Invece i primi valori presenteranno una deviazione, che rappresenta la parte rimanente, la quale, al crescere di x, è un infinito di ordine inferiore a ciascun termine della espressione assintotica. Per dare quindi una giusta idea del valore delle formole rinvenute, presento qualche esempio numerico.

Esempio I. Sia $M = 198 = 2 . 3^2 . 11$, quindi le N hanno gli stessi valori, che nell'esempio II del § 108. Sia poi $x = 2000$. Pel calcolo delle funzioni λ figuranti nel secondo membro di (140) mi avvalgo delle tavole della funzione $\psi(x)$, che si trovano nella monografia premiata di Gram (cfr. IV, 25) e che si estendono appunto fino ad $x = 2000$. Ottengo

Valori della funzione	calcolati colla formola (140) e colle tavole della funzione $\psi(x)$	calcolati direttamente colle tavole dei numeri primi, e dei logaritmi
$\lambda(198y + 1 \quad , 2000)$	30,41	25,66
$\lambda(198y + N_{2,3} , 2000)$	121,67	130,67
$\lambda(198y + N_{2,5} , 2000)$	61,19	57,47
$\lambda(198y + N_{3,5} , 2000)$	98,15	91,21
$\lambda(198y + N_2 \quad , 2000)$	244,75	229,34
$\lambda(198y + N_3 \quad , 2000)$	392,62	379,00
$\lambda(198y + N_5 \quad , 2000)$	197,37	186,55
$\lambda(198y + N_0 \quad , 2000)$	789,49	835,75
$\lambda(2000)$	1935,65	1935,65

Esempio II. Per finire dò un esempio delle formole distributive (141), (141').
Sia $M = 2072 = 2^3 . 7 . 37$; $x = 1300$.

I numeri primi non superiori a 1300 e residui quadratici di 2072 sono 137, 233, 337, 617, 641, 673, 953, 1009, e 1033; laonde si ha

Somma dei log. nep. dei numeri primi non superiori a 1300	calcolata colla formola (141)	calcolata direttamente colle tavole
residui quadratici di 2072	53,80	56,31
non residui quadratici di 2072	1198,35	1195,84

113. Teoremi di de la Vallée-Poussin, che comprendono come casi particolari quelli di Poincaré e Stanievicht indicati a principio del capitolo. — Le precedenti formole assintotiche per $\lambda(My + N, x)$. $\vartheta(My + N, x)$ sono state trovate ammettendo la esistenza dei limiti, il che si fa implicitamente, allorchè (§ 103) si applica il teorema di Cesàro (cfr. V, 29).

Chi voglia fare a meno di questo postulato potrà limitarsi ai seguenti teoremi, che trovansi dimostrati con tutto rigore a pag. 81 e seg. della II parte del lavoro di DE LA VALLÉE-POUSSIN, il cui titolo è riportato nel (Cap. VIII; § 61).

a) *L'espressione*

$$\varphi(M) \frac{\sum\limits_{p \equiv N}^{x}{}' \log p}{x},$$

nella quale la somma è estesa ai numeri primi minori di x, *e compresi nella forma lineare* My + N, *ha per limite* 1, *quando* x *cresce indefinitamente.*

b) *La totalità* $\theta(My+N, x)$ *dei numeri primi della forma lineare* My + N, *e minori di* x *può essere rappresentata dalla formola*

$$\theta(My + N, x) = \frac{1 + \varepsilon}{\varphi(M)} \frac{x}{\log x},$$

ove ε *è infinitamente piccola per* x *infinitamente grande.*

Corollarii di questi teoremi sono quelli di POINCARÉ e STANIEVITCH (§ 95).

114. — Ora l'argomento mi condurrebbe a parlare dei numeri primi rappresentabili per mezzo di una forma quadratica; ma la lunghezza omai assunta da questo lavoro mi consiglia di rimandare lo studioso alla 3ª, 4ª, e 5ª parte delle preziose Recherches di DE LA VALLÉE-POUSSIN, nelle quali oltre alle notizie sui lavori di Dirichlet, Weber, e Meyer, e sulla critica di Bachmann, si trova il largo contributo dell'autore al progresso della importante teoria.

CAPITOLO XII.

115. Ragioni, che hanno indotto parecchi studiosi alla ricerca di nuove formole per la risoluzione del problema della totalità dei numeri primi fino a un limite assegnato. Serie di Lambert. Trasformazioni di Clausen-Scherk, e di Schlömilch. Valore assintotico dato da Cesàro. Relazione fornita da Schlömilch della somma di detta serie colla funzione $\zeta(s)$. — Le difficoltà, che s' incontravano nello stabilire la formola di Riemann con tutto rigore, la scarsa speranza di render questa adatta ai computi numerici, volendo pure tener conto della parte periodica di $f_1(x)$, spinsero in questi ultimi tempi parecchi studiosi a ricercare per mezzo di altra formola la risoluzione del problema.

Malgrado che le nuove risposte non possano competere colla classica trovata da Riemann, stimo non poter chiudere il presente lavoro, senza esporre in sunto le ricerche in questo indirizzo.

Una investigazione preliminare, cui mette capo più d' una di queste nuove soluzioni si è la ricerca d'una *legge dei numeri primi*, ossia d'una *equazione caratteristica* di questi, vale a dire d' una equazione tale che fra i numeri d' una determinata specie, che comprenda in sè tutti i numeri primi, questi, e solo questi, siano radici dell'equazione. Ciò non esclude che, fuori di quella specie, vi possano essere altre radici dell' equazione stessa. Alla sua volta questa ricerca può fondarsi sullo studio della serie, che ha preso il nome da Lambert. Ond' è che occorre che io da questa cominci.

Lambert a p. 507 dell'Architektonik (1771) ebbe a considerare la serie

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \cdots, \tag{142}$$

in cui naturalmente è da supporsi $|x| \neq 1$. Si riconosce facilmente (Cesàro, Analisi algebrica, p. 181)

I che per $|x| > 1$ la serie non converge; converge invece, ed assolutamente, per $|x| < 1$;

II che indicando con $\mathfrak{t}_n$ la totalità dei divisori dell' intero n, la detta serie, nell' ipotesi che sia convergente, si trasforma nell' altra $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{t}_n x^n$, sicchè può scriversi

$$\mathfrak{L}(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \cdots + \mathfrak{t}_n x^n + \cdots. \tag{143}$$

III che alla somma $\mathfrak{L}(x)$ si può dar la forma

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}x^9 + \cdots + \frac{1+x^n}{1-x^n}x^{n^2} + \cdots \tag{144}$$

Quest'ultima trasformazione, segnalata da Clausen in fine dell'articolo:

Beitrage zur Theorie der Reihen. *Crelle Journal f. d. r. u. a. M.*, Vol. III, p. 95, 1828,

si trova dimostrata la prima volta nell'articolo

Scherk — Bemerkungen über die Lambertsche Reihe. *Crelle Journal f. d. r. u. a. M.*, Vol. IX, p. 162, 1832.

Essa offre il vantaggio che trasforma la serie (142), lentamente convergente, nell'altra (144), la quale, eccetto quando x è prossima all'unità, converge molto più rapidamente.

Schlömilch nell'articolo Ueber die Lambert'sche Reihe. *Zeitschrift für Math. und Physik.*, T. VI, p. 407, 1861, assegna ancora alla $\mathfrak{L}$ la forma

$$(145)\quad \mathfrak{L}(x)=\frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}-\frac{B_2^2}{2!2}\log\frac{1}{x}-\frac{B_4^2}{4!4}\left(\log\frac{1}{x}\right)^3-\dots-\frac{B_{2n}^2}{(2n)!2n}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{2n-1}-\dots,$$

dove C, come al solito, indica la costante d' Eulero, e $B_2, B_4, \dots, B_{2n}, \dots$ sono i numeri bernoulliani. Questa forma conviene specialmente nel caso, in cui x ha un valore prossimo all'unità. Per tali valori di x si presta bene l'eguaglianza assintotica

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}\left(\log\frac{1}{1-x}+C\right)-\frac{1}{4},$$

che deducesi da

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{1+x}{1-x}\log\frac{1+x}{1+x-2x^2}+\frac{x}{1-x}-\frac{x^2\varepsilon(x)}{6(1-x)},$$

in cui

$$0<\varepsilon(x)<1,$$

(Cesàro, La serie di Lambert in aritmetica assintotica. *Rendiconti della R. Accademia di scienze fisiche e matematiche di Napoli*, Serie 2ª, vol. VII, p. 197, 1893).

Dal punto di vista della teoria, di cui mi occupo, può forse offrire interesse la seguente trasformazione pure essa dovuta a Schlömilch (*Zeitschrift für Mathem. und Physik.*, T. III, p. 248, 1858). Moltiplicando per ℓ_m ambo i membri dell'eguaglianza

$$\frac{1}{m^s}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty e^{-mu}u^{s-1}du,$$

la quale in fondo non è altro che la definizione per mezzo di integrale definito della funzione $\Gamma(s)$, sommando da $m=1$ ad ∞, e riflettendo che

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ell_m}{m^s}=[\zeta(s)]^2,$$

si trova che

$$[\zeta(s)]^2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} t_m e^{-mu} u^{s-1} du$$

ossia per le (142) e (143)

$$[\zeta(s)]^2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{1-e^{-mu}} u^{s-1} du ,$$

e ponendo

$$e^{-u} = x$$

si ottiene in fine

$$[\zeta(s)]^2 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \mathfrak{L}(x) \log \left(\frac{1}{x}\right)^{s-1} \frac{dx}{x} ,$$

che è la formola di Schlömilch costituente una relazione fra le funzioni $\mathfrak{L}$ e ζ, la quale ultima tanta parte rappresenta nella teoria dei numeri primi. È però evidente che, affinchè la funzione $[\zeta(s)]^2$ possa assumere questo aspetto, occorre che la parte reale di s superi 1.

116. Equazione caratteristica dei numeri primi rinvenuta da Burhenne. — Nel secondo membro di (143) i coefficienti di quelle potenze di x, i cui esponenti sono numeri primi, sono eguali a 2; i rimanenti tutti superano 2. Se si giunge ad ottenere l'espressione generale del coefficiente di x^n nello sviluppo, ordinato secondo le potenze ascendenti di x, della funzione $\mathfrak{L}(x)$, eguagliando questa espressione a 2, si avrà un'equazione, la quale, frai numeri interi positivi, ammette per radici solo i numeri primi.

Questo concetto si trova attuato nell'articolo

Burhenne — Ueber das Gesetz der Primzahlen. *Grunert Archiv der Mathematik und Physik*, t. XIX, p. 442, 1852.

Si parte da alcune formole prese dagli Esempii di Calcolo di Sohncke, e che possono riscontrarsi anche nel più recente libro: Frenet, Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal, p. 82, Es. 75. Per esse si ha, quando r è pari:

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^r}{1-x^r} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{r} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right] + (-1)^{n+1} \frac{n!}{\frac{1}{2}r} \sum_{h=1}^{\frac{r}{2}-1} \frac{\cos\left[\frac{2h\pi}{r} + (n+1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{r} + 1\right)^{\frac{n+1}{2}}} ,$$

e quando r è impari

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{x^r}{1-x^r} = (-1)^{n+1} \frac{n!}{r} \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{n!}{\frac{1}{2}r} \sum_{h=1}^{\frac{r-1}{2}} \frac{\cos\left[\frac{2h\pi}{r} + (n+1)\varphi_h\right]}{\left(x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{r} + 1\right)^{\frac{n+1}{2}}} ,$$

essendo φ_h un arco determinato dalle equazioni

$$\cos\varphi_h = \frac{x - \cos\frac{2h\pi}{r}}{\left(x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{r} + 1\right)^{\frac{1}{2}}} , \quad \operatorname{sen}\varphi_h = \frac{\operatorname{sen}\frac{2h\pi}{r}}{\left(x^2 - 2x\cos\frac{2h\pi}{r} + 1\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

Dalle predette formole si ricava quando r è pari

$$(146') \qquad \left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^r}{1-x^r}\right)_{x=0} = \frac{n!}{r}[1-(-1)^{n+1}] + \frac{n!}{\frac{1}{2}r}\sum_{h=1}^{\frac{r}{2}-1}\cos\frac{2nh\pi}{r},$$

e quando r è impari

$$(146'') \qquad \left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^r}{1-x^r}\right)_{x=0} = \frac{n!}{r} + \frac{n!}{\frac{1}{2}r}\sum_{h=1}^{\frac{r-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{r}.$$

Sicchè il coefficiente di x^n, nello sviluppo di $\mathfrak{L}(x)$ ordinato secondo le potenze ascendenti di x, è dato dall'espressione

$$\sum_{i,k}\left\{\frac{1}{i}+\frac{2}{i}\sum_{h=1}^{\frac{i-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{i}+\frac{1}{k}[1-(-1)^{n+1}]+\frac{2}{k}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\frac{\cos 2nh\pi}{k}\right\},$$

dove nella sommatoria bisogna porre per i ciascun numero impari, che non supera n, e per k ciascun numero pari, che non supera n.

Questa espressione fornisce dunque il valore di ℓ_n, cioè della totalità dei divisori di n; perciò l'equazione

$$(147) \qquad \sum_{i,k}\left\{\frac{1}{i}+\frac{2}{i}\sum_{h=1}^{\frac{i-1}{2}}\cos\frac{2nh\pi}{i}+\frac{1}{k}[1-(-1)^{n+1}]+\frac{2}{k}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\cos\frac{2nh\pi}{k}\right\}=2$$

esprime che l'intero n è primo, ossia sarà un'equazione caratteristica dei numeri primi. Essa abbraccia tanto gl' impari, quanto l'unico numero primo pari 2; ma se si esclude questo, cioè se si suppone n impari, la (147) si semplifica, giacchè non solo si annullano i termini del tipo $\frac{1}{k}[1-(-1)^{n+1}]$; ma anche tutti quelli del tipo

$$\frac{2}{k}\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}k-1}\cos\frac{2nh\pi}{k};$$

in effetti nella eguaglianza, che negli elementi si insegna

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \cdots + \cos ma = \frac{\operatorname{sen}\left(m+\frac{1}{2}\right)a - \operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}$$

posto $a = \frac{2n\pi}{k}$, $m = \frac{1}{2}k - 1$ si trae, essendo $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{k} \neq 0$ per n dispari,

$$\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}p-1} \cos\frac{2nh\pi}{k} = 0\,.$$

Perciò l'equazione caratteristica dei numeri primi impari è

$$(147') \qquad \sum_i \left\{ \frac{1}{i} + \frac{2}{i} \sum_{h=1}^{\frac{i-1}{2}} \cos\frac{2nh\pi}{i} \right\} = 2\,,$$

dove per i bisogna porre ciascun numero impari, che non supera n.

Bisogna però non spingere oltre l'applicazione della medesima formola trigonometrica testè adoperata, giacchè altrimenti si finisce per rendere nulla l'utilità dell'equazione caratteristica trovata. Infatti si ha

$$\sum_{h=1}^{\frac{i-1}{2}} \cos\frac{2nh\pi}{i} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{i}}{2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{i}}\,.$$

Ora se i non divide n, $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{i} \neq 0$, e il secondo membro dell' ultima eguaglianza equivale a $-\frac{1}{2}$; ma se i divide n, questo secondo membro si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma allora ogni termine della somma al primo membro vale 1, quindi la somma equivale ad $\frac{i-1}{2}$. Tenendo conto di ciò, il primo membro di (147') si riduce a $\sum\frac{1}{i} - \sum\frac{1}{i} +$ tante unità quanti numeri i dividono n. Perciò in ultima analisi, fatte tutte le riduzioni, la (147') diviene $f_n = 2$.

117. Somma della serie di Lambert ed equazione caratteristica dei numeri primi secondo il metodo di Curtze. Soggiunta relativa al caso, in cui la variabile è compresa fra 0 e — 1. Somma della medesima serie secondo Schlömilch per mezzo delle funzioni ellittiche, secondo de la Vallée-Poussin e Hansen mediante le funzioni Θ di Jacobi, e secondo Catalan e Cesàro mediante integrali definiti. — La memoria

CURTZE — Notes diverses sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers. *Annali di matematica pura e applicata*, 2ª serie, t. I, p. 285, 1867

muove dal concetto di trovare la somma della serie di Lambert, determinare, per mezzo dello sviluppo di Mac-Laurin, il coefficiente f_n di x^n, ed eguagliarlo a 2.

Però, nel porre in atto questo concetto, una lieve svista e la non felice scelta della variabile nelle integrazioni fa pervenire ad una formola finale non esatta, ed irta di indeterminazioni quali $\operatorname{sen}(n\log x)$, $\cos(n\log x)$ per $x = 0$, ad evitar

le quali fa d'uopo ricorrere ad un cambiamento di variabile. Io rifarò quindi nella parte essenziale i calcoli, onde rettificare detta formola, e liberarla dalle indeterminazioni indicate.

Parto dalla eguaglianza nota (FRENET, Recueil d'exercices de Calcul infinitésimal, p. 260, 307)

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\cdot\frac{y\,dy}{b^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-b}}{1-xe^{-b}} \tag{148}$$

valevole per $b \geqq 0$, e $|x|<1$. Supponendo, per ora, $x>0$, assegno a b il valore $-r\log x$, r essendo un intero positivo, e moltiplico ambo i membri per x; ottengo

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{x^{r+1}}{1-x^{r+1}}=\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\cdot\frac{y\,dy}{(r\log x)^2+y^2},$$

e, sommando da $r=1$ ad $r=\infty$, si ricava

$$\frac{\pi}{2}\mathfrak{L}(x)-\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{1-x}=\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\,dy\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y}{(r\log x)^2+y^2}.$$

Ora si ha (CESÀRO, Analisi algebrica, p. 480, 313)

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z}{r^2\pi^2-z^2}=\frac{1}{2z}-\frac{1}{2}\,i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}},$$

e, ponendo in questa $z=\dfrac{i\pi y}{\log x}$, si trae

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y}{(r\log x)^2+y^2}=-\frac{1}{2y}+\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\frac{\pi y}{\log x}}+e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}{e^{\frac{\pi y}{\log x}}-e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}\cdot\frac{1}{\log x}.$$

Sostituendo nel precedente integrale, e tenendo conto dell'eguaglianza

$$\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\,\frac{dy}{y}=\frac{\pi}{2}\,\frac{x}{1-x},$$

la quale si ricava da (148) ponendovi $b=0$ e moltiplicando per x, si deduce

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x}+\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\cdot\frac{x}{\log x}\cdot\frac{e^{\frac{\pi y}{\log x}}+e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}{e^{\frac{\pi y}{\log x}}-e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}\,dy. \tag{149}$$

Ecco dunque sommata la serie di Lambert nell'ipotesi che sia $x>0$. Se alla

funzione $\mathfrak{L}(x)$ si applica lo sviluppo di Mac-Laurin il coefficiente di x^n è $\frac{1}{n!}\mathfrak{L}^{(n)}(0)$, e poichè da (146‴) si ha

$$\left(\frac{d^n}{dx^n}\frac{x}{1-x}\right)_{x=0}=n!$$

si ricava infine

$$f_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\cdot\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{\frac{\pi y}{\log x}}+e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}{e^{\frac{\pi y}{\log x}}-e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}\right)\right\}_{x=0}dy$$

Perciò l'equazione

$$\int_0^{\infty}\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\cdot\frac{x}{\log x}\cdot\frac{e^{\frac{\pi y}{\log x}}+e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}{e^{\frac{\pi y}{\log x}}-e^{-\frac{\pi y}{\log x}}}\right)\right\}_{x=0}dy=\frac{3}{2}\,n!$$

caratterizza i numeri primi fra gl' interi positivi.

Per darla sotto una forma più esplicita bisognerebbe eseguire prima le derivazione multipla indicata sotto l' integrale, e poscia la risoluzione delle varie forme indeterminate, che verrebbero presentandosi nel sostituire 0 ad x. V'è però a temere che, a parte la maggiore complicazione dei calcoli, avvenga per questa equazione qualche cosa di analogo a quanto è successo per la (147'), dopo la sostituzione del valore della sommatoria: sicchè è molto discutibile l'utilità di estendere la ricerca in questo senso.

Chi n'abbia voglia potrà rinvenire nella nota di Curtze due altre forme, non però più semplici, della somma $\mathfrak{L}(x)$.

118. — Siffatte eguaglianze del Curtze, come anche la (149) applicate al caso di x compresa fra 0 e -1 darebbero la somma della serie di Lambert complicata con immaginarii. Per evitar questi io osservo che, continuando a supporre $1>x>0$, si ha

$$\frac{1}{2}\left[\mathfrak{L}(x)-\mathfrak{L}(-x)\right]=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^6}+\frac{x^5}{1-x^{10}}+\cdots.$$

Se ora si pone

$$\mathfrak{M}(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^3}+\frac{1}{1-x^5}+\cdots$$

si ricava subito

$$\mathfrak{L}(-x)=\mathfrak{L}(x)-2\mathfrak{M}(x)+2\mathfrak{M}(x^2)\,. \tag{150}$$

La quistione è ridotta a trovare $\mathfrak{M}(x)$. Ora questa si trova con un procedimento perfettamente analogo a quello adoperato per trovare $\mathfrak{L}(x)$. Partendo dalla (148), e ponendo $b=2r\log x$ si perviene a

$$\mathfrak{M}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x}-\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen} y}{1-2x\cos y+x^2}\,\frac{x}{2\log x}\,\frac{e^{\frac{\pi y}{2\log x}}+e^{-\frac{\pi y}{2\log x}}}{e^{\frac{\pi y}{2\log x}}-e^{-\frac{\pi y}{2\log x}}}\,dy\,. \tag{151}$$

La (150) insieme alle (149) e (151) fornirà dunque senza immaginarii la somma della serie di Lambert per x negativo.

119. — Posteriormente alla nota di Curtze altri autori hanno proposte nuove formole per esprimere la somma della serie di Lambert.

Nel brevissimo articolo

SCHLÖMILCH — Notiz über die Lambert'sche Reihe. *Zeitschrift für Mathemat. und Phys.*, XXIX, p. 384, 1884

s'esprime la somma in discorso per mezzo della funzione senoamplitudine, e degli integrali ellittici completi di 1ª specie.

Se K e K' sono i due integrali ellittici completi di 1ª specie di moduli complementari k, $k' = \sqrt{1-k^2}$, tali che $e^{-2\pi\frac{K'}{K}} = x$, si ha

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{k^2 K^2}{2\pi^3} \int_0^{\pi} \log\left(1 - 2x^{\frac{1}{2}} \cos z + x\right) \operatorname{sen}^2 \operatorname{am} \frac{Kz}{\pi}\, dz \,. \tag{152}$$

Nella più recente nota

DE LA VALLÉE-POUSSIN — Sur la série de Lambert. *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XX, p. 56, 1896

si rannoda la funzione $\mathfrak{L}(x)$ alle funzioni Θ di Jacobi mediante le quattro formole

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Theta_1'(z)}{\Theta_1(z)} - \operatorname{cotg} z\right) \operatorname{cotg} z\, dz \qquad \text{essendo} \quad \Theta_1(z) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} x^{\frac{1}{8}(2\nu-1)^2} \operatorname{sen}(2\nu-1)z$$

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Theta_2'(z)}{\Theta_2(z)} + \operatorname{tg} z\right) \operatorname{tg} z\, dz \qquad \text{»} \quad \Theta_2(z) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\frac{1}{8}(2\nu-1)^2} \cos(2\nu-1)z$$

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} \, \frac{x^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2z}{1 - 2x^{\frac{1}{2}} \cos 2z + x}\, dz \qquad \text{»} \quad \Theta(z) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} x^{\frac{1}{2}\nu^2} \cos(2\nu z)$$

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Theta_3'(z)}{\Theta_3(z)} \, \frac{x^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} 2z}{1 + 2x^{\frac{1}{2}} \cos 2z + x}\, dz \qquad \text{»} \quad \Theta_3(z) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\frac{1}{2}\nu^2} \cos(2\nu z) \,.$$

Le ultime due possono trasformarsi mediante le funzioni ellittiche di Jacobi, e dànno la (152), come le due precedenti possono trasformarsi introducendo le funzioni ellittiche di Weierstrass *).

---

*) In queste formole di de la Vallée-Ponssin avviene che per uno dei limiti la funzione da integrarsi si presenta sotto forma indeterminata. Questa osservazione ha ispirata la recentissima nota

HANSEN — Note sur la sommation de la série de Lambert. *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 604, 1901,

nella quale si stabilisce l'altra formola

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Theta_3'(z)}{\Theta_3(z)} \operatorname{tg} z\, dz - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Theta_1'(z)}{\Theta_1(z)} \operatorname{tg} z\, dz \,,$$

dove le funzioni da integrarsi si mantengono finite e determinate in tutto l'intervallo d'integrazione, i limiti compresi.

Non voglio omettere infine che nell'articolo

CESÀRO — Sur les nombres de Bernoulli et d'Euler. *Nouvelles Annales de Mathématiques.* III série, t. V, p. 305, 1886

sono registrate le due formole

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}\,\frac{x}{1-x}+\frac{\log\frac{1}{1-x}}{\log\frac{1}{x}}-2\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{sen}\,(\varphi\log x)}{1-2x\cos(\varphi\log x)+x^2}\,\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1}$$

$$\mathfrak{L}'(x)=\frac{C-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}+\frac{1}{4}+\int_0^\infty\left[\mathrm{cotg}\left(\frac{\varphi}{2}\log\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{\varphi\log\frac{1}{x}}\right]\frac{d\varphi}{e^{2\pi\varphi}-1}$$

la prima delle quali ha molta analogia colla (149), ed è attribuita a Catalan.

120. Equazioni caratteristiche dei numeri primi rinvenute da Braun e da Levi-Civita. Formola dedotta da Levi-Civita per la totalità dei numeri primi non superiori a un limite assegnato. — Colla ricerca di una nuova equazione caratteristica dei numeri primi *) comincia la prima, che andrò esponendo, delle nuove

---

*) Ancora della legge dei numeri primi si occupa la seguente pubblicazione pervenutami dopo che il presente lavoro era stato già presentato:

BRAUN — Das Fortschreitungsgesetz der Primzahlen durch eine trascendente Gleichung exakt dargestellt. *Wissenschaftliche Beilage zu dem Jahrebericht über das Schuljahr* 1898-99 *Konigles Friedrich-Wilhelms Gymnasium zu Trier.*

Prescindendo da quanto è già notorio, e da ciò che non riguarda direttamente le quistioni, di cui tratta il mio scritto, ecco quello che vi è di osservabile in questo lavoro. È noto (cfr. LEJEUNE DIRICHLET — Lezioni sulla teoria dei numeri. Trad. Faifofer, pag. 25) il teorema espresso dall'eguaglianza

$$p_1^{E\left(\frac{p_{n+1}}{p_1}\right)+E\left(\frac{p_{n+1}}{p_1^2}\right)+\cdots}\,p_2^{E\left(\frac{p_{n+1}}{p_2}\right)+E\left(\frac{p_{n+1}}{p_2^2}\right)+\cdots}\cdots p_n^{E\left(\frac{p_{n+1}}{p_n}\right)+E\left(\frac{p_{n+1}}{p_n^2}\right)+\cdots}\,p_{n+1}=p_{n+1}!\,.$$

Ora il Braun dimostra la proposizione reciproca:

Se un intero $x \neq 1$ *soddisfa all'equazione*

$$p_1^{E\left(\frac{x}{p_1}\right)+E\left(\frac{x}{p_1^2}\right)+\cdots}\,p_2^{E\left(\frac{x}{p_2}\right)+E\left(\frac{x}{p_2^2}\right)+\cdots}\cdots p_n^{E\left(\frac{x}{p_n}\right)+E\left(\frac{x}{p_n^2}\right)+\cdots}\,x=x!\,.$$

esso eguaglia il numero primo successivo a p_n.

Questa può dimostrarsi nel seguente modo, che a me pare più breve. L'ipotesi può scriversi

$$p_1^{E\left(\frac{x}{p_1}\right)+E\left(\frac{x}{p_1^2}\right)+\cdots}\,p_2^{E\left(\frac{x}{p_2}\right)+E\left(\frac{x}{p_2^2}\right)+\cdots}\cdots p_n^{E\left(\frac{x}{p_n}\right)+E\left(\frac{x}{p_n^2}\right)+\cdots}=(x-1)!\,.$$

D'altronde si ha

$$p_1^{E\left(\frac{x-1}{p_1}\right)+E\left(\frac{x-1}{p_1^2}\right)+\cdots}\,p_2^{E\left(\frac{x-1}{p_2}\right)+E\left(\frac{x-1}{p_2^2}\right)+\cdots}\cdots p_{n+1}^{E\left(\frac{x-1}{p_{n+1}}\right)+E\left(\frac{x-1}{p_{n+1}^2}\right)+\cdots}\cdots=(x-1)!\,.$$

soluzioni del problema della totalità dei numeri primi. Essa è contenuta nella nota:

LEVI-CIVITA — Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, serie 5ª, vol. IV, p. 303, 1895.

La serie

$$\mathcal{S}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{1-x^m}-\frac{2x^2}{1-x}-x=\mathfrak{L}(x)-x\frac{1+x}{1-x}=\sum_{m=2}^{\infty}(\ell_m-2)x^m\,,$$

in cui x è supposta variabile complessa, è tale che il coefficiente x^m è nullo se m è un numero primo, è invece diverso da 0, se m è un numero composto.

Poichè detta serie è convergente per $|x|<1$, se si descrive, centro l'origine e raggio $\rho=\frac{1}{2}$, la circonferenza C, lungo questa la serie $\mathcal{S}$ sarà convergente, e quindi convergente in egual grado, perchè serie di potenze. Sia ora z un numero complesso qualunque, purchè finito, e pongasi $x=\rho e^{i\theta}$; allora tutte le determinazioni di x^{z-1} sono date da $e^{(z-1)\log\rho+i(z-1)\theta+i2k(z-1)\pi}$ per $k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$ Fra tutte queste si scelga quella corrispondente a $k=0$, sicchè nelle formole successive x^{z-1} indicherà $e^{(z-1)\log\rho+i(z-1)\theta}$. Ciò posto per mezzo della serie

$$\sum_{m=2}^{\infty}(\ell_m-2)x^{m+z-1}=x^{z-1}\mathcal{S}(x)$$

si formi l'integrale

$$\mathcal{P}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1}\mathcal{S}(x)\,dx=\frac{\rho^z}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\theta}\mathcal{S}(\rho e^{i\theta})\,d\theta\,.$$

Dal paragone di queste due eguaglianze si hanno

$$E\left(\frac{x-1}{p_1}\right)+E\left(\frac{x-1}{p_1^2}\right)+\cdots=E\left(\frac{x}{p_1}\right)+E\left(\frac{x}{p_1^2}\right)+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E\left(\frac{x-1}{p_n}\right)+E\left(\frac{x-1}{p_n^2}\right)+\cdots=E\left(\frac{x}{p_n}\right)+E\left(\frac{x}{p_n^2}\right)+\cdots$$

$$E\left(\frac{x-1}{p_{n+1}}\right)+E\left(\frac{x-1}{p^2_{n+1}}\right)+\cdots=0\,.$$

Dalla $(n+1)^{esima}$ di queste eguaglianze si trae $x<p_{n+1}+1$; dalle prime n poi si trae che la totalità degl'interi divisibili per $p_1, p_2, \ldots, p_n$ compresi nell'intervallo $(1, x-1)$ è eguale alla totalità degl' interi divisibili per gli stessi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ compresi nell' intervallo $(1, x)$; cioè che x non è divisibile nè per p_1, nè per $p_2, \ldots$, nè per p_n; dunque $x=p_{n+1}$.

Non sembra agevole però trarre da quest'equazione caratteristica un'espressione analitica per $\mathfrak{I}(x)$, nè una espressione analitica per $p_{\mathfrak{I}}$ in funzione di $\mathfrak{I}$.

Menziono infine che la proprietà che la somma dei divisori d'un numero n, se questo è primo, eguaglia $n+1$, oppure qualche altra più riposta proprietà dei numeri primi, sono state adoperate per ricercare equazioni caratteristiche di questi negli articoli:

SARDI — Sui numeri primi. *Giornale di matematiche Battaglini.* Vol. V, p. 371, 1867 e Sulle somme dei divisori dei numeri. *Ibidem.* Vol. VII, p. 112, 1869.

Però non essendovi in essi risultati notevoli, non ho creduto parlarne nel testo.

In virtù del teorema di Cauchy sui residui (BRIOT et BOUQUET, Théorie des fonctions elliptiques, p. 194) si ricava subito, indicando n un numero intero positivo non nullo

$$\mathcal{P}(n)=0 \quad , \quad \mathcal{P}(0)=0 \quad ; \quad \mathcal{P}(-n)=\ell_n-2 \ .$$

L'ultima di queste relazioni ci dice che l'equazione

$$\mathcal{P}(z)=0 \tag{153}$$

caratterizza i numeri primi *fra gl' interi negativi.*

Ciò premesso l'autore mostra che tutte le radici di questa equazione sono reali, e determina, per ciascun numero negativo $-n$, un intorno, nel quale sia compresa nessuna radice di $\mathcal{P}(z)=0$, se n non è primo, o solo la radice $-n$, se n è primo. Questo intorno, per $n \geqq 12$, è l'intervallo $\left(-n-\frac{1}{2^{n+2}}, -n+\frac{1}{2^{n+2}}\right)$, oppure, non essendovi radici non reali, la circonferenza di centro $-n$ e raggio $\frac{1}{2^{n+2}}$.

121. — Dopo ciò è facile scrivere una formola, che esibisce il valore della totalità $\vartheta(x)$ dei numeri primi non superiori ad x. In effetti $\mathcal{P}(z)$ può scriversi

$$\mathcal{P}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C x^z \mathcal{S}(x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{z\log x}\mathcal{S}(x)\frac{dx}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n \ ,$$

essendo

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C(\log x)^n\mathcal{S}(x)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_C(\log x)^n\left(\frac{\mathcal{L}'(x)}{x}-\frac{1+x}{1-x}\right)dx \ ;$$

essa è quindi una funzione intera, laonde potrà applicarsi il teorema di Cauchy, che dà il numero degli zeri contenuti in un area (BRIOT e BOUQUET, Théorie des fonctions elliptiques, p. 199); e in conseguenza se, supposto $n \geqq 12$, s'indichi con C_n la conferenza descritta centro il punto $-n$, e raggio $\frac{1}{2^{n+2}}$, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\mathcal{P}'(z)}{\mathcal{P}(z)}dz$$

varrà 0 o 1, secondo che n non è, oppure è, primo; s'avrà dunque per $x \geqq 12$

$$\vartheta(x)=5+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=12}^{E(x)}\int_{C_n}\frac{\mathcal{P}'(z)}{\mathcal{P}(z)}dz \ .$$

I raggi delle circonferenze C_n possono assumersi tutti eguali al più piccolo di essi $\frac{1}{2^{E(x)+2}}$, e si può trasportare il centro di ciascuna circonferenza nell'origine, sicchè tutte verranno a coincidere coll'unica C descritta con centro l'ori-

gine e raggio $\frac{1}{2^{E(x)+2}}$, e quindi potrà scriversi infine

$$\vartheta(x) = 5 + \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \sum_{n=12}^{E(x)} \frac{\mathcal{P}'(z-n)}{\mathcal{P}(z-n)}\, dz ,$$

supposto sempre $x \geqq 12$.

Questa soluzione è senza dubio ingegnosa, ma quanto lavoro debba ancora eseguirsi per decomporre l'espressione poc'anzi scritta in altre di tipo meno complicato, come se ne possa estrarre il classico valore assintotico $\mathrm{Li}(x)$ sono quistioni, che l'autore non esamina, nè sembra facile il trattare.

122. Soluzioni di Rogel fondate l'una sul teorema di Wilson l'altra sopra una formola di Meissel.— Punti di partenza delle soluzioni del problema in esame possono essere quei teoremi, che contengono in sè una definizione implicita dei numeri primi. Ora fra questi il teorema di Wilson (cfr. Lejeune-Dirichlet, Teoria dei numeri, p. 58) non era stato fino a qualche anno fa sperimentato. Esso è stato applicato alla quistione nella nota:

Rogel—Ueber Primzahlmengen. *Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe.* Jahrgang 1895, N. XXII.

Il teorema di Wilson dice che, se n è un numero primo, $\Gamma(n)+1$ è un multiplo di n. E può dimostrarsi agevolmente che, se n è composto e diverso da 4, $\Gamma(n)$ è divisibile per n. Segue quindi che posto per brevità,

$$\Gamma(n) = q \quad , \quad [1.3.5\ldots(n-2)]^2 = r \quad , \quad \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2 = s ,$$

saranno

$$K_n = \frac{\operatorname{sen}\frac{q}{n}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ numero primo} \\ 0 & \text{» » numero impari composto,} \end{cases}$$

$$L_n = -\frac{\cos\frac{r}{2n}\pi}{\cos\frac{\pi}{2n}} = \begin{cases} 1 & \text{» » numero primo maggiore di 3} \\ 0 & \text{» » numero impari composto,} \end{cases}$$

$$M_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\operatorname{sen}\frac{q}{2n}\pi}{\cos\frac{\pi}{2n}} = \begin{cases} 1 & \text{» » numero primo maggiore di 3} \\ 0 & \text{» » numero impari composto,} \end{cases}$$

$$N_n = \frac{\operatorname{sen}\frac{s}{2n}\pi}{\cos\frac{\pi}{2n}} = \begin{cases} 1 & \text{» » numero primo maggiore di 3} \\ 0 & \text{» » numero impari composto;} \end{cases}$$

perciò

$$\vartheta(x) = 1 + \sum_{j=1}^{E\left(\frac{x-1}{2}\right)} K_{2j+1} = 2 + \sum_{j=2}^{E\left(\frac{x-1}{2}\right)} L_{2j+1} = 2 + \sum_{j=2}^{E\left(\frac{x-1}{2}\right)} M_{2j+1} = 2 + \sum_{j=2}^{E\left(\frac{x-1}{2}\right)} N_{2j+1} .$$

Inoltre l'autore trova i valori di questi fattori di discontinuità K, L, M, N per mezzo di somme di serie. Esprimendo le funzioni trigonometriche per mezzo delle esponenziali immaginarie. e ricorrendo poi agli sviluppi (Cesàro, Analisi algebrica, p. 282, 284)

$$\frac{ve^v}{e^v-1}=1+\frac{B_1}{1!}v+\frac{B_2}{2!}v^2+\cdots+\frac{B_j}{j!}v^j+\cdots$$

$$\frac{2}{e^v+e^{-v}}=1+\frac{E_1}{1!}v+\frac{E_2}{2!}v^2+\cdots+\frac{E_j}{j!}v^j+\cdots,$$

dove le B e le E indicano rispettivamente i numeri Bernoulliani, ed Euleriani, si ottengono

$$K_n=q+2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\left(\frac{q-1}{2}-B\right)^{(2j+1)}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2j}$$

$$L_n=-1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!}(r+E)^{(2j)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2j},$$

$$M_n=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(q+E)^{(2j+1)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2j+1}$$

$$N_n=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(s+E)^{(2j+1)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2j+1},$$

nelle quali gli sviluppi delle potenze simboliche si ottengono da quelli delle effettive, cambiando gli esponenti delle B e delle E in indici.

Altre espressioni l'autore deduce pure per $\vartheta(x)$, ma non più semplici delle surriportate. Sulle quali già v'è da osservare che esse mal si prestano al calcolo numerico. Basta notare come rapidamente aumentano i numeri indicati da q, r, s al crescere di n per poter giudicare a quali penosi calcoli condurrebbe l'applicazione delle formole precedenti.

Nel più recente lavoro:

Rogel — Recursive Bestimmung der Anzahl Primzahlen unter gegebenen Grenzen. *Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften-Math. Nat. Classe.* Jahrgang 1899, N. XXII

il medesimo autore dopo aver riprodotte le ricerche che io ho esposte nel (Cap. II, § 10 a 13) trae dalla formola da me indicata ivi con (8) un'espressione analitica per $\vartheta(m)$. Partendo dalla detta formola e giovandosi dello sviluppo in serie da lui dato in altro suo lavoro della funzione numerica $E\left(\frac{m}{n}\right)$, cioè a dire

$$E\left(\frac{m}{n}\right)=-1+\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\,.\,(2\nu+1)!}(2\pi)^{2\nu+1}\frac{(m+1-B)^{(2\nu+1)}\,.\,(n-B)^{(2\nu+1)}}{n^{2\nu+1}}$$

perviene ad un risultato, che tradotto nei simboli da me adoperati, s'enuncia:

Se l'intero n *verifica le ineguaglianze*

$$\vartheta(m) \geqq n \geqq \vartheta(\sqrt{m}) \,,$$

posto

$$\Pi_{\sigma,n} = \prod_{p=p_1}^{p_n} \left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right) \,,\quad \mathrm{P}_{2\nu+1,n} = 1 - \binom{2\nu+1}{1} \mathrm{B}_1 \Pi_{1,n} + \binom{2\nu+1}{2} \mathrm{B}_2 \Pi_{2,n} + \binom{2\nu+1}{4} \mathrm{B}_4 \Pi_{4,n} + \binom{2\nu+1}{6} \mathrm{B}_6 \Pi_{6,n} + \cdots$$

si ha

$$\vartheta(m) = n - 2 + \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)\,.\,(2\nu+1)!} (2\pi)^{2\nu+1} (m + 1 - \mathrm{B})^{(2\nu+1)} \mathrm{P}_{2\nu+1,n} \,.$$

Questa formola, prescindendo dal lavorio, che richiede per l'effettivo computo, e dell' ignota rapidità di convergenza della serie, che vi figura, ha l' inconveniente, che ha bisogno della conoscenza dei numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. È però degno di nota il fatto che le ricerche esposte nel Capitolo II, che tanto servizio han reso per l'esatta valutazione di $\vartheta(m)$, e per la correzione delle tavole di numeri primi, sono anche capaci di fornire espressioni analitiche per la funzione ϑ.

123. Soluzioni di Laurent, mediante il teorema di Wilson, o la serie di Fourier, oppure il calcolo dei residui, del problema di determinare $\sum_{k=1}^{\vartheta(n)} \frac{1}{p_k^t}$, o del problema più generale della determinazione della somma $\sum_{k=1}^{\vartheta(n)} \mathrm{F}(p_k)$ estesa a tutti i numeri primi, o solo a quelli di una prescritta forma lineare. — Anche dal teorema di Wilson si trae partito nello scritto:

LAURENT — Sur la théorie des nombres premiers. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.* T. CXXVI, p. 809, 1898.

Ivi si trovano due soluzioni della quistione di determinar la somma $\sum \mathrm{F}(p)$ estesa a tutti i numeri primi fino a un limite assegnato (cfr. Cap. VII, § 49). Questo problema per $\mathrm{F}(p) = 1$ si riduce alla determinazione della totalità dei numeri primi fino al detto limite.

Invece però delle funzioni K, L, M, N introdotte da Rogel, il Laurent ha pensato alla funzione della variabile complessa z

$$\varpi(z) = \frac{e^{2\pi i \frac{\Gamma(z)}{z}} - 1}{e^{-\frac{2\pi i}{z}} - 1} \,,$$

che si riduce a 1 o a 0, secondo che z è un intero primo o composto diverso da 4, quindi

$$\sum_{k=5}^{n} \varpi(k) \mathrm{F}(k) = \sum_{k=3}^{\vartheta(n)} \mathrm{F}(p_k) \,.$$

Ora si consideri la funzione

$$u(z) = \frac{2\pi i \varpi(z) \mathrm{F}(z) e^{x\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} \,,$$

supponendo che l'assegnata funzione $F(z)$ sia tale che, al variare della z nel campo contemplato, resti finita insieme alla $F'(z)$.

Il denominatore di $u(z)$ si annulla solamente pei valori interi di z; però se z è un numero primo p_k, il numeratore è diverso da 0, quindi $F(p_k) = \infty$. D'altra parte è facile verificare che

$$\lim_{z=p_k}\left(u(z) - \frac{F(p_k)}{z-p_k}\right) = \lim_{z=p_k}[\varpi'(z)F(z) + \varpi(z)F'(z) + 2\pi i\varpi(z)F(z) - F(p_k)\pi i]$$
$$= \varpi'(p_k)F(p_k) + F'(p_k) + \pi i F(p_k) \mp \infty ;$$

dunque i numeri primi p_k sono poli semplici di $u(z)$, e i loro residui sono le $F(p_k)$.

Se invece z è un numero composto k diverso da 4, anche il numeratore di $u(z)$ si annulla, e si ha

$$\lim_{z=k} u(z) = \lim_{z=k}[\varpi'(z)F(z) + \varpi(z)F'(z) + 2\pi i\varpi(z)F(z)] = \varpi'(k)F(k) \mp \infty .$$

Se dunque si indica con C un contorno, che comprende dell' asse reale soltanto un segmento avente un termine fra 4 e 5, e l'altro fra numeri interi n ed $n+1$, in virtù d'un noto teorema (Briot e Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 195) si ha

$$\sum_{k=1}^{\vartheta(n)} F(p_k) = F(2) + F(3) + \int_C \frac{e^{2\pi i\frac{\Gamma(z)}{z}} - 1}{e^{-\frac{2\pi i}{z}} - 1} \cdot \frac{e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1} F(z)\, dz ;$$

donde in particolare

$$\vartheta(n) = 2 + \int_C \frac{e^{2\pi i\frac{\Gamma(z)}{z}} - 1}{e^{-\frac{2\pi i}{z}} - 1} \cdot \frac{e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1}\, dz .$$

124. — La seconda soluzione proposta da Laurent è estendibile ancora al caso che si tratti dei numeri primi compresi nella progressione aritmetica

$$\div N \cdot N + M \cdot N + 2M \cdot \ldots \cdot x - M \cdot x ,$$

N ed M indicando come al solito due interi primi fra loro. Io quindi l' espongo in tale ipotesi generale, però la modifico sostituendo alla funzione $\varpi(z)$, che l'autore seguita ad adoperare, l'altra

$$K_z = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\Gamma(z)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{z}}$$

già adoperata da Rogel, avente in comune con $\varpi(z)$ la proprietà, che ne consiglia la introduzione. Si ha così il vantaggio di non far comparire l'unità immaginaria, che può ben evitarsi in questa seconda soluzione.

Supponiamo che $U\left(N+\frac{My}{2\pi}\right)$ indichi una funzione sviluppabile in serie di Fourier secondo i coseni e i seni dei multipli della variabile reale y (PICARD, Traité d'Analyse, T. I, p. 215). Si avrà

$$\frac{1}{2}U(N)+\frac{1}{2}U(N+M)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U\left(N+\frac{M\alpha}{2\pi}\right)d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}U\left(N+\frac{M\alpha}{2\pi}\right)\cos k\alpha\,.\,d\alpha\;;$$

ossia cambiando la variabile α sotto agl'integrali, mediante la relazione

$$N+\frac{M\alpha}{2\pi}=\xi\,,$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}U(N)+\frac{1}{2}U(N+M)=\frac{1}{M}\int_N^{N+M}U(\xi)\,d\xi+\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\int_N^{N+M}U(\xi)\cos\left(\frac{2k\pi}{M}(\xi-N)\right)d\xi\,,$$

ossia mutando successivamente N in $N+M$, $N+2M$, ..., $x-M$, ed aggiungendo alla precedente tutte le eguaglianze dedotte si ricava

$$\frac{1}{2}U(N)+U(N+M)+\ldots+U(x-M)+\frac{1}{2}U(x)=\frac{1}{M}\int_N^{x}U(\xi)d\xi+\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\int_N^{x}U(\xi)\cos\left(\frac{2k\pi}{M}(\xi-N)\right)d\xi\,.$$

Ora se poniamo

$$U(\xi)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\xi}\Gamma(\xi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi}}F(\xi)\,,$$

la precedente eguaglianza si muta in

$$\sum_p F(p)=\frac{1}{M}\int_N^{x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\xi}\Gamma(\xi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi}}F(\xi)\,d\xi+\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\int_N^{x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\xi}\Gamma(\xi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi}}F(\xi)\cos\left(\frac{2k\pi}{M}(\xi-N)\right)d\xi\,.$$

dove la sommatoria, al primo membro, è estesa a tutti i numeri primi compresi nella progressione

$$\div N\cdot N+M\cdot N+2M\cdot\ldots\cdot x-M\cdot x\;;$$

colle avvertenze 1ª che, se i termini estremi della progressione fossero numeri primi, le parti $F(N)$, $F(x)$ della sommatoria andrebbero affette dal coefficiente $\frac{1}{2}$; 2ª che, se fra i termini della progressione fosse il numero 4, al secondo membro dell'ultima eguaglianza (essendo $K_4=-\sqrt{2}$) andrebbe aggiunto $\frac{1}{2}\sqrt{2}F(4)$, o $\sqrt{2}F(4)$ secondo che 4 nella progressione è termine estremo o intermedio.

Se si suppone $F(\xi)=1$, il primo membro dell'ultima eguaglianza si riduce alla totalità dei numeri primi compresi nella progressione frai termini N ed x, coll'avvertenza che se uno o l'altro di questi numeri fosse esso stesso primo, per ciascuno di tali fatti la funzione avrebbe l'aumento di $\frac{1}{2}$, e non di 1; di tal guisa il primo membro si ridurrebbe a quella funzione sopra (XI, 99) denotata con $f(My+N,x)$, anzichè a $\vartheta(My+N,x)$. Si ha dunque

$$f(My+N,x)=\frac{1}{M}\int_N^x \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\xi}\Gamma(\xi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi}}d\xi+\frac{2}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\int_N^x \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\xi}\Gamma(\xi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\xi}}\cos\left(\frac{2k\pi}{M}(\xi-N)\right)d\xi .$$

Nel più recente articolo:

LAURENT — Sur les nombres premiers. *Nouvelles Annales de Mathématiques.* III série, t. XVIII, p. 234, 1899

il medesimo autore fornisce una nuova soluzione del problema della determinazione della somma $\sum\frac{1}{p^i}$, estesa a tutti i numeri primi fino a un limite assegnato.

Essa si fonda sopra un nuovo teorema, che come quello di Wilson, distingue i numeri primi dagli altri interi, e che s'enuncia:

Se si considera il prodotto

$$F_n(x)=\begin{cases}(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n-1})\\(1-x^2)(1-x^4)\ldots(1-x^{2(n-1)})\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(1-x^{n-1})(1-x^{2(n-1)})\ldots(1-x^{(n-1)^2}).\end{cases}$$

1° *esso si riduce a* n^{n-1}, *se* n *è primo, e a* 0 *se* n *è composto, quando vi si rimpiazza* x *con una delle radici immaginarie di* $x^n-1=0$;

2° *se lo si divide per* $\frac{x^n-1}{x-1}$, *il resto è* 0, *se* n *è composto: esso è* n^{n-1}, *se* n *è primo;*

3° *il residuo di* $\frac{F_n(x)}{x^n-1}$ *relativo alle radici di* $x^n-1=0$ (*esclusa la radice* 1) *è eguale a* $-n^{n-2}$.

Questa proposizione agevolmente si dimostra, e da essa senza difficoltà si trae il seguente risultato:

Si formi la serie, evidentemente convergente quando x non è radice d'una equazione $\left(\frac{x}{n}\right)^r-1=0$,

$$f_i(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{F_n\left(\frac{x}{n}\right)}{\left[\left(\frac{x}{n}\right)^n-1\right]n^{n+i-1}},$$

e si cerchi il residuo di $-f_i(x)$ relativo ai poli compresi in una corona circolare formata da due circoli aventi i centri nell'origine, l'uno molto piccolo e l'altro

di raggio compreso fra n ed $n+1$. Questo residuo esprimerà la sommatoria $\sum \frac{1}{p^i}$ estesa a tutti numeri primi non superiori ad n. Se $i=0$, si ha il valore di $\vartheta(n)$.

Mediante analoghe considerazioni il Laurent riduce pure alla ricerca d'un residuo la costruzione d'una funzione, che, eguagliata a zero, fornisce una equazione avente per radici tutti e soli i numeri primi.

In quanto a queste tre soluzioni di Laurent v'è da ripetere la medesima osservazione fatta in fine del § 121 per la soluzione di Levi-Civita.

125. Soluzioni ispirate al concetto di interpolazione proposte da von Koch. Estensione di Gegenbauer ai numeri primi d'una prescritta forma lineare. Soluzione di Wigert. Quesito di Laurent. — Vi sono parecchie altre soluzioni, nelle quali la richiesta di costruire una funzione, la quale assuma il valore 1 quando la variabile eguaglia un numero primo, e il valore 0, se per quella si pone un intero composto, si considera come un problema di interpolazione.

Di questo genere sono le soluzioni proposte nella nota

von Koch — Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. *Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s.*, t. CXVIII, p. 850, 1894.

Nell'esporle modificherò alquanto l'andamento delle dimostrazioni per renderle più agevoli.

Si formino le due funzioni razionali della variabile x

$$g(x)=\prod_{\mu=2}^{\alpha}(x-\mu) \quad , \quad h(x)=\sum_{\mu=2}^{\beta}\sum_{\nu=2}^{\beta}\frac{1}{g'(\mu\nu)}\cdot\frac{1}{x-\mu\nu} \, ,$$

gl'interi α, β soddisfacendo alle condizioni

$$\alpha \geqq m \quad , \quad \beta \geqq \frac{m}{2} \, ,$$

e si ponga

$$k(x)=g(x)\,h(x)$$

ed

$$\omega(x)=\prod_{\lambda=1}^{\alpha}\left(1-\frac{k(x)}{\lambda}\right)$$

si ha

$$\vartheta(m)=\omega(2)+\omega(3)+\cdots+\omega(m) \, .$$

In effetti nello sviluppo della doppia sommatoria, che costituisce la funzione $h(x)$, i numeri μ e ν dovendo essere scelti ambedue nella successione $2, 3, \ldots, \beta$, un termine quale $\frac{1}{g'(n)}\,\frac{1}{x-n}$ comparirà in $h(x)$, se n è decomponibile nel prodotto $\mu\nu$ di due fattori, ambedue non inferiori a 2, nè superiori a β. Il divisore μ di n deve perciò contemporaneamente soddisfare alle condizioni

$$\mu \geqq 2 \quad , \quad \mu \leqq \frac{n}{2} \tag{154'}$$

$$\mu \geqq \frac{n}{\beta} \quad , \quad \mu \leqq \beta \, . \tag{154''}$$

Se h_n è il numero dei divisori così condizionati, che il numero n possiede, il termine in parola comparirà col coefficiente h_n: sicchè potrà scriversi per disteso

$$h(x) = \frac{1}{g'(4)}\frac{1}{x-4} + 2\frac{1}{g'(6)}\frac{1}{x-6} + \cdots + h_n \frac{1}{g'(n)}\frac{1}{x-n} + \cdots + \frac{1}{g'(\beta^2)}\frac{1}{x-\beta^2} .$$

Le (154') dicono che non comparirà il termine $\frac{1}{g'(n)}\frac{1}{x-n}$, se n è primo; e inoltre non lo si vedrà, se n è un numero composto non ammettente divisori soddisfacenti alle (154''). Di tali numeri composti certamente esistono, così, se $\beta=6$, non ammettono divisori soddisfacenti alle (154'') i numeri 14, 21, 22, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34. 35. Però è facile convincersi che tali numeri composti sono maggiori di m. In effetti non essendovi divisori di n compresi nell'intervallo $\left(\frac{n}{\beta}, \beta\right)$ dovranno esistere divisori (diversi da 1 e da n, giacchè il numero è composto) fuori di questo intervallo; ma allora il numero n è superiore a 2β, quindi è maggiore di m, essendo $\beta \geqq \frac{m}{2}$. Resta dunque stabilito che i termini $\frac{1}{g'(n)}\frac{1}{x-n}$ tali che n non superi m, i quali manchino in $h(x)$, corrispondono necessariamente a numeri primi.

Ciò premesso sostituisco in $k(x)$ successivamente i numeri interi $2, 3, \ldots, m$, e indico, per brevità, con p quelli fra questi, che sono primi, e con n i composti. Da quanto sopra s'è detto risulta

$$k(p) = 0 \quad , \quad k(n) = h_n < n < m \leqq \alpha .$$

Quindi

$$\omega(p) = 1 \quad , \quad \omega(n) = 0 ,$$

e perciò

$$\omega(2) + \omega(3) + \cdots + \omega(m) = \vartheta(m) .$$

Così resta giustificata la prima soluzione di von Koch; ed in quanto ad essa è utile soggiungere, che, se dapprima si sceglie $\beta \geqq \frac{\alpha}{2}$, e poi dalla sommatoria doppia

$$\sum_{\mu=2}^{\beta} \sum_{\nu=2}^{\beta} \frac{1}{g'(\mu\nu)} \frac{1}{x-\mu\nu}$$

si ritengono tutti e soli quei termini, in cui il prodotto $\mu\nu$ non supera α, e si continua ad indicare con $h(x)$ la somma così limitata, sarà il prodotto $k(x) = g(x)h(x)$ una funzione razionale intera di grado $\alpha - 2$, la quale pei valori 2, 3, ..., α della x prende valori assegnati, e propriamente assume il valore 0 pei predetti valori, che sono numeri primi, e i valori h_n [compresi nell'intervallo $(2, \alpha)$] pei predetti valori, che sono invece numeri composti n.

La funzione $k(x)$ così determinata assume proprio la forma, che si dedurrebbe dalla formola di interpolazione di Lagrange.

Naturalmente le formole assumono l'aspetto più semplice, quando si dà ad α il minimo valore, di cui è capace, vale a dire m.

126. — Passo alla seconda soluzione di von Koch. Si formino le due funzioni

$$G(x)=\frac{\operatorname{sen}2\pi x}{2\pi}\quad,\quad H(x)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\mu^2\nu^2}\,,$$

e si ponga

$$K(x)=G(x)\,H(x)$$

ed

$$\Omega(x)=\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left\{1-\left[\frac{K(x)}{\lambda}\right]^2\right\};$$

si ha

$$\vartheta(m)=\Omega(2)+\Omega(3)+\dots+\Omega(m)\,.$$

Comincio dal dimostrare la convergenza della serie doppia costituente la funzione $H(x)$, la quale, posto che sia $x>0$, finisce per avere i termini tutti negativi. Sommando rispetto a μ, si ha

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\mu^2\nu^2}=\sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{2x}{x^2-4\nu^2}+\frac{2x}{x^2-9\nu^2}+\frac{2x}{x^2-16\nu^2}+\dots\right);$$

ma è (Cesàro, Analisi algebrica, p. 480)

$$\frac{2x}{x^2-4\nu^2}+\frac{2x}{x^2-9\nu^2}+\frac{2x}{x^2-16\nu^2}+\dots=\frac{\pi}{\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\nu}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{\nu^2-x^2}\,,$$

e

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{2x}{\nu^2-x^2}=\pi\operatorname{cotg}\pi x-\frac{1}{x}+\frac{2x}{1-x^2}\,;$$

quindi

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{\mu=2}^{\infty}\frac{2x}{x^2-\mu^2\nu^2}=\frac{2x}{1-x^2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\nu}-\frac{1}{x}\right).$$

Ora giovandosi dello sviluppo

$$\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}=-\frac{4B_2x}{2!}+\frac{4^2B_4x^3}{4!}-\frac{4^3B_6x^5}{6!}+\dots$$

(Cesàro, Analisi algebrica, p. 282) si trova

$$\lim_{\nu=\infty}\left\{\left(\frac{\frac{\pi}{\nu}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\nu}-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{\nu+1}\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{\nu+1}-\frac{1}{x}}-1\right)\nu\right\}=2\,;$$

dunque la serie è convergente.

Premesso ciò osservo che i numeri μ e ν, dovendo ambedue superare 1, un termine $\frac{1}{x^2-n^2}$ comparirà in $H(x)$, se n non è primo, e vi comparirà tante volte

quanti sono i divisori di n, esclusi 1 ed n; quindi, se dinoto come al solito con ℓ_n la totalità dei divisori di n, il termine $\frac{1}{x^2-n^2}$ comparirà in $H(x)$ col coefficiente $\ell_n - 2$. Sicchè

$$H(x) = \frac{2x}{x^2-4^2} + 2\frac{2x}{x^2-6^2} + \cdots + (\ell_n - 2)\frac{2x}{x^2-n^2} + \cdots .$$

Ora sostituiamo in $K(x)$ successivamente tutti i numeri interi da 2 ad m. Ed indicando, come poc'anzi, con p i primi, e con n i composti, ottengo

$$K(p) = 0 \quad , \quad K(n) = \frac{\ell_n - 2}{2\pi} \lim_{x=n} \frac{2x \,.\, \mathrm{sen}\, 2\pi x}{x^2 - n^2} = (\ell_n - 2) \lim_{x=n} \frac{\mathrm{sen}\, 2\pi x + 2\pi x \cos 2\pi x}{2\pi x} = \ell_n - 2 \geqq 1 \; .$$

Ora essendo (Cesàro, Analisi algebrica, p. 479)

$$\Omega(x) = \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{K(x)}{\lambda}\right)^2 \right\} = \frac{\mathrm{sen}[\pi K(x)]}{\pi K(x)} \; ,$$

risulta

$$\Omega(p) = 1 \quad , \quad \Omega(n) = 0$$

e perciò

$$\Omega(2) + \Omega(3) + \cdots + \Omega(m) = \vartheta(m) \; .$$

In ordine a queste due soluzioni v'è da osservare che per costruire ciascuna delle funzioni $h(x)$, $H(x)$ bisogna eseguire un calcolo molto laborioso, nel quale si viene a formare una specie di crivello, in cui i numeri, che mancano (lungo tutto lo sviluppo per H, e nella parte fino a che s'incontra il numero m per h) sono necessariamente primi: di modo che, senza accorgersene queste soluzioni fanno uso della effettiva conoscenza dei numeri primi fino ad m (cfr. I, 1).

127. — La soluzione del § 125 ha ricevuto un'estensione al caso dei numeri primi di qualche prescritta forma lineare, e propriamente delle forme $4y \pm 1$, $6y \pm 1$, nella nota:

Gegenbauer — Bemerkung über reelle Primzahlen. *Monatshefte Mathematik und Physik*. VII Jahrgang, p. 73. 1896.

Io, seguendo il Gegenbauer, ma alquanto semplificando e modificando il ragionamento, espongo una soluzione applicantesi a qualunque forma lineare $My + N$.

Si tratta di costruire una funzione razionale intera della variabile reale x, la quale acquisti il valore 1, se x eguaglia un numero primo della forma $My + N$, e dell'intervallo $(2, m)$; e si annulli per qualunque altro valore intero di x scelto in detto intervallo.

Comincio dall'osservare che la espressione

$$s_\mu = \frac{\left(\cos^2 \frac{\mu - N}{M}\pi - \cos^2 \frac{1}{M}\pi\right)\left(\cos^2 \frac{\mu - N}{M}\pi - \cos^2 \frac{2}{M}\pi\right) \cdots \left(\cos^2 \frac{\mu - N}{M}\pi - \cos^2 \frac{\frac{M}{2}-1}{M}\pi\right)\cos^2 \frac{\mu - N}{M}\pi}{\mathrm{sen}^2 \frac{1}{M}\pi \, \mathrm{sen}^2 \frac{2}{M}\pi \cdots \mathrm{sen}^2 \frac{\frac{M}{2}-1}{M}\pi} \qquad \text{per M pari}$$

ed

$$\varepsilon_\mu=\frac{\left(\cos^2\frac{\mu-N}{M}\pi-\cos^2\frac{1}{M}\pi\right)\left(\cos^2\frac{\mu-N}{M}\pi-\cos^2\frac{2}{M}\pi\right)\cdots\left(\cos^2\frac{\mu-N}{M}\pi-\cos^2\frac{\frac{M-1}{2}}{M}\pi\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{M}\pi\operatorname{sen}^2\frac{2}{M}\pi\cdots\operatorname{sen}^2\frac{\frac{M-1}{2}}{M}\pi}\qquad\text{per M impari}$$

è tale che per $\mu\equiv N$ (mod. M) dà $\varepsilon_\mu=1$, e per μ non congruente ad N secondo il modulo M, $\varepsilon_\mu=0$. Ciò premesso, continuando a supporre, come nel § 125, $\alpha\geqq m$, si formino le due funzioni razionali

$$g_1(x)=\prod_{\mu=1}^{\alpha}(x-\mu)\quad,\quad h_1(x)=\sum_{\nu=1}\sum_{\mu=1}\frac{1}{g'(\mu\nu)}\frac{\varepsilon_\mu}{x-\mu\nu}\quad,\quad(\mu\nu\leqq\alpha)\ ;$$

sviluppando la sommatoria doppia si ha

$$h_1(x)=\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{1}{g'(n)}\frac{\eta_n}{x-n}\ ,$$

dove η_n è il numero dei divisori di n della forma $My+N$.

Se dalle due funzioni g_1 ed h_1 si formi la funzione intera di x

$$k_1(x)=g_1(x)\,h_1(x)\ ,$$

e si pongano poi per x i successivi interi $2,3,\ldots,m$ si avrà

$$k_1(n)=\eta_n$$

quindi $k_1(n)$ è nullo, se n non ha divisori della forma $My+N$; in caso opposto $k_1(n)$ assumerà invece un valore non nullo minore di m.

Perciò la funzione razionale intera di x

$$1-\omega_1(x)=1-\prod_{\lambda=1}^{\alpha}\left(1-\frac{k_1(x)}{\lambda}\right)$$

è tale che, attribuendo ad x un valore intero n compreso nell'intervallo $(2,m)$, se n non ha divisori della forma $My+N$, si ha

$$1-\omega_1(n)=0\ ,$$

e, se invece ne ha, è

$$1-\omega_1(n)=1\ ,$$

Richiamando ora la funzione razionale intera $\omega(x)$ della prima soluzione di von Koch, la quale eguaglia 1, se n è primo, e si annulla per n composto, si ha che la funzione razionale intera

$$\omega(x)[\,1-\omega_1(x)\,]$$

è la richiesta, giacchè ha la proprietà che per x eguale a un numero primo della forma $My + N$ racchiuso nell' intervallo $(2, m)$ è eguale ad 1, e invece si annulla per qualunque altro intero del medesimo intervallo. Laonde si avrà

$$\vartheta(My + N, m) = \sum_{n=2}^{m} \omega(n)[1 - \omega_1(n)] .$$

128. — Una soluzione posteriore a quelie di von Koch, e contemporanea all'altra di Levi-Civita si trova nella nota

WIGERT — Remarque sur le nombres des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. *Ofversigt of Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar.* N. 5, p. 341, 1895,

ed ha comuni dei concetti con ambedue le ricordate, offrendo su ciascuna qualche vantaggio.

Si formino le due funzioni

$$G_1(x) = \Gamma(x)\frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi} \quad , \quad H_1(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{\mu=2}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty}\left(\frac{1}{x-\mu\nu} + \frac{1}{\mu\nu} + \frac{x}{\mu^2\nu^2}\right) = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{t_n - 2}{n^2}\frac{1}{x-n}$$

e da queste si ricavi la funzione intera

$$K_1(x) = G_1(x) \cdot H_1(x) ,$$

la quale frai numeri interi ha per zeri i numeri primi, ma ha anche degli zeri non interi introdotti da $H_1(x)$. In conseguenza

$$W(x) = [G_1(x)]^2 + [K_1(x)]^2$$

è una funzione intera, di cui i soli zeri reali sono i numeri primi, e propriamente questi sono zeri doppii.

Dopo di ciò il Wigert, applicando un teorema di Fröbenius sulle funzioni intere, costata che, posto

$$x = \xi + \eta i \quad , \quad \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)^2 = r \quad , \quad \frac{1}{2\pi^2}(e^{\pi r} + e^{-\pi r})^2 = M \quad , \quad \frac{r}{(1 + Mm^4)^2} = \varepsilon ,$$

nel rettangolo limitato dalle rette

$$\xi = 0 \quad , \quad \xi = m \quad , \quad \eta = \varepsilon \quad , \quad \eta = -\varepsilon ,$$

la funzione $W(x)$ non ha zeri complessi. Dunque in virtù del teorema di Cauchy sul numero delle radici di una funzione contenute in un'area, si ha

$$\theta(m) = \frac{1}{4\pi i}\int \frac{W'(x)}{W(x)}dx ,$$

l' integrale essendo preso lungo il perimetro del suddetto rettangolo. Sol che ad evitare che la funzione sotto all' integrale diventi infinita lungo la linea d' integrazione la formola precedente è da applicarsi per m non primo.

129. — Dallo stesso concetto è stato forse mosso il LAURENT nel proporre sull'*Intérmediaire des Mathématiciens*. Vol. V, p. 78, 1898 la seguente quistione:

La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \pi z \left(\frac{1}{n^2 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n}} - \frac{1}{\pi (n-z)} \right)^2$$

definisce una funzione, che esiste per tutti i valori di z, e che ammette per radici i numeri primi, e i numeri primi soli (positivi o negativi). Essa ammette probabilmente delle radici immaginarie. Avrebbe qualcuno il mezzo, non di trovare queste radici, ciò che è forse difficile, ma di limitare un campo contenente queste radici?

130. Cenno sulla soluzione di Lorenz. Conclusione. — Menziono in ultimo la soluzione fornita nella memoria

LORENZ — Analytiske Undersogelser over Primtalmaengderne. *Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*. 6[te] Raekke, vol. V, num. 4, p. 627, 1891,

di cui lo scopo principale è di meglio riconoscere la parte periodica del secondo membro della formola di Riemann.

Essendo tale lavoro scritto in lingua danese, e non essendo munito, come la memoria di Gram, del riassunto in francese, non sono in grado di fornirne un ampio resoconto. Ne darò soltanto una notizia avvalendomi della recensione relativa, che trovasi nel *Jarbuch über die Fortschritte der Mathem.* Vol. XXIII, p. 201.

S' immagini eseguito lo sviluppo della potenza s^{ma}

$$\left(\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r + \cdots \right)^s .$$

In ogni termine dello sviluppo vi figurerà un prodotto di r^{me} potenze di numeri interi, cioè la r^{ma} potenza del prodotto y di questi interi. Ora riducendo tutti i termini, che presentano y^r si ottiene che y^r è preceduta da un coefficiente, che l'autore chiama $\beta^{(s)}(y)$, sicchè egli scrive

$$\left(\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + 4^r + \cdots \right)^s = \beta^{(s)}(1) + \beta^{(s)}(2) . 2^r + \cdots + \beta^{(s)}(y) . y^r + \cdots .$$

Indicato con s_1 un intero maggiore di $\frac{\log x}{\log 2} - 1$, e posto

$$a_0 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{s_1} \cdot \frac{1}{2^{s_1}}$$

$$a_h = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h . (h+1)}{2 . 4} + \cdots + \frac{h(h+1) \ldots (s_1 - 1)}{2 . 4 \ldots (2s_1 - 2h)} \qquad h > 0$$

$$B^{(s)}(x) = \beta^{(s)}(1) + \beta^{(s)}(2) + \cdots + \beta^{(s)}(x) ,$$

l'autore trae

$$\vartheta_1(x) = -a_0 + a_1 \frac{B^{(1)}(x)}{1} - a_2 \frac{B^{(2)}(x)}{2} + \cdots \pm a_{s_1} \frac{B^{(s_1)}(x)}{s_1}, \tag{155}$$

$\vartheta_1(x)$ indicando come al solito la funzione

$$\vartheta(x) + \frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots.$$

Per potere distinguere le due parti di natura diversa che compongono $\vartheta_1(x)$, l'autore trasforma la (155) mediante la formola di Poisson

$$\frac{1}{2} + 2^r + 3^r + \cdots + x^r = \int_1^{x+\frac{1}{2}} x_1^{\,r}\left(1 + 2\sum_{m_1=1}^{\infty} \cos 2\pi m_1 x_1\right) dx_1.$$

Ottiene in prima

$$B^{(s)}(x) = \int_1^{x+\frac{1}{2}} du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2} \cdots \int_1^{u_{s-1}} \frac{du_s}{u_s}\left(1 + 2\sum_{m_1=1}^{\infty} \cos 2\pi m_1 \frac{u_1}{u_2}\right) \cdots \left(1 + 2\sum_{m_s=1}^{\infty} \cos 2\pi m_s u_s\right).$$

Ridotto a forma più semplice quest' integrale diviene

$$B^{(s)}(x) = X_0^{(s)} + \frac{s}{1} X_1^{(s)} + \frac{s(s-1)}{2} X_2^{(s)} + \cdots + \frac{s}{1} X_{s-1}^{(s)} + X_s^{(s)} \tag{156}$$

dove

$$X_h^{(s)} = \int_1^{x+\frac{1}{2}} du_1 \int_1^{u_1} \frac{du_2}{u_2}\, 2\sum_{m_1=1}^{\infty} 2\pi m_1 \frac{u_1}{u_2} \cdots \int_1^{u_h} \frac{du_{h+1}}{u_{h+1}}\, 2\sum_{m_h=1}^{\infty} \cos 2\pi m_h \frac{u_h}{u_{h+1}} \cdot \frac{(\log u_{h+1})^{s-h-1}}{(s-h-1)!}.$$

Per mezzo della (156) l'autore decompone poi ciascuna $B^{(s)}(x)$ in due parti, una aperiodica, l'altra periodica. Le parti aperiodiche delle varie B, che compariscono in (155), sostituite in questa, dànno la parte aperiodica di $\vartheta_1(x)$, la quale parte, se si scartano diversi termini, si riduce a

$$-\log 2 + \mathrm{Li}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{Li}\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1-2C_0}{1+2C_0}}\right\},$$

essendo

$$C_0 = \int_1^{\infty} \frac{du}{u}\, 2\sum_{m=1}^{\infty} \cos 2\pi m u = 0{,}077\,21\ldots,$$

sicchè

$$\frac{1-2C_0}{1+2C_0} = 0{,}732\,45\ldots.$$

Per ricavare la parte periodica di $\mathfrak{z}_1(x)$ si comincia a valutare quella di $B^{(s)}(x)$, e nel far ciò si prova che le parti periodiche di $X_h^{(s)}$ $(h < s)$ hanno soltanto una importanza subordinata a paragone di quella di $X_s^{(s)}$, sicchè solo alla parte di $X_s^{(s)}$ l'autore riduce la ricerca, e per essa trova l'espressione

$$(157) \qquad \frac{x+\frac{1}{2}}{\pi\sqrt{s}} \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_n^{(s)}(m) \frac{\operatorname{sen}\left\{2\pi s\left[m\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{s}} + (s-1)\frac{\pi}{4}\right\}}{\left[m\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{s}}}, \quad n = \mathrm{E}\left\{\left[m\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{s}}\right\}$$

dove $\gamma_n^{(s)}(m)$ è definita per mezzo dell'equazione

$$\left(1+2^r+3^r+\cdots+(n-1)^r+\frac{1}{2}n^r\right)^s = 1+\gamma_n^{(s)}(2).2^r+\cdots+\gamma_n^{(s)}(m).m^r+\cdots.$$

Rimpiazzando in (156) le $B^{(s)}(x)$ colle espressioni (157) resta determinata, secondo l'autore, la parte periodica di $\mathfrak{z}_1(x)$.

Fatte poi alcune considerazioni per valutare quali sono i termini che acquistano maggiore importanza al crescere di x, l'autore ritrova lo stesso risultato di poc'anzi per mezzo di un altro procedimento analogo al precedente.

Non arrischio nessun giudizio su questa soluzione, giacchè dal sunto del *Jarbuch*, cui ho dovuto limitarmi per la ragione sopra indicata, non apparisce, non dico la necessità, ma neppure l'utilità di certe trasformazioni, nè ci si forma un'idea esatta della fiducia, che meritano queste calcolazioni, specialmente in vista delle ripetute omissioni di termini, non trasparendo quale influenza esse esercitano sul risultato finale.

Come conclusione di questo capitolo e dell'intero lavoro si può senza alcun dubio affermare che la memoria di Riemann insieme alle esplicazioni e i complementi arrecati da Hadamard, von Mangoldt, e de la Vallée-Poussin, resta tuttora come il faro, che guidar possa nella scoperta di quanto ancora v'è di ignoto nella Teoria dei numeri primi.

Tabella dei simboli adoperati con maggior frequenza e con significato costante

---

$A = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^3} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n^4} + \cdots = 0{,}315\,718\,452\ldots$ (V, 31).

$B_1, B_2, B_4, B_{2m}, \ldots$ i numeri bernoulliani, cioè B_i è il coefficiente di x^i nello sviluppo di $\frac{xe^x}{e^x - 1}$.

C la costante d'Eulero $= 0{,}577\,215\,664\,9\ldots$

c tutti gli zeri reali o no di $\zeta(s) = 0$. (VIII, 63, 64, 68).

c_j tutti gli zeri reali o no di $\zeta(s, \chi_j) = 0$. (XI, 98).

$E(x)$ il massimo intero non superiore ad x.

$E_2, E_4, E_6, \ldots, E_{2m}, \ldots$ i numeri euleriani, cioè E_i è il coefficiente di x^i nello sviluppo di $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

$f(x) = \frac{\theta(x) + \vartheta(x)}{2}$. (VIII, 65).

$f_1(x) = f(x) + \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}f(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$ (ibid.).

$f(My + N, x) = \frac{\theta(My + N, x) + \vartheta(My + N, x)}{2}$. (XI, 99).

$f_1(My + N, x) = f(My + N, x) + \frac{1}{2}f(My + N, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}f(My + N, x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$ (ibid.).

$g(x, r) = \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{L(n)}{\log n}\cdot\frac{1}{n^r}$, se x non è nè un numero primo, nè una potenza intera d'un numero primo, cioè ancora $g(x, r) = \sum_{\nu=1}^{\theta(x)} \frac{1}{p_\nu^r} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\theta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{1}{p_\nu^{2r}} + \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{\theta(x^{\frac{1}{3}})} \frac{1}{p_\nu^{3r}} + \cdots$ Se poi x è un numero primo o una potenza d'un numero primo è $g(x, r) = \frac{g(x+0, r) + g(x-0, r)}{2}$. (IX, 79).

$g(x, r, \chi_j) = \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{L(n)}{\log n}\,\frac{\chi_j(n)}{n^r}$, se x non è nè numero primo, nè potenza intera d'un numero primo, e se x è numero primo, o potenza intera d'un numero primo è

$$g(x, r, \chi_j) = \frac{g(x+0, r, \chi_j) + g(x-0, r, \chi_j)}{2}. \quad \text{(XI, 99).}$$

$L(n)$ una funzione numerica definita nel seguente modo:

$L(1) = 0$;

$L(n) = 0$, se n ammette almeno due fattori primi differenti;

$L(n) = \log p$, se $n = p^\alpha$, p indicando un numero primo, ed α un esponente intero positivo. [IX, 78, *a)*].

$\mathrm{Li}(m)$ il logaritmo integrale di m, cioè il valor principale dell'integrale $\int_0^m \frac{dx}{\log x}$, o in altri termini $\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\log x}+\int_{1+\varepsilon}^m\frac{dx}{\log x}\right)$. (IV, 23).

$\log x$ il logaritmo neperiano di x.

$\mathfrak{L}(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\cdots=x+2x^2+\cdots+\mathfrak{t}_n x^n+\cdots$ dove $|x|<1$, ed $\mathfrak{t}_n$ eguaglia la totalità dei divisori dell'intero n. (XII, 115).

$\mathfrak{M}(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-x^3}+\frac{1}{1-x^5}+\cdots,\quad |x|<1.$ (XII, 118).

$\mathfrak{P}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int x^{z-1}\mathcal{S}(x)\,dx$ esteso alla circonferenza di centro l'origine, e raggio $\frac{1}{2}$. (XII, 120).

p un qualunque numero primo.

p_n l'n^{mo} numero primo.

$\mathfrak{R}(s)$ la parte reale della variabile complessa s.

$\mathcal{S}(x)=\mathfrak{L}(x)-x\frac{1+x}{1-x}=\sum_{m=2}^{\infty}(\mathfrak{t}_n-2)x^m,\quad |x|<1.$ (XII, 120).

$\mathrm{T}(2m-1,n)$ la totalità dei numeri della successione $1,3,5,\ldots,2m-1$, non divisibili per alcuno dei numeri primi dispari $q_1,q_2,\ldots,q_n$. (II, 7).

$$\mathrm{W}_\nu(x,\rho)=\frac{2\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}-2x^{-\rho+\frac{1}{2}}\frac{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)\cos(\alpha_\nu\log x)-\alpha_\nu\,\mathrm{sen}(\alpha_\nu\log x)}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^2+\alpha_\nu^2}.\quad [\text{IX, 78, } c)].$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ le radici dell'equazione $\xi(t)=0$ ordinate in modo che i loro moduli non decrescano mai. (VIII, 64).

$\Gamma(s)$ l'integrale euleriano di 2ª specie $\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$.

γ_j le radici dell'equazione $\xi_1(s,\chi_j)=0$, quando $\chi_j(-1)=1$, o dell'altra $\xi_2(s,\chi_j)=0$, quando $\chi_j(-1)=-1$. [XI, 98, *a)*].

$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$, o più generalmente la funzione della variabile complessa s, la quale nella regione del piano, in cui la parte reale di s non supera l'unità, è espressa dalla somma di detta serie. (VIII, 60).

$\zeta(s,\chi_j)=\zeta[s,\chi_j(\mathrm{mod.\,M})]=\sum_n{}'\frac{\chi_j(n,\mathrm{mod.\,M})}{n^s}$, dove la sommatoria è estesa a tutti gl'interi primi relativi al modulo M, o più generalmente la funzione della variabile complessa s, la quale nella regione del piano, in cui la parte reale di s supera 1, è espressa dalla suddetta sommatoria Σ'. (XI, 97).

$\theta(x)$ totalità dei numeri primi inferiori ad x.

$\vartheta(x)$ totalità dei numeri primi non superiori ad x.

$$\theta_1(x)=\theta(x)+\frac{1}{2}\theta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\theta(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$$

$$\vartheta_1(x)=\vartheta(x)+\frac{1}{2}\vartheta(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\vartheta(x^{\frac{1}{3}})+\cdots$$

$\theta(\mathrm{M}y+\mathrm{N},x)$ totalità dei numeri primi compresi nella forma lineare $\mathrm{M}y+\mathrm{N}$ (gl'interi M ed N essendo qui e sempre, primi fra di loro) interni all'intervallo (N,x) estremi esclusi. (XI).

$\vartheta(My+N, x)$ totalità dei numeri primi compresi nella forma lineare $My+N$, e nell'intervallo (N, x) estremi inclusi. (XI).

$\theta_1(My+N, x) = \theta(My+N, x) + \frac{1}{2}\theta(My+N, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\theta(My+N, x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$ (XI).

$\vartheta_1(My+N, x) = \vartheta(My+N, x) + \frac{1}{2}\vartheta(My+N, x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\vartheta(My+N, x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$ (XI).

$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ le quattro funzioni theta di Jacobi. (XII, 119).

$\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\vartheta(x)} \log p_n$. [IV, 26, *h*)].

$\lambda(My+N, x) = \sum' \log p$ $(N \leq p \leq x,\ p \equiv N,$ mod. M, p non divisore di M). (XI).

$\Lambda(x, \rho) = \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{L(n)}{n^\rho}$, se x non è potenza intera d'un numero primo; e $\Lambda(x,\rho) = \frac{\Lambda(x+0,\rho)+\Lambda(x-0,\rho)}{2}$,

se x è potenza intera d'un numero primo. [IX, 78, *b*)].

$\Lambda(x, \rho, \chi_j) = \sum_{n=1}^{E(x)}{}' L(n)\frac{\chi_j(n)}{n^\rho}$, se x non è potenza intera d'un numero primo; e

$$\Lambda(x, \rho, \chi_j) = \frac{\Lambda(x+0, \rho, \chi_j) + \Lambda(x-0, \rho, \chi_j)}{2},$$

se x è potenza intera d'un numero primo. La sommatoria è estesa ai numeri primi relativi al modulo M del carattere χ_j. (XI, 99).

$\mu(n)$ una funzione numerica così definita:

$\mu(n) = 1$, se $n = 1$, o n eguale a un prodotto di un numero pari di fattori primi tutti fra loro differenti.

$\mu(n) = -1$, se n è eguale a un prodotto di un numero dispari di fattori primi tutti fra loro differenti.

$\mu(n) = 0$, se n è divisibile per qualche quadrato diverso da 1. (VIII, 69).

$\prod'$ prodotto esteso a numeri primi non divisori di M, o, più generalmente, a numeri primi relativi ad M. (XI),

$\xi(t) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, essendo $s = \frac{1}{2} + ti$. (VIII, 64).

$\xi_1[s, \chi_j$ (mod. M)], o semplicemente $\xi_1(s, \chi_j)$, è eguale, quando $\chi_j(-1) = 1$, alla funzione

$\frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_1(x, \chi_j)x^{\frac{s}{2}-1}dx + \frac{1}{2}\varepsilon_1(\chi_j)\int_1^\infty \Psi_1\left(x, \frac{1}{\chi_j}\right)x^{-\frac{s+1}{2}}dx$, dove $\varepsilon_1(\chi_j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{k=1}^{M}{}' \chi_j(k)\cos\frac{2k\pi}{M}$,

la sommatoria essendo estesa ai numeri primi con M. (XI, 97).

$\xi_2[s, \chi_j$ (mod. M)], o semplicemente $\xi_2(s, \chi_j)$, è eguale, quando $\chi_j(-1) = -1$, alla funzione

$\frac{1}{2}\int_1^\infty \Psi_2(x, \chi_j)x^{\frac{s-1}{2}}dx + \frac{1}{2}\varepsilon_2(\chi_j)\int_1^\infty \Psi_2\left(x, \frac{1}{\chi_j}\right)x^{-\frac{s}{2}}dx$, dove $\varepsilon_2(\chi_j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{k=1}^{M}{}' \chi_j(k)\,\text{sen}\frac{2k\pi}{M}$,

la sommatoria essendo estesa ai numeri primi con M. (XI, 97).

$\rho(N, \Delta)$ è una funzione numerica relativa al modulo M (primo con N) definita dal seguente quadro, nel quale M decomposto in fattori primi è eguale a $2^\beta h_1^{\varpi_1} \ldots h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}} \ldots h_m^{\varpi_m}$,

$q_0 = 2, q_1, q_2, \ldots$ sono i fattori primi di $\varphi(M)$, e Δ è un divisore qualunque di $\varphi(M)$:

$$\Delta = 2 \begin{cases} \text{N non residuo quadratico di M} & \rho(N, \Delta) = 1 \\ \text{N residuo quadratico di M} \begin{cases} \beta > 2 \\ \beta = 2 \\ \beta < 2 \end{cases} & \rho(N, \Delta) = \begin{cases} 1 - 2^{m+2} \\ 1 - 2^{m+1} \\ 1 - 2^{m} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \Delta = q \text{ fattore primo impari di } \varphi(M) \\ \text{comune a } \varphi(h_{n_1}^{\varpi_{n_1}}), \ldots, \varphi(h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}) \end{matrix} \begin{cases} \text{N non residuo } q^{\text{ico}} \text{ di } h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}, \text{ o di M}, & \rho(N, \Delta) = 1 \\ \text{N residuo } q^{\text{ico}} \text{ di } h_{n_1}^{\varpi_{n_1}} \ldots h_{n_r}^{\varpi_{n_r}}, \text{ o di M}, & \rho(N, \Delta) = 1 - q^r \end{cases}$$

$\Delta = q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} \ldots$ $\qquad \rho(N, \Delta) = \mu(\Delta) \rho(N, q_{i_1}) \rho(N, q_{i_2}) \rho(N, q_{i_3}) \ldots$

Δ avente fattori quadratici $\qquad \rho(N, \Delta) = 0.$ (XI, 101, 104).

$\varsigma(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^s}$. (V, 31).

$\varsigma(s, \chi) = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(p_i, \text{mod. } M)}{p_i^s}$, o semplicemente $\sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{\chi(p_i)}{p_i^s}$. la sommatoria essendo estesa a tutti i numeri primi non divisori del modulo M. (VII, 59).

$\sigma(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\vartheta(m)}{m^{x+1}}$. (V, 33).

$\sum'$ sommatoria estesa a numeri primi non divisori di M, o, più generalmente, a numeri primi relativi ad M. (XI).

$\tau(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\vartheta(m) \log m - m}{m^{x+1}}$. (V, 35).

$\Phi(m, n)$ la totalità dei numeri della successione $1, 2, 3, \ldots, m$ non divisibili pei numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$. (II, 10).

$\varphi(M)$ la totalità dei numeri primi con M, ed inferiori ad M.

$\chi(N)$ oppure $\chi(N, \text{mod. } M)$ uno qualunque dei caratteri $\chi_0(N), \chi_1(N), \chi_2(N), \ldots, \chi_{\varphi(M)-1}(N)$ dell'intero N secondo il modulo M primo relativo ad esso (VII, 55 a 58). $\chi_0(N)$ è il carattere principale $= 1$.

$\psi(x) = \lambda(x) + \lambda(x^{\frac{1}{2}}) + \lambda(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$ [IV, 26, h)].

$\psi(My + N, x) = \lambda(My + N, x) + \lambda(My + N, x^{\frac{1}{2}}) + \lambda(My + N, x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$ (XI, 110).

$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$. (VIII, 64).

$\Psi_1[x, \chi_j \text{ (mod. M)}]$, o semplicemente $\Psi_1(x, \chi_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi_j(n) e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}$, dove la sommatoria è estesa a tutti gl'interi n primi con M, e χ_j è tale che $\chi_j(-1) = 1$. (XI, 97).

$\Psi_2[x, \chi_j \text{ (mod. M)}]$, o semplicemente $\Psi_2(x, \chi_j) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \chi_j(n) n e^{-\frac{n^2 \pi x}{M}}$, dove la sommatoria è estesa a tutti gl'interi n primi con M, e χ_j è tale che $\chi_j(-1) = -1$. (XI, 97).

Ω una funzione di x tale che essa, e tutte le sue derivate, assumano valori finiti per $x = 1$. (V, 32).

Nomi degli autori, di cui nel presente lavoro sono mentovate le contribuzioni relative all'argomento qui trattato

ERRATA-CORRIGE

pag.	verso	in luogo di	leggi
17	ultimo del testo	$x = 4\,800$	$x = 4\,800\,000$
19	6 da giù	$\int_{x_1}^{x}$	$\int_{x'}^{x}$
22	7	*er*	*per*
24	7 da giù	Cost. =	— Cost. =
85	ultimo	$\frac{(-1)^{m-1}B_{2m}}{2m}$	$\frac{B_{2m}}{2m}$
86	2	positivo, impari	positivo impari, prescindendo da una formola di Cahen (Vedi Tesi citata nella nota a piè della pag. 92), la quale collega le $\zeta(2m-1)$ cogl' integrali $\int_0^{\pi} \frac{\theta^k d\theta}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}$;
»	8 e 9	B_{2k}	$(-1)^{k-1}B_{2k}$
89	10	$e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\,\tau}$	$e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\pi\tau}$
97	3	$\mathrm{Li}\,(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}\,(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})$	$\mathrm{Li}\,(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}\,(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})$
118	11	$g(x, r) = \sum_{n=1}^{E(x)}$	$g(x, r) = \sum_{n=2}^{E(x)}$
126	23	qui, e nel seguito di questo Capitolo	in questo e nel § 88
129	6 da giù	$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i^m} + \sum_{i=1}^{\theta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{\log p_i}{p_i^m} + \sum_{i=1}^{\theta(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\log p_i}{p_i^m} + \cdots$	$\sum_{i=1}^{\theta(x)} \frac{\log p_i}{p_i} + \sum_{i=1}^{\theta(x^{\frac{1}{2}})} \frac{\log p_i}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{\theta(x^{\frac{1}{3}})} \frac{\log p_i}{p_i^3} + \cdots$
»	2 »	$\lim_{x=\infty}$	$\lim_{x=\infty}$
145	2	$g(x, r, \chi_i) = \sum_{n=1}^{E(x)}$	$g(x, r, \chi_i) = \sum_{n=2}^{E(x)}{}'$
148	3	$+\sum_{j=0}^{\varphi(M)-1}$	$-\sum_{j=0}^{\varphi(M)-1}$
»	8	$+n_0$	$-n_0$
»	12, 14	$+n_j$	$-n_j$
»	7, 8, 10 da giù	$\sum_{n=1}^{f(x)} \chi$	$\sum_{n=1}^{f(x)}{}' \chi$
149	9 da giù	$2^{\beta\ 2}$	$2^{\beta-2}$
155	7 »	$h_m^{\varpi m}$	$h_m^{\varpi_m}$
160	6 »	${}'\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}$	$\sum_{n=1}^{\vartheta(x)}{}'$
181	12	$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{2n\ 1}$	$\left(\log \frac{1}{x}\right)^{2n-1}$
207	14 e 17	$\sum_{n=1}^{E(x)}$	$\sum_{n=2}^{E(x)}$

Tabella contenente i valori della totalità dei numeri primi, fino a un limite assegnato, secondo le formole di Legendre, Tchebichef-Gauss, Cesàro, Riemann-Gram, Meissel *e secondo la effettiva enumerazione di* Glaisher.

	Legendre (cfr. testo, Cap. III, § 15)		Tchebichef-Gauss (cfr. testo, Cap. III, § 17, e IV, 21 a 24)		Cesàro (cfr. testo, Cap. V, § 37)		Riemann-Gram (cfr. testo, Cap. VIII, § 69 a 70)		Meissel (cfr. testo, Cap. II, § 10 e 11)	Glaisher (cfr. testo, Cap. I, § 2)
$m =$	$\vartheta(m) =$	quota di deviazione per 100 000	$\vartheta(m) =$	quota di deviazione per 100 000	$\vartheta(m) =$	quota di deviazione per 100 000	$\vartheta(m) =$	quota di deviazione per 100 000	$\vartheta(m) =$	$\vartheta(m) =$
200 000	17 982	— 11,12	18 037	294,71	18 012	155,69	17 982	— 11,12	17 984	17 984
400 000	33 854	— 17,72	33 923	186,06	33 888	82,69	33 852	— 23,63	33 860	33 860
600 000	49 096	— 14,26	49 173	152,76	49 130	65,18	49 091	— 14,26	49 098	49 098
800 000	63 955	6,26	64 037	134,48	63 987	56,29	63 945	— 9,38	63 951	63 951
1 000 000	78 543	57,33	78 627	164,34	78 571	93,00	78 527	36,94	78 498	78 498
1 200 000	92 921	— 18,29	93 007	74,24	92 943	5,38	92 899	— 41,96	92 938	92 939
1 400 000	107 129	2,80	107 214	82,15	107 145	17,74	107 100	— 24,27	107 126	107 123
1 600 000	121 195	56,14	121 279	125,49	121 205	64,40	121 159	26,48	121 127	121 124
1 800 000	135 139	49,60	135 221	110,31	135 141	51,08	135 095	17,03	135 072	135 071
2 000 000	148 976	28,87	149 055	81,92	148 971	25,52	148 924	— 6,04	148 933	148 931
2 200 000	162 718	34,43	162 794	81,15	162 705	26,44	162 658	— 2,46	162 662	162 662
2 400 000	176 376	41,97	176 447	82,25	176 354	29,50	176 306	2,27	176 302	176 302
2 600 000	189 956	40,03	190 024	75,84	189 926	24,23	189 878	— 1,05	189 880	189 881
2 800 000	203 467	51,63	203 530	82,61	203 426	31,47	203 380	8,85	203 362	203 362
3 000 000	216 913	44,74	216 970	71,04	216 863	21,68	216 816	0	216 816	216 816
3 200 000	230 299	39,09	230 351	61,68	230 242	14,33	230 193	— 6,95	230 209	230 209
3 400 000	243 629	36,13	243 676	56,25	243 561	9,08	243 514	— 10,26	243 539	243 539

4 000 000	283 323	62,91	283 332	72,15	283 223	27,90	283 179	11,05	283 140	283 145
4 200 000	296 465	50,96	296 487	58,38	296 356	14,17	296 311	— 1,01	296 314	296 313
4 400 000	309 566	74,68	309,581	79,53	309 447	36,21	309 402	21,66	309 335	309 334
4 600 000	322 628	58,00	322 637	60,79	322 498	17,68	322 454	4,03	322 441	322 440
4 800 000	335 653	63,80	335 655	64,39	335 513	22,06	335 469	8,94	335 439	335 438
5 000 000	348 644	37,59	348 638	35,87	348 492	— 6,03	348 449	— 18,36	348 513	348 514
5 200 000	361 601	53,68	361 587	49,81	361 438	8,58	361 395	— 3,32	361 407	361 408
5 400 000	374 525	43,54	374 505	38,20	374 352	— 2,67	374 310	— 13,89	374 362	374 363
5 600 000	387 419	56,04	387 391	48,81	387 235	8,52	387 193	— 2,32	387 202	387 203
5 800 000	400 284	72,75	400 248	63,75	400 089	24,00	400 047	13,50	399 993	399 994
6 000 000	413 121	65,88	413 077	55,22	412 914	15,74	412 873	5,81	412 849	412 850
6 200 000	425 929	66,02	425 878	54,04	425 712	15,04	425 671	5,40	425 648	425 649
6 400 000	438 712	68,89	438 652	55,20	438 484	16,88	438 443	7,53	438 410	438 411
6 600 000	451 470	68,93	451 402	53,86	451 229	15,52	451 190	6,87	451 159	451 160
6 800 000	464 203	71,36	464 126	54,76	463 950	16,82	463 912	8,62	463 872	463 873
7 000 000	476 912	55,39	476 827	37,55	476 648	0	476 610	— 7,97	476 648	476 649
7 200 000	489 598	57,02	489 504	37,81	489 322	0,61	489 285	— 6,95	489 319	489 324
7 400 000	502 263	59,96	502 160	39,45	501 975	2,59	501 938	— 4,78	501 962	501 971
7 600 000	514 905	66,07	514 794	44,50	514 606	7,97	514 570	0,97	514 565	514 577
7 800 000	527 527	70,76	527 407	47,99	527 215	11,57	527 180	4,93	527 154	527 169
8 000 000	540 128	65,03	540 000	41,31	539 805	5,19	539 771	— 1,11	539 777	539 807
8 200 000	552 710	70,79	552 572	45,81	552 375	10,14	552 341	3,98	552 319	552 358
8 400 000	565 273	70,10	565 126	44,08	564 925	8,50	564 892	2,66	564 877	564 926
8 600 000	577 817	65,46	577 661	38,45	577 458	3,29	577 425	— 2,42	577 439	577 497
8 800 000	590 343	57,12	590 177	28,98	589 971	— 5,93	589 939	— 11,36	590 006	590 077
9 000 000	602 850	59,92	602 676	31,04	602 467	— 3,65	602 436	— 8,80	602 489	602 567
10 000 000	665 140	84,41	664 918	51,00	664 694	17,26	664 667	13,24	664 579	
20 000 000	1 271 651	82,17	1 270 905	23,45	1 270 556	— 4,01	1 270 571	— 2,82	1 270 607	
90 000 000	5 222 945	114,84	5 217 811	16,43	5 216 852	— 1,96	5 217 182	4,38	5 216 954	
100 000 000	5 768 004	113,67	5 762 210	13,10	5 761 180	— 4,77	5 761 552	1,68	5 761 455	
1 000 000 000	50 917 511	137,73	50 849 300	3,58	50 843 935	— 6,96	50 847 455	— 0,04	50 847 478	

Diagramma rappresentante le deviazioni relative
delle formole per θ(x) degli autori qui sotto segnati
(cfr. testo Cap. V § 38)
Legendre
Tchebichef-Gauss
Cesàro
Riemann-Gram
Meissel

INDICE

CAPITOLO I.

CAPITOLO II.

CAPITOLO III.

CAPITOLO IV.

CAPITOLO V.

CAPITOLO VI.

CAPITOLO VII.

CAPITOLO VIII.

CAPITOLO XII.

finita di stampare il dì 31 Ottobre 1901

Vol. XI, Serie 2.ª **N.° 2.**

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA SINTESI DEGLI ACIDI NON SATURI
E SUI LORO PRODOTTI DI DISIDRATAZIONE

MEMORIA

della dottoressa **M. BAKUNIN**

presentata nell'adunanza del dì 16 Febbraio 1901.

Per l'azione disidratante dell'anidride acetica o anche dell'acido acetico glaciale sulle aldeidi e sugli acidi $CH_2(R)(COOH)$, si ottengono, come è noto, gli acidi non saturi.

In questa sintesi, sopratutto se realizzata a temperatura elevata, la produzione di prodotti secondarii e di sostanze resinose, di natura non ben determinata, è spesso in notevole quantità.

Dall'aldeide benzoica e dall'acido malonico scaldati a 100° in presenza di acido acetico glaciale il Claisen e Crismer [1]), che primi realizzarono questa sintesi, ebbero acido benzalmalonico, appena in quantità corrispondente all'80 °/₀ dell'acido malonico impiegato, quindi la perdita è superiore al 50 °/₀. Questa perdita sarebbe dovuta, secondo gli autori, alla scissione dell'acido benzalmalonico in aldeide e acido malonico per azione dell'acqua stessa, che si elimina durante la reazione. Questa spiegazione concorderebbe col fatto che l'ebollizione prolungata dell'acido benzalmalonico in acqua ne determina questa decomposizione.

Ora a parte la considerazione, che l'acqua in presenza di acido acetico glaciale potrebbe non reagire come l'acqua sola e che la presenza di acido malonico e benzaldeide nelle acque madri potrebbe derivare da non avvenuta combinazione, nel fatto, operando come indicano gli autori, ho constatato nelle acque madri acetiche, separate dalla massa cristallina dall'acido benzalmalonico, la presenza di acido cinnamico in quantità notevole, acido già ritrovato dal C. e C. in piccola quantità. La formazione di questo acido parrebbe dovere la sua origine alla eliminazione di CO_2 dall'acido benzalmalonico.

Se questa ipotesi è giusta, facendo attuare la sintesi in una corrente continua e secca di CO_2, deve l'eliminazione di CO_2 essere evitata e quindi il rendimento deve essere maggiore.

---

[1]) Lieb. Ann. 218, 129.

Nella sintesi degli acidi non saturi, che non hanno due gruppi carbossilici riuniti allo stesso atomo di carbonio, l'eliminazione di CO_2 non è così facile, tuttavia la formazione di stilbene e corpi analoghi è indice di una decomposizione determinata appunto dalla perdita di CO_2.

È probabile quindi che anche i prodotti resinosi abbiano una stessa origine. In tal caso la corrente di CO_2 durante la reazione deve avere una non trascurabile benefica influenza sul rendimento finale, non escludendo che tal vantaggio possa in parte anche attribuirsi all' assenza dell'ossigeno atmosferico, durante il tempo non breve del riscaldamento della miscela.

Come ho già accennato in altro luogo [1]) pare che a temperature basse gli alloisomeri non si formino, si hanno invece a preferenza a temperature elevate, qualora queste non ne determinano la loro decomposizione. Mi interessava quindi anche sotto questo aspetto raggiungere le varie temperature in vasi aperti, senza lo svantaggio di quantità notevoli di prodotti resinosi.

L'esperienza, come dirò, ha risposto favorevolmente alle mie previsioni.

PARTE SPERIMENTALE

La boccia con i varii miscugli era munita di tappo a due fori l'uno di essi attraversato da un tubo di un refrigerante ascendente, l'altro da un tubo piegato ad angolo retto, pescante per una estremità nel liquido ed attaccato per l' altra ad un apparecchio ad anidride carbonica, che convenientemente lavata ed asciugata veniva a gorgogliare nel liquido reagente.

Acido benzalmalonico

Pesi uguali di acido malonico e aldeide benzoica con metà peso di acido acetico glaciale furono scaldati dalle cinque alle sei ore in bagno d' olio a 100°. L'acido benzalmalonico si forma così abbondantemente, che si deposita cristallizzato in fondo alla boccia nella soluzione calda, tanto che bisogna sorvegliare il tubo adduttore di CO_2, perchè spesso si ottura. A reazione compiuta, lavata la massa con cloroformio, ho ricavato per 100 parti di acido malonico 130 di acido benzalmalonico grezzo, fondente a 190°-195°: e acido benzalmalonico si ebbe anche per evaporazione del liquido acetico cloroformico. La perdita può quindi calcolarsi a meno del 20 °/₀ della quantità teoretica ed anche questa, regolando opportunamente la corrente di CO_2, potrà con molta probabilità diminuire.

Sull'acido allocinnamico

Truxone ed Indone

Fondendo l'acido benzalmalonico in quantità maggiore, che non nella prima preparazione da me fatta [2]), a bagno d'olio a 195°, ho isolato nella parte solubile in etere di petrolio per mezzo del sale di anilina acido allocinnamico in pic-

---

[1]) Gazz. Chim. T. 27.

[2]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Vol. X, serie II, n. 11.

cola quantità. Avendomi il Prof. Liebermann, che io ringrazio vivamente, spedito, a mia preghiera, un grammo di acido allocinnamico, su questo ho potuto attuare dei saggi per tentarne la trasformazione in indone e truxone per mezzo dell'anidride fosforica.

La soluzione cloroformica dell'acido allocinnamico scaldata con P_2O_5 acquista immediatamente una colorazione gialla. Evaporata in questo periodo, si deposita una sostanza in principio oleosa, che poi si solidifica, e che si scioglie nell'acqua, dalla quale si deposita in aghetti fondenti verso 70°. Ma per la piccola quantità non ho potuto constatare se fosse l'acido immodificato.

Continuando il riscaldamento la colorazione gialla diventa più intensa, mentre la massa fosforica si colora intensamente in rosso. Per evaporazione della soluzione si separa una polvere appena gialletta fusibile a 289°, simile per tutte le sue proprietà al truxone, già ottenuto dall' acido allocinamico trattato con acido solforico [1]) dal Liebermann. Solo in tal modo si forma per una quantità corrispondente al 10 $^0/_0$ mentre, malgrado io abbia fatto saggi su centigrammi di sostanza, la trasformazione sembra completa.

Quando l'ebollizione della soluzione cloroformica si prolunga, la colorazione della massa fosforica diventa più intensa e per evaporazione della soluzione si ha sempre il truxone, ma imbevuto di una sostanza liquida rossa. L'alcool elimina quest'ultima perchè la discioglie, mentre quasi non scioglie il truxone. Per evaporazione dell'alcool si vanno depositando degli aghetti, ma la cristallizzazione è difficile per la piccola quantità del corpo, che tende peraltro a restare liquido.

Questa sostanza è solubile in alcool, acetone, etere acetico, alquanto in etere e etere di petrolio, insolubile in acqua. Infatti trattando la massa fosforica con acqua, si ha un liquido giallo arancio, e da esso lentamente si separano delle gocciolette rosse, che si attaccano alle pareti del tubo. Lasciando a spontaneo riposo queste gocciolette si solidificano e la polvere raccolta fonde tra 170° e 180°.

Io non ho materiale sufficiente per determinarne la natura e studiarne le proprietà, ma tutto induce a credere sia questo l'indone.

Sembra intanto che la sua formazione sia posteriore al truxone, perchè il truxone è imbevuto di sostanza rossa solo dopo ebollizione prolungata e anche perchè la massa fosforica rossa in principio trattata con acqua si scolora, senza dar traccie di corpo rosso.

La formazione del polimero antecedente all'indone non è d'accordo con quanto avviene per gli altri indoni, come è detto in seguito.

Il presunto indone parendo in un piccolo saggio, fatto in vetrino, solubile in benzina ed acido acetico, ne sarà forse possibile la determinazione della grandezza molecolare.

Sull'acido cinnamico ordinario

L'ebollizione dell' acido cinnamico ordinario in toluene con P_2O_5 lo modifica profondamente se prolungata, e mentre in principio non si raccoglie che anidride, poi la soluzione diventata bruna lascia separare sostanza in buona parte resinifi-

---

[1]) Ber. 31, 2090.

cata. Evidentemente la temperatura è troppo elevata. Invece bollito lungamente in cloroformio con P_2O_5 la massa fosforica si colora intensamente in rosso. Trattandola con acqua si osserva un fenomeno analogo a quello osservato nella disidratazione dell' isomero, si separano gocciollette liquide rosse. Queste raccolte e disciolte in alcool si solidificarono in una polvere rossa, rammollentesi a 150° e fondente tra 170° e 180°, ma la trasformazione è assai malagevole e avviene a stento. Non ho potuto constatare presenza di truxone.

Nella soluzione benzinica la trasformazione in anidride per azione del P_2O_5 si compie bene. Per un' ebollizione prolungata si ha la colorazione rossa della massa fosforica, aggiungendo acqua la benzina si separa più o meno colorata in rosso bruno, per evaporazione di essa si raccoglie dell'anidride, colorata poco in rosso, per presenza di piccole quantità del corpo rosso, sopra ricordato.

Acidi fenilcinnamici

Il rendimento dell'acido fondente a 172° preparato da alfatoluato sodico e aldeide benzoica in corrente di CO_2, è quasi teoretico (95 %). La massa cristallina, che si deposita per addizione di acqua al prodotto della reazione, è perfettamente bianca, malgrado il riscaldamento a bagno d'olio fosse avvenuto a 190°-200° per sei ore. Si ha una piccola quantità di stilbene corrispondente al mezzo %. Lo stilbene cristallizzato dall' alcool se ne deposita in bellissime lamine, fondenti a 126° (Müller 124°). Fattane la determinazione crioscopica si ebbe

Solvente	Concent.	Abbass.	Coef. d'ab.	P. m. tr.	P. m. calcolato per $C_{14}H_{12}$
Benzol	2,36	0,68	0,287	171	180

L'acido fondente a 172° è accompagnato dal suo isomero dal quale viene isolato col trattamento acquoso ed idroalcoolico. Nelle acque madri si ritrova l'alloisomero, che venne purificato trasformandolo in sale di anilina. Per aggiunzione di anilina alla soluzione benzinica dell' acido, questa si rapprende per l' avvenuta trasformazione nel sale assai meno solubile. Lo stesso si forma per addizione di anilina alla soluzione alcoolica. Lo si purifica, sia cristallizzandolo dall' acqua, nella quale non è molto solubile, sia cristallizzandolo dalla benzina, si ha così in lunghi aghi sericei f. a 128°.

Per la determinazione crioscopica si ha:

Solv.	Concentr.	Abbass.	Coef. d'ab.	P. m. tr.	P. m. calcolato per $C_{15}H_{12}O_2NH_2C_6H_5$
Benzol	0,543	0,08	0,147	333	317

Ebbi un quattro grammi di sale puro, corrispondente al quinto circa dell'acido fenilcinnamico ordinario ricavato, in quantità notevoli relativamente alle precedenti preparazioni, senza CO_2, sia a temperatura bassa, sia a 160°.

Dal sale disciolto in acqua ammoniacale, ebbi acido allofenilcinnamico purissimo f. a 137°.

ANIDRIDE FENILCINNAMICA, FENILINDONE E FENILTRUXONE

La soluzione cloroformica dell'acido f. a 137°, bollita con P_2O_5 si colora in giallo e poi in rosso. Evaporata la soluzione cloroformica diventata appena gialla, si deposita da essa una sostanza semi liquida gialletta, che si rapprende subito in una polvere per addizione di alcool. Nell' alcool caldo questo corpo si scioglie con una certa difficoltà, per raffreddamento se ne separa cristallizzato in aghetti vetrosi incolori, che ammassati appaiono bianchi. Essi fondono a 142°-43°, malgrado non siano stati ancora analizzati, per analogia agli altri prodotti di disidratazione degli acidi della serie cinnamica, può affermarsi trattarsi dell'anidride $(C_{15}H_{11}O)_2O$ e colle anidridi analoghe ha comuni i caratteri.

Se invece si evapora la soluzione cloroformica, diventata rossa pel prolungato riscaldamento con P_2O_5, si separa una sostanza rossa, che tende a conservare lo stato oleoso, ma sulle pareti si depositano dei cristallini frammisti alla sostanza oleosa e questa va man mano solidificandosi in una massa vetrosa. I cristallini come la sostanza fondono a 70°, ma lasciando la sostanza a sè stessa, sia alla luce e all'aria libera, sia in essiccatore allo scuro il punto di fusione si innalza ed il colore da rosso diventa giallo ranciato.

Trattando la massa con alcool, etere o acetone, questa trasformazione sembra accentuarsi; la decolorazione quasi completa è immediata, la massa vetrosa si scioglie prima bene e poi si deposita allo stato di polvere quasi bianca, che fonde a 300°, assai meno solubile della sostanza dalla quale si parte. Evaporato il solvente, oltre la polvere bianca sulle pareti si raccoglie poca sostanza semiliquida giallo ranciata. Questo fenomeno così ben delineato non si ha nè nella soluzione cloroformica, nè nella benzinica; non sembra perciò trattarsi per i primi solventi di sola azione separante. Per determinare la natura di questi corpi, ho fatto parecchie determinazioni crioscopiche.

I. Sulla sostanza depositata in capsula per evaporazione spontanea del cloroformio durante una notte e tenuta poi nel vuoto. La sostanza era quasi filamentosa e ancora rossa.

II. Sulla sostanza vetrosa dopo parecchi giorni della evaporazione della soluzione, era giallo arancio in parte f. a bassa temperatura in parte ad alta.

III. Sulla sostanza depositata in capsula per evaporazione a bagno di sabbia del cloroformio e successivo riscaldamento in stufa a 80°. La sostanza ancora filamentosa era già meno rossa.

IV. Sulla polvere bianca ricavata, sciogliendo in etere la stessa sostanza, precedentemente analizzata e ricavandola per evaporazione, fondeva a 300°.

Solv.	Concentr.	Abbass.	Coef. d'ab.	P. m. tr.	P. m. calc. per $C_{15}H_{10}O$
Benzol	2,357	0,48	0.203	241	206
»	1,848	0,29	0.156	314	
»	1,520	0,23	0.151	324	
					per $(C_{15}H_{10}O)_2$
»	0,740	0,086	0,116	422	412

Come si deduce dai risultati, la sostanza rossa è fenilindone, che si modifica gradatamente nel feniltruxone, chiamando truxoni gli indoni bicondensati secondo la nomenclatura del Liebermann.

Il tempo, il calore, taluni solventi ne determinano la trasformazione.

Questa trasformazione è molto importante, perchè ci spiega il comportamento del fenilortonitroindone alla luce, che da un corpo rosso fondente a 139°, si trasforma in un corpo bianco non fusibile a 300° [1]) e probabilmente i corpi fondenti a temperatura elevata, che accompagnano gl' indoni nella disidratazione dei varii altri isomeri [2]) non sono che truxoni. Ci spiega la formazione del truxone nella disidratazione dell'acido allocinnamico, solo resta ad assodarsi per esso, se precede o segue la formazione dell' indone, perchè apparentemente almeno sembra precederla.

Essendo assai probabile una analogia di costituzione nei varii truxoni, giacchè la molecola del feniltruxone è bimolecolare, bimolecolare deve anche essere la molecola del truxone. In fatti dalle ultime ricerche fatte dal Manthey [3]) parrebbe bimolecolare la formula del truxone, non solo per analogia al diidrotruxone, ma anche perchè l'acido trifeniltrimesinico è dimolecolare, perciò dimolecolare dovrebbero essere il truxone, il truxene, il tribenzoilenbenzol dai quali esso deriva. Il truxone è un poco solubile nel veratrol, forse si potrebbe tentare la determinazione crioscopica in questo solvente.

ACIDI FENILNITROCINNAMICI [4])

Acidi fenilortonitrocinnamici

Più che gli altri due isomeri l'acido orto preparato da aldeide orto-nitrobenzoica e alfatoluato sodico, si ha mischiato a grande quantità di sostanza resinosa.

La presenza di CO_2 fa diminuire la quantità di sostanza resinosa, senza però farla evitare.

In un saggio avendo raggiunto la temperatura di 200°-210° ho avuto un rendimento corrispondente ad un terzo della teoria. La parte resinosa insolubile in carbonato è di un color rosso abbastanza notevole. Le acque madri acetiche separate dalla massa solida, ancor calde, lasciarono depositare per raffreddamento una polvere cristallina giallo aranciata, che fonde tra 160° e 210°. Dell'acido isomero nulla ho potuto raccogliere.

Parendomi che l' elevata temperatura contribuisse alla disidratazione od alla decomposizione dell' isomero non molto stabile, ho ripetuto il saggio scaldando solo a 160°. Il rendimento non fu superiore al precedente, ma a differenza della preparazione precedente ho potuto isolare dell' isomero, estraendolo dalle acque madri acetiche ancora calde.

---

[1]) R. Acc. Sc. fis. e matem., *l. c.*

[2]) Idem.

[3]) Ber. 33, 3081.

[4]) Gaz. Ch. XXV e XXVII.

Ho abbassato ancora la temperatura della reazione in un saggio a 110°, in un altro a 90°.

In ambedue i casi i risultati sono quasi identici.

La sostanza resinosa non si forma, invece si ha assieme all'acido fenilortonitrocinnamico un corpo rosso, che per essere insolubile in carbonato sodico si separa facilmente dall'acido. La maggior parte dei solventi lo sciolgono.

Dalla benzina l'ebbi cristallizzato in bellissime laminucce rosso-vivo fondenti a 182°. Avendone fatta una combustione ebbi una percentuale in carbonio superiore a quella del fenilortonitroindone e crioscopicamente determinato il peso molecolare è minore, in media 200°.

Questi risultati avuti con poca e non ben purificata sostanza, non mi permettono ancora di giungere a sicure conclusioni. Pel suo aspetto, pel suo colore ed in genere per i suoi caratteri sembra un composto del tipo degli indoni, non ha però il punto di fusione del fenilortonitroindone.

Malgrado fossi partita nei due saggi da 10 gr. di alfatoluato e 9 di aldeide non ho potuto averne che un mezzo grammo circa puro, pur essendo maggiore la quantità del corpo rosso grezzo, che si forma, perchè le porzioni meno pure, più brune restano disciolte nelle acque madri dei solventi e tendono a restare allo stato liquido.

Per quanto poi riguarda la produzione dell'acido fenilortonitrocinnamico f. a 195°, coll'abbassarsi della temperatura il rendimento raddoppia, esso infatti raggiunge i due terzi della teoria.

L'acido si ha esente di sostanza resinosa con un colore un pò rossiccio per la presenza del corpo rosso.

L'estratto etereo delle acque acetiche non sembra contenere l'alloisomero.

I cristalli che se ne separano non sono che acido alfatoluico, col quale hanno comune non solo il punto di fusione, ma il comportamento con l'anilina.

Difatti tanto questi cristalli, quanto l'acido alfatoluico, disciolti in benzina ed addizionati con anilina si trasformano nel sale di anilina f. a 62°, che si riottiene molto bene dalla soluzione benzinica, se in essa si aggiunge dell'etere di petrolio. Si hanno così dei belli aghi vetrosi che si ammassono poi in laminucce madreperlacee.

Credo questo sale non sia stato precedentemente preparato.

A temperature basse la sintesi può effettuarsi anche senza corrente di CO_2, tuttavia sèmbra che in assenza di quest'ultima il prodotto rosso f. a 182° si abbia meno puro e più bruno.

Da queste prime ricerche risulta confermata la mancata formazione di alloisomero a bassa temperatura, ma resta a determinarsi la natura del corpo rosso e a meglio precisare le condizioni favorevoli alla formazione dell'acido ordinario e dell'isomero, in rapporto alla temperatura minima della loro decomposizione.

Acidi fenilmetanitrocinnamici

Partendo sempre da alfatoluato sodico, metanitrobenzaldeide e anidride acetica, si hanno questi acidi quasi esenti da sostanza resinosa e esenti da sostanza insolubile in carbonato. Lo scaldamento raggiunse i 200°. La produzione dell'alloiso-

mero fondente a 195° è notevole. Per isolarlo ho seguito un metodo assai più semplice. La soluzione sodica fu precipitata in due frazioni. Primo a precipitarsi è l'acido fenilmetanitrocinnamico, fondente a 181°, quasi puro. L'ebbi infatti puro dopo una sola cristallizzazione. Dalle acque ancora alcaline, separate da questo primo precipitato, se ne ebbe per acidificazione un secondo, questo in massima costituito dall'isomero f. a 195°.

Per purificarlo, l'ho trasformato in sale di anilina, che per essere meno solubile dell'acido f. a 181°, si deposita dalle soluzioni alcooliche per primo. Ed i primi depositi sono sempre costituiti da sale anilinico puro f. a 162°, gli altri da sale anilinico misto all'acido isomero.

Una soluzione diluita fredda di carbonato sodico elimina con una parte di sale la maggior parte dell'acido isomero. Si ebbe un rendimento totale corrispondente al 90 % per un terzo costituito dall'acido isomero.

Anidride fenilmetanitrocinnamica e fenilmetanitroindone

Non avendo potuto prima per mancanza di materiale nè preparare l'anidride nè purificare l'indone, l'ho fatto ora.

L'acido in soluzione cloroformica subisce per azione di P_2O_5 una prima disidratazione, dalla soluzione gialletta si separa una sostanza bianca cristallizzata in aghetti. Essa è difficilmente solubile in alcool, ma sciogliendovisi più a caldo che a freddo, se ne riottiene in aghetti bianchi f. a 129°. Molto solubile in acetone a caldo, se ne deposita lentamente in begli aghi bianchi.

Risulta dalla determinazione crioscopica essere l'anidride

Solv.	Conc.	Abbass.	Coef. d'ab.	P. m. tr.	P. m. calcolato per $(C_{15}H_{10}O_3N)_2O$
Benzol	1,70	0,16	0,094	520	520

L'ulteriore disidratazione determina la formazione del fenilnitroindone, che si deposita dalle soluzioni in laminucce di un color rosso vivo assai simili al fenilparanitroindone. Per completa evaporazione delle acque madri si ebbe un deposito rosso cupo, che è molto solubile in benzina, dalla quale si hanno depositi solo per quantità discrete disciolte. Invece la porzione più pura è assai meno solubile, più a caldo, che a freddo. Si potette in tal modo cristallizzata dalla benzina averla pura f. a 218° in laminucce rosso vivo.

Nella prima preparazione fatta di questo indone esso era molto solubile [1] in benzina, non già nulla, come fu stampato nella precedente memoria, perchè operando su piccole quantità si aveva il prodotto un pò alterato bruno.

Solv.	Conc.	Abbass.	Coef. d'ab.	P. m. tr.	P. m. calcolato per $C_{15}H_9O_3N$
Benzol	0,106 [2]	0,02	0,0188	260	251

[1] R. Acc. Sc. fis. e mat., *l. c.*

[2] Non fu possibile una maggiore concentrazione.

Acidi fenilparanitrocinnamici

Questa sintesi attuata nel solito modo in corrente di anidride carbonica da alfatoluato sodico e fenilparanitrobenzaldeide dette un rendimento teoretico senza alcuna formazione resinosa.

Per quanto riguarda la preparazione dell'acido alloisomero, scaldando la miscela a 210°, si ebbe una quantità minore dell'isomero, che nella porzione scaldata a 160°. Infatti mentre nella prima per 12 gr. di acido si ebbero 2 gr. di alloisomero grezzo, nella seconda per 22 gr. di acido ordinario 6 gr. di isomero grezzo.

Si vede che la temperatura di 200° decompone l'alloisomero.

Sono in corso altri lavori.

Istituto chimico della R. Università di Napoli, Febbraio 1901.

finita di stampare il dì 27 Aprile 1901

Vol. XI, Serie 2.ª N.º 3

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SUL ROSTELLO DELLE *DAVAINEAE*

CONTRIBUTO ALLA MORFOLOGIA DEL ROSTELLO

MEMORIA

del dott. ANTONIO BREAZZANO

presentata nell'adunanza del dì 20 Aprile 1901.

Comunemente si ritiene che in taluni Tenioidi esista una ventosa frontale.

Allo Zschokke (1888) parve di riconoscerla evidente nella *Taenia argentina* [*Chapmania tauricollis*, secondo il Monticelli (1893)], nella *Davainea contorta* e *struthionis* (1895), mentre il Lühe (1894) ravvisò nelle Davainee in generale una spiccata somiglianza del vertice del capo con una ventosa.

La ventosa, secondo l'opinione dello Zschokke, sarebbe determinata dal fatto che i margini laterali del rostello si ripiegherebbero in avanti e costituirebbero un tubo, nel cui fondo resterebbe la parte più ingrossata del rostello medesimo. Questo modo di vedere darebbe agio di appoggiare, in maniera diretta, l'omologia del rostello dei Cestodi col faringe dei Trematodi.

Ho avuto agio di esaminare varie forme del genere *Davainea* e ho trovato uno stato di cose che, mentre mi spiega i ritrovati dello Zschokke e di altri che han creduto di riconoscere una ventosa frontale in forme del genere suddetto, tuttavia mi pone in grado di valutare altrimenti la condizione anatomica generale dell'apparato frontale di queste specie. Sulla base della conoscenza intorno ad altre forme la sua interpretazione per me è diversa. Di più, avendo potuto esaminare, mercè la cortesia del Monticelli, degli esemplari di *Chapmania tauricollis*, ho ravvisato anche in questa specie la condizione propria del genere *Davainea*.

La specie che con più profitto ho potuto studiare è stata la *Davainea cesticillus*, di cui potetti procurarmi largo materiale nei polli di Napoli.

Questa specie possiede, com'è noto, uno scolice grande, con apparecchio rostellare che raggiunge considerevoli dimensioni in confronto a quello delle altre Davainee, in cui lo scolice è molto piccolo; costituisce perciò un soggetto molto favorevole allo studio. Mi sono servito di esemplari viventi che ho fissati variamente in soluzione acquosa satura di sublimato corrosivo, nel liquido di Zenker e di Hermann e colorati in sezione ed in toto con emallume ed eosina, carminio borico ecc.

Quando si guarda uno scolice di *Davainea cesticillus*, nel quale l'apparecchio terminale si trovi nello stato di completa retrazione, si vede alla sommità un largo infossamento pressocchè circolare (fig. 1 *i*) che occupa gran parte dello scolice e che, per la sua somiglianza con un canestro, ha procurato il nome specifico a questo verme. Il largo infossamento potrebbe simulare una ventosa frontale; ma, in effetti, esso è semplicemente dato dalla invaginazione cefalica, in seguito all'affondarsi di un organo particolare (che è poi un vero rostello) nel parenchima cefalico. Nello stato di media protrazione si scorge l'organo in discorso, sufficientemente voluminoso, che sporge alquanto dallo scolice con forma caratteristica, com'è rappresentato nella fig. 2 *r*, mentre nella totale protrazione (fig. 7 *r*) esso è di figura sferica.

Tenendo presente la fig. 7, noi possiamo distinguere in esso due segmenti, uno anteriore che sporge più o meno fuori dallo scolice ed è ricoperto dalla cuticola, l'altro posteriore, tutto immerso nel parenchima cefalico. Le altre parti, quali il cercine anulare caratteristico che appare soprattutto nello stato di media protrazione (figg. 3, 4, 5, 6, *c*) e l'infossamento in cui è racchiuso, fanno parte dello scolice ed io non posso riguardarle (sia per la loro struttura istologica, sia per i loro rapporti) come parti del vero rostello, ossia quali ripiegamenti dello stesso, tali da giustificare il concetto di una ventosa.

È qui il caso di fare la distinzione che, in tenie meglio studiate, gli autori stabilirono, del rostello propriamente detto dalla invaginazione cefalica. A quest'ultima soltanto dobbiamo riferire le altre parti a cui ho accennato. L'organo è costituito da un sacco semplice, un sacco in cui non si può distinguere, come in altri Cestodi, (tenie superiori, *Dipylidium*) una porzione bulbare ed una clavare. Ammettendo che la porzione clavare sia una modificazione morfologica secondaria, tutt'al più possiamo riguardare questo sacco come un bulbo ed un semplice bulbo, per configurazione e rapporti esattamente distinto e separato dal resto. Su tale argomento ritornerò subito dopo l'esposizione di qualche particolare istologico.

Il sacco risulta di una sottile membrana anista su cui corrono esili fibrille muscolari trasversali (figg. 5 e 10 *f t b*) e longitudinali. Questa membrana limitante fondamentale non è sempre molto evidente. Le fibre longitudinali del sacco sembra che offrano rapporti di continuazione con i muscoli longitudinali dello strobila.

L'interno del bulbo è costituito da un tessuto che rassomiglia del tutto a quello che è stato già descritto nella *Taenia relicta* (Zschokke, 1892) e nei *Dipylidium* (Diamare, 1893), costituito cioè da maglie larghe di apparenza elastica, con nuclei sparsi (fig. 9), di cui alcuni più oscuri, altri più chiari con uno o più nucleoli.

In molti preparati di tagli anche non troppo superficiali, si notano, oltre alla massa elastica, delle fibre longitudinali (fig. 8 *f l i b*) per cui l'occhio riceve proprio l'imagine di una sezione di ventosa. Ed invero la ventosa qui parrebbe, ad un osservatore che non avesse il confronto di numerosi altri preparati, veramente esistente. Potrebbero essere queste fibre benanche emanazione della muscolatura longitudinale interna dello strobila. Infatti i fasci muscolari longitudinali si spingono in avanti sino a raggiungere la base del bulbo (figg. 5, 6, 7 *m l*) e si terminano in corrispondenza di esso, com'è noto anche in altre forme bene studiate.

La fig. 8 rappresenta una sezione dorso-ventrale che ha interessato lo scolice con il rostello interamente retratto nella sua parte mediana. Presentandosi il rostello in-

curvato, in forma di un arco, non si esiterebbe a riguardarlo come ventosa. Si confronti però la suddetta fig. 8 con la fig. 7 che rappresenta un taglio sagittale anch'esso mediano di uno scolice che ha invece l'organo in quistione del tutto protratto. Si vede che nella fig. 7 ogni apparenza di ventosa è sparita come del pari nelle figg. 3, 4, 5 e 6 di esemplari in cui lo stesso organo è in media protrazione. Dall'esame comparativo risulta che quest'organo, che può estendersi e raccorciarsi come in altri Cestodi, è, nella sua più semplice espressione, un *rostello*.

I fasci emananti dal sistema muscolare longitudinale interno dello strobila, dopo aver date diramazioni per le ventose (figg. 4 e 5), vanno a mettersi in rapporto col bulbo e terminano su di esso esattamente come i fasci del *retrattore del rostello* dei *Dipylidium* e di altri Cestodi. In un taglio superficiale longitudinale di un rostello in media protrazione si vedono i fasci muscolari interni arrestarsi ad un certo punto, cioè prima di giungere alla base del bulbo (fig. 3, *rr*). Tutto il cercine invece presenta dei muscoletti longitudinali allineati parallelamente gli uni agli altri (figg. 3 e 4 *fc*). Queste fibre potrebbero far sospettare dell'esistenza di una muscolatura propria del cercine; ma l'esame dei tagli seriali ci dimostra che essi sono semplicemente le terminazioni finali del retrattore (figg. 4 e 10 *fc*).

Nella fig. 10 il bulbo appare superficialmente interessato e comparisce immediatamente al di sotto dei fasci muscolari, lasciando intravedere le fibre trasversali *ftb* della sua membrana limitante. Si vedono pure le fibrille *fc* che s'inoltrano nel parenchima retrattosi intorno al bulbo. E, poichè il cercine nasce da una ripiegatura di tutto il tessuto circondante il rostello istesso, così le terminazioni dei muscoli del retrattore vengono ad essere incurvate tutte all'intorno del rostello, nel cercine, ed in tagli superficiali, tangenziali o frontali, essendo il cercine prominente, il suo tessuto è primo interessato dal taglio. In tal guisa la continuità dei muscoletti del cercine con il retrattore non è visibile.

Con ciò io voglio escludere l'eventuale supposizione dell'esistenza di una speciale muscolatura, come esiste nell'apparato rostellare di forme più evolute (*Dipylidium Trinchesii* Diam.).

Nei tagli sagittali mediani di esemplari con rostello svaginato (fig. 7) od interamente invaginato (fig. 8) si vedono i fasci muscolari dirigersi nettamente alla base del rostello (figg. 5 e 6) ed ivi fermarsi. In quelli con rostello semiprotratto si convalida, in conclusione, l'osservazione che questi fasci vanno, più o meno divergendo, a terminare sul rostello, nonchè nel parenchima circostante.

Tra coloro che accennano ad una ventosa frontale lo Zschokke parla di coesistenza di rostello e di ventosa. Una conciliazione dei nostri rispettivi risultati è possibile, non nel senso di reale esistenza di entrambi gli organi, ma nel senso che *esista qui un rostello che può assumere aspetto ventosiforme* in seguito a modificazioni sue e di tutta la parte anteriore della testa. A queste modificazioni, senza dubbio, deve rapportarsi quanto notò il Lühe, cioè: « Bei *Davainea struthionis* (Houtt.) ist der Längsdurchmesser dieses Gebildes ausserordentlich verkürzt und indem der äussere Rand sich etwas nach vorn vor die vordere Fläche umlegt, erhält das Bild eine gewisse Aehnlichkeit mit einem Saugnapf [1]) ».

---

[1]) Il Lühe riferisce (1894) che il rostello delle *Davainee* è un corpo che ha la forma di un uovo o di una lente, il quale, essenzialmente, consiste in muscoli longitudinali incastonati in uno strato di connettivo »; del valore di questi muscoli non parla.

Trattasi dunque, anche nel caso del Lühe, di un rostello molto retratto. Or nella *D. cesticillus*. data la struttura, l'estensione ed i rapporti del bulbo, la sua retrazione deve essere in totalità assai energica e non senza influenza sulla sua stessa forma. La sua retrazione è dovuta principalmente alla contrazione dei potenti fasci muscolari del retrattore che tira in giù tutto il sistema. A questa contrazione del retrattore si aggiunge l'azione deprimente delle fibre trasversali e longitudinali del bulbo stesso, le quali ultime, come accennai, potrebbero riguardarsi come emanazioni dello stesso retrattore. Inoltre i mutamenti del bulbo coincidono con notevoli modificazioni di tutta la parte della testa ad esso circostante e formasi così, nella retrazione, l'infossamento caratteristico. Quando la retrazione è molto forte si produce un incurvamento più o meno pronunziato del rostello già depresso, in guisa da aversi l'apparenza di una ventosa, a un dipresso come lo Zschokke disegna nella *D. contorta*.

Il fatto sul quale io insisto è che si tratta nella *D. cesticillus* di *deformazioni di un vero organo rostellare*, deformazioni che spariscono in stadi diversi (protrazione più o meno pronunziata) e che quindi *anatomicamente non si può parlare di una ventosa frontale*.

Posso affermare che in altre Davainee da me studiate, fra le quali la *D. tetragona*, vi è anche un rostello che, sebbene più piccolo, è interamente simile a quello descritto nella *D. cesticillus*. La fig. 13 rappresenta appunto un taglio dorso-ventrale di *D. tetragona*. Il lungo tubo *i*, nel cui fondo trovasi il rostello, fa parte dell'invaginazione cefalica e la sua profondità è del pari relativa agli stadi di retrazione del rostello stesso, sparendo esso tubo del tutto nella totale protrazione del rostello. Ciò che, a mio credere, presenta ancora maggiore importanza è l'aver io constatato che nella *Chapmania tauricollis* la pretesa ventosa frontale è invece un rostello del tutto simile a quello delle Davainee. Deformandosi nella stessa maniera che nella *D. cesticillus* il rostello della *Chapmania* dà l'illusione di una ventosa (fig. 11). Ma chi guardi la fig. 12, che è del pari un taglio dorso-ventrale di *Chapmania* con rostello protratto, vede che la ventosa non esiste affatto, ossia che essa scompare nello stato di retrazione del rostello.

Se ora si pone in confronto il tipo di rostello studiato con quello più complesso di altre forme che il Nitsche (1873), il Leuckart (1886), lo Zschokke (1892), il Diamare (1893) hanno fatto conoscere, si vede che nel tipo rappresentato dalla *D. cesticillus* è, per così dire, schematizzata la costituzione fondamentale di questo apparato terminale dei Cestodi.

Il rostello delle Davainee è dunque costituito da un bulbo con un contenuto retiforme, sul quale bulbo si attaccano e si distribuiscono i fasci muscolari del sistema longitudinale interno dello strobila. Mancano in esso quelle modificazioni successive e progressive di altre forme indicate già dal Diamare [1]) (1893); e dovrà perciò l'organo essere considerato come *un rostello rudimentale*.

È questione fra gli autori se il rostello dei Cestodi sia omologo ad una ven-

---

[1]) Il Lühe che da principio (1894) si era opposto a questo concetto del Diamare, in un suo recente lavoro (1898) lo accetta pienamente.

tosa o al faringe dei Trematodi o se piuttosto corrisponda alla tromba dei Rabdoceli. Recentemente (1900) il **Goldschmidt**, che ha studiato lo sviluppo della *Taenia echinococcus*, si dichiara favorevole alla omologia del rostello con la tromba dei Rabdoceli.

Io vorrei intanto osservare che una formazione terminale del capo assai semplice, così come l'ho rinvenuta nelle *Davainee* e nella *Chapmania*, un rostello rudimentale, è, a sua volta, prossimo, per certi caratteri, ad una ventosa. Certo, se si considera il fatto dal lato puramente anatomico, riesce impossibile identificare due organi che, nella loro forma più evoluta, sono così diversi, come un rostello ed una ventosa. Ma se si guardano le forme adulte di passaggio ed anche se si tien conto dello sviluppo di certe specie studiate a questo riguardo, si viene a riconoscere, come già il Diamare (1893) ebbe a sostenere, che da rostelli molto semplici, per così dire, ventosiformi, si può pervenire, mediante ben definite forme di transizione, al rostello dei Tenioidi superiori. Questo poi, alla sua volta, si approssimerebbe all'apparato terminale dei Rabdoceli. Questo modo di vedere acquista maggior valore quando si consideri che il rostello di forme complesse (*Dipylidium*) passa per uno stadio (Grassi e Rovelli) che singolarmente coincide col modo di essere permanente delle forme da me studiate.

In tal guisa gli estremi delle disparate vedute morfologiche verrebbero a toccarsi, poichè si verrebbe a riconoscere una fondamentale equivalenza degli organi appendicolari del capo dei Cestodi, tanto nella supposizione che la tromba, per consecutive modificazioni, sia divenuta rostello rudimentale, prossimo ad una ventosa, quanto viceversa.

Sento il dovere di ringraziare specialmente il Coadiutore di questo Istituto, Dr. V. **Diamare** che mi ha guidato nella presente ricerca.

Dal Gabinetto di Anatomia Comparata della R. Università di Napoli.
Aprile 1901.

finita di stampare il dì 17 Giugno 1901

BIBLIOGRAFIA

Diamare, *Il genere* Dipylidium (Atti R. Acc. Scienze fis. matem. Napoli, tav. I-III, 1893).

Goldschmidt, *Zur Entwicklungsgeschichte des Echinococcusköpfchen* (Zoolog. Jahrb. XIII Band, 3 Heft, Taf. 33, 1900).

Grassi e Rovelli, *Ricerche embriologiche sui Cestodi* (Atti Accad. Gioenia Catania. Vol. IV, Ser. IV, 1892).

Leuckart, *Die Parasiten des Menschen etc.* (Leipzig, II Aufl., 1886).

Lühe, *Zur Morphologie des Taenienscolex* (Königsberg i. Pr. 1894).

— *Beiträge zur Kenntnis des Rostellums und der Scolexmusculatur der Taenien* (Zool. Anz., 1894, num. 453, pag. 279).

— *Beiträge zur Helminthenfauna der Berberei* (Sitz. Königl. Preuss. Akad. Wiss. zu Berlin, XL, 1898).

Monticelli, *Intorno ad alcuni elminti del Museo Zoologico di Palermo* (Naturalista siciliano, anno XII, num. 7-9, 1893).

Nitsche, *Untersuchungen über den Bau der Taenien* (Zeitschr. Wiss. Zool., Bd. 23, 1873).

Stiles, *Tapeworms of the poultry* (U. S. Departement of Agriculture. Bureau of Animal Industry, 1896).

Zschokke, *Ein Beitrag zur Kenntnis der Vogeltänien* (Centralblatt Bacteriol. Paras., I Band, 1888).

— *Recherches anatomiques et histologiques sur les Cestodes* (Genève 1892).

— Davainea contorta *n. sp. aus Manis pentadactyla* (Centralblatt Bacteriol. Paras., XVII Band, 1895).

SPIEGAZIONE DELLE LETTERE

i, infossamento.
r, rostello.
c, cercine.
ftb, fibre trasversali del bulbo.
flib, fibre longitudinali interne del bulbo.
fc, fibre del cercine.
fp, fibre nel parenchima circondante il bulbo
ml, muscoli longitudinali dello strobila.
rr, retrattore del rostello.
v, ventosa

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Figg. 1-10. **Davainea cesticillus,** Blan.

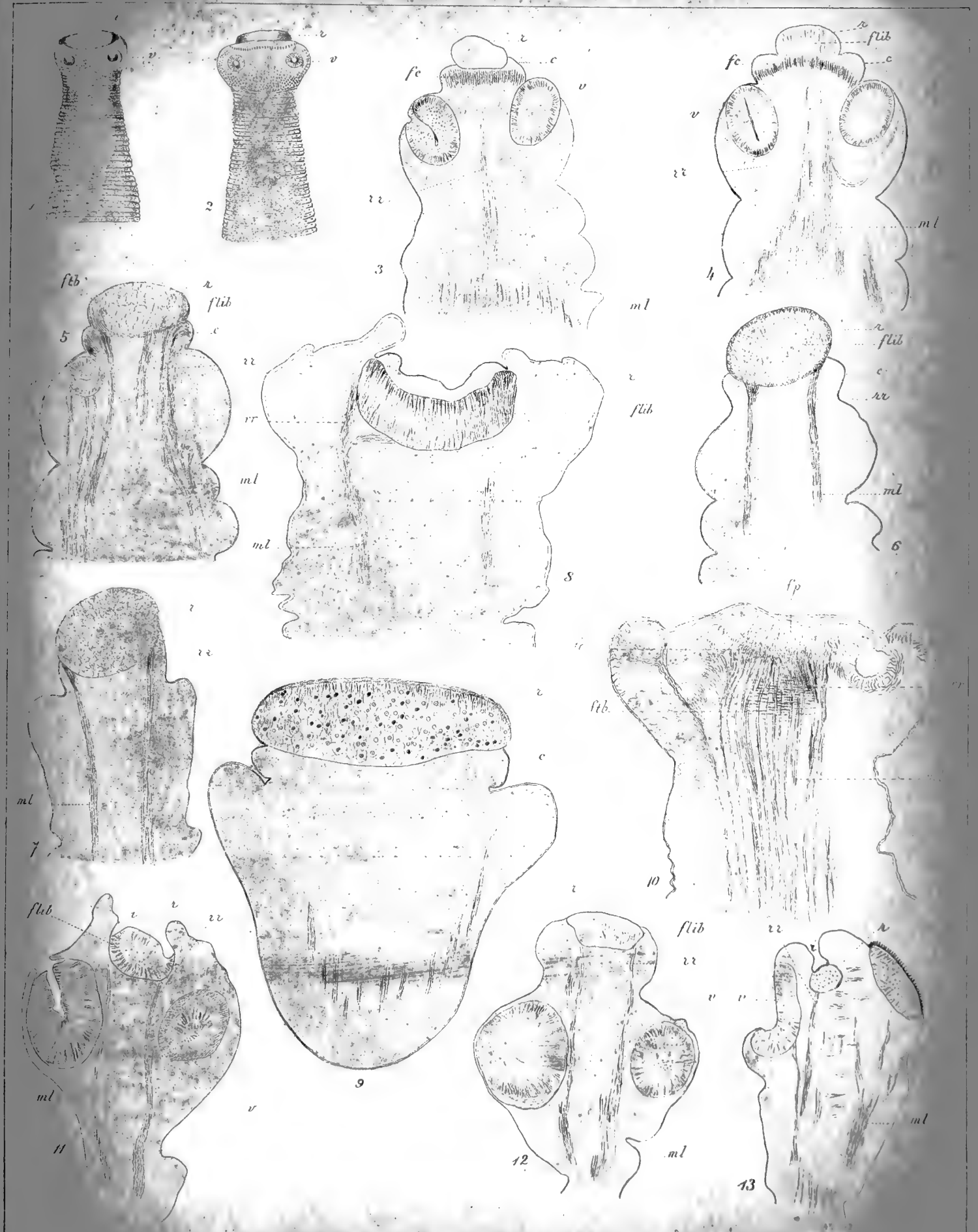
Fig. 1. — Individuo con rostello invaginato. Si noti l'infossamento *i* prodotto dal rostello retratto.
» *2.* — Individuo con rostello semiprotratto.
» *3.* — Taglio dorso-ventrale di uno scolice con rostello semiprotratto. Si vede la interruzione fra le fibre del cercine *fc* ed il retrattore *rr*.
» *4.* — Taglio dorso-ventrale consecutivo della stessa serie. Si comincia a vedere la continuità delle fibre del cercine col retrattore.
» *5 e 6.* — Tagli dorso-ventrali di scolice con rostello semiprotratto. I muscoli longitudinali vanno a terminare sul rostello più o meno divergendo.
» *7.* — Taglio laterale di scolice con rostello protratto. I fasci muscolari si vedono direttamente terminarsi alla base del rostello.
» *8.* — Taglio dorso-ventrale di scolice con rostello interamente retratto. Si noti l'apparente figura di ventosa frontale.
» *9.* — Taglio di un rostello che mostra la struttura del bulbo.
» *10.* — Taglio superficiale di uno scolice con rostello retratto.

Figg. 11-12. **Chapmania tauricollis,** Mont.

» *11.* — Taglio di scolice con rostello introflesso. Anche qui si osserva, come nella fig. 8, l'apparenza di ventosa frontale.
» *12.* — Taglio di scolice con rostello protratto. La figura di ventosa è sparita. Da entrambe queste figure si rileva che nella *Chapmania* il comportarsi dei muscoli dello strobila con il rostello è lo stesso di quello della *D. cesticillus.*

Fig. 13. **Davainea tetragona,** Molin.

» *13.* — Taglio di scolice con rostello retratto. Si noti il tubo prodotto della retrazione: le sue pareti non sono del rostello ma della invaginazione cefalica.

Atti d. R. Accad. d. Sc. Fisiche e Matem. Vol. XI. Ser. 2. N.° 3.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SULLA ETERIFICAZIONE DI ACIDI CON FENOLI

MEMORIA

della dott. MARUSSIA BAKUNIN

presentata nell'adunanza del dì 8 Giugno 1901

La preparazione degli eteri fenici [1]) per l'azione dell'anidride fosforica sugli acidi ed il fenolo, disciolti in solvente neutro, faceva presupporre un comportamento analogo dei fenoli in genere con i varii acidi, se in soluzione neutra disidratati con P_2O_5.

Ho creduto perciò opportuno sperimentare questa preparazione con fenoli monovalenti, bivalenti e trivalenti.

Ho scelto tra gli acidi i fenilnitrocinnamici ed il fenilcinnamico, sia per averli a mia disposizione, sia per completare la serie dei derivati. Tra i fenoli l'ortocresol, il timol, la resorcina, la pirocatechina, l'idrochinone ed il pirogalllo.

I fenoli monovalenti reagiscono con gli acidi assai vivamente, così che il riscaldamento è appena necessario. L'energia della reazione scema coll'aumentare della valenza e perciò, perchè meglio si compia la reazione, è preferibile scegliere pei fenoli bivalenti e trivalenti solventi con punti di ebollizione piuttosto elevati, per esempio, il toluene.

Per quanto riguarda i rapporti di combinazione tra gli acidi ed i fenoli bivalenti e trivalenti, usando fenol in eccesso ho ottenuto sempre i prodotti monosostituiti dei fenoli. È probabile che partendo da quantità di acido e fenol corrispondenti ad una molecola di fenol per due o tre di acido, si abbiano sempre prodotti bisostituiti e trisostituiti. Infatti, come è detto in seguito, in queste condizioni ho preparato l'etere resorcinico e l'etere idrochinonico bisostituito.

---

[1]) Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. Vol. X, serie II, n.° 11; Gazz. Chim. Tom. XXX, p. II.

PARTE SPERIMENTALE

Gli acidi, disciolti in cloroformio, benzol o toluene con fenoli, vengono per pochi minuti scaldati in presenza di P_2O_5, aggiunto a piccole quantità fino a cessazione della reazione, che si rende palese per la viva ebbollizione del liquido. Separato il liquido dalla massa fosforica e distillatolo, il residuo viene bollito ripetutamente con acqua per liberarlo dai fenoli ed indi cristallizzato. La parte di etere, che resta immedesimata nella massa fosforica, se ne riottiene col trattamento acquoso, che sciogliendo l'acido fosforico permette la separazione degli eteri insolubili.

Per gli eteri dei fenoli bivalenti e trivalenti, pei quali la reazione può essere meno completa e pei fenoli, insolubili in acqua, è preferibile sostituire all'ebollizione del prodotto grezzo con acqua un trattamento con soluzione diluita di carbonato sodico più o meno calda, per eliminare oltre i fenoli il poco acido non combinato. Solo è da osservarsi, che quando non tutti gli H ossidrilici sono sostituiti, l'etere si scioglie nella soluzione di carbonato sodico, sopratutto se concentrata e bollente, ma contemporaneamente si saponifica; infatti l'acido cloridrico, ne riprecipita non l'etere, ma l'acido primitivo, come è spiegato più chiaramente in seguito.

ETERI ORTOCRESOLICI

Etere dell'acido fenilortonitrocinnamico f. a 195°

La sostanza gialletta, residuo della distillazione del cloroformio, dopo esser stata bollita con acqua, cristallizzò dall'alcool, nel quale è assai più solubile a caldo che a freddo, in prismetti, apparentemente romboidali, giallo paglini f. a 97-98°.

Da gr. 0,3247 di sost. gr. 0,8736 di CO_2 gr. 0,1416 di H_2O.

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{10}NO_3 \cdot OC_6H_4CH_3$
C =	73,35	73,53
H =	4.84	4,73

Etere dell'acido fenilmetanitrocinnamico f. a 181°

Questo etere fu preparato in soluzione benzinica, distillata questa, si ebbe un residuo gialletto, che convenientemente lavato con l'acqua, cristallizza dall alcool, che lo scioglie assai più a c., in granuli cristallini f. a 118-120°.

Da gr. 0,2934 di sost. gr. 0,7906 di CO_2 e gr. 0,1332 di H_2O,

	trovato
C =	73,48
H =	5,05

Etere dell'acido allofenilmetanitrocinnamico f. a 195°

Preparato come i precedenti quest'etere in soluzione cloroformica, si ottenne dall'alcool in ciuffetti di aghi bianchi, setosi f. a 83-84°.

Etere dell'acido fenilparanitrocinnamico f. a 214°

Il residuo della distillazione della soluzione cloroformica, cristallizza dall'alcool in aghetti giallo paglini f. a 128-129°.

Da gr. 0,2583 di sost. gr. 0,6965 di CO_2 e gr. 0,1190 di H_2O

	trovato
C =	73,53
H =	5,11

Etere dell'acido allofenilparanitrocinnamico f. a 143°

L'etere si ottenne mischiato a piccole quantità di fenilnitroindone. Infatti dalla soluzione alcoolica si ebbe un primo deposito di aghetti paglini f. a 120°, un secondo degli stessi aghetti, misti ai cristalli rossi del fenilnitroindone.

Da gr. 0,1765 di sost. gr. 0,4755 di CO_2 e gr. 0,0830 di H_2O.

	trovato
C =	73,47
H =	4,70

Etere dell'acido fenilcinnamico f. a 172°

Si preparò tanto in soluzione benzolica quanto in cloroformica, cristallizza dall'alcool nel quale come gli altri eteri è più solubile a caldo, in begli aghi sericei f. a 130°.

Da gr. 0,2353 di sost. gr. 0,7252 di CO_2 e gr. 0,1289 di H_2O

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{11}O \cdot OC_7H_7$
C =	84,05	84,06
H =	6,08	5.73

Etere timolico dell'acido fenilcinnamico

Come col cresol rapidissima è la combinazione degli acidi con il timol per azione dell'anidride fosforica. Questo etere fu preparato in soluzione cloroformica. Il residuo della distillazione, opportunamente lavato con acqua bollente, che tra-

scina in parte meccanicamente l'eccesso di timol fuso, cristallizza dall'alcool in bellissimi aghi setosi con splendore sericeo, fonde a 80-81°.

Da gr. 0,1811 di sost. gr. 0,5577 di CO_2 e gr. 0,1164 di H_2O.

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{11}O . C_{10}H_{13}O$
C =	83,98	84,26
H =	7,14	6,75

Eteri resorcinici dell' acido fenilcinnamico

I.

Sull'acido fenilcinnamico e la resorcina, quest'ultima in eccesso, in soluzione toluenica, P_2O_5 determina una reazione abbastanza viva. Già per raffreddamento si separò l'etere, che, distillato il solvente, venne trattato con soluzione diluita di carbonato sodico quasi bollente.

La porzione indisciolta venne cristallizzata dalla benzina, nella quale è assai più solubile a caldo e se ne separa per raffreddamento in abbondanti fiocchetti bianchi simili a bambagia f. a 157-60°. Ma malgrado il suo aspetto uniforme la sostanza non è completamente pura e le combustioni dànno una percentuale in carbonio oscillanti tra 80,13; 81,57; 81,84 mentre per l' etere monosostituito $C_{15}H_{11}O . C_6H_5O_2$ la teoria vuole

$$C = 79,77 \qquad H = 5,06$$

Cristallizzando dall'alcool questi depositi o si sciolgono parzialmente con eliminazione di piccole quantità di sostanza meno solubile, o, pur sciogliendosi completamente, nel caso di depositi più puri, le soluzioni precipitano in un primo tempo aghetti setosi f. a 162°.

Tolta così la parte meno solubile, col riposo di qualche ora, da queste soluzioni si separano lentamente dei cristalli aghiformi vetrosi riuniti a ciuffi f. a 159-60°, che analizzati dettero:

Da gr. 0,1790 gr. 0,5215 di CO_2 e gr. 0,0920 di H_2O.
Da gr. 0,2082 gr. 0,6071 di CO_2 e gr. 0,1033 di H_2O.
Da gr. 0,4288 gr. 1,2467 di CO_2 e gr. 0,1992 di H_2O.

	I	II	III
C =	79,43	79,52	79,29
H =	5,13	5,50	5,16

L' etere brucia male, le combustioni filano, è necessario perciò talvolta una corrente prolungata di O che determina un aumento nei risultati analitici dell' H_2O.

L'etere bollito in soluzione concentrata di carbonato sodico si va mano mano sciogliendo; per addizione di HCl in questa soluzione si ebbe una sostanza che pel suo aspetto, il suo punto di fusione (170) ed i risultati analitici sembra essere acido fenilcinnamico, infatti si ebbe:

Da gr. 0,1171 di sost. gr. 0,3439 di CO_2 e gr. 0,0609 di H_2O.

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{12}O_2$
C =	80,09	80,35
H =	5,69	5,35

Si ripetette la disidratazione dell' acido e del fenol in benzina, la reazione si compie meno bene, ma i prodotti sono gli stessi.

II.

La sostanza meno solubile in alcool, che si accompagna in piccola quantità all'etere monosostituito, non è che l'etere bisostituito. Infatti ho potuto isolarlo eliminando con l'alcool l'etere monosostituito assai più solubile e cristallizzando la parte meno solubile da nuovo alcool, dal quale si separa rapidamente per raffreddamento in finissimi aghetti fondenti a 162°, o si ammassa in granuletti se il deposito si forma con maggior lentezza. Dalla benzina cristalizza in ciuffi di aghetti setosi. Analizzata una porzione cristallizzata dall'alcool in aghetti si ebbe:

Da gr. 0,1555 di sost. gr. 0,4710 di CO_2 gr. 0,0742 di H_2O.

	trovato	calcolato per $(C_{15}H_{11}O)_2C_6H_4O_2$
C =	82,60	82,75
H =	5,30	4,95

E questo l'etere che costituisce il prodotto principale della reazione se l'acido fenilcinnamico si scalda in soluzione toluenica in presenza di P_2O_5, non con un eccesso di resorcina, ma con una quantità corrispondente ad una molecola di resorcina per due di acido. In fatti distillato il toluene e scaldato il residuo con soluzione di carbonato sodico, questo vi rimase in buona parte indisciolto, nè si sciolse in soluzione sodica concentrata e calda. Cristallizzato dall' alcool si ebbe, per raffreddamento, in granellini f. a 162°, che analizzati dettero:

Gr. 0.1509 di sost. gr. 0,4571 di CO_2 e gr. 0,0721 di H_2O.

	trovato
C =	82,51
H =	5,30

Etere pirocatechinico dell' acido fenilcinnamico

Si prepara anche bene in toluene, cristallizzato dalla benzina si deposita in aghetti f. a 169°.

Essendosene fatto un saggio in piccolo l'etere deve essere ristudiato.

Etere idrochinonico dell'acido fenilcinnamico

Il prodotto della reazione, che si compie tanto in benzina che in toluene, ma meglio in quest'ultimo, trattato con soluzione di carbonato sodico, vi si sciolse assai poco. La soluzione sodica, per acidificazione con acido cloridrico, lasciò separare una sostanza, che fondeva verso 160°, che per ora non venne studiata. La parte insolubile in soda cristallizza benissimo dalla benzina in aghetti setosi, f. a 126-27. Brucia benissimo.

Da gr. 0,1267 di sost. gr. 0,3833 di CO_2 e gr. 0,0563 di H_2O

	trovato	calcolato per $(C_{15}H_{11}O)_2C_6H_4O_2$
C =	82,50	82,75
H =	4,93	4.95

La poca solubilità dell'idrochinone fa che la reazione si compie in un eccesso di acido, ecco perchè o esclusivamente o in massima parte si forma il prodctto bisostituito.

Etere pirogallolico dell'acido fenilcinnamico

Come solvente si preferì il toluene, l'etere è assai più solubile in carbonato sodico degli altri finora descritti. Dalla soluzione sodica si separa per acidificazione con HCl una sostanza non ancora analizzata, ma che ha tutte le proprietà dell'acido fenilcinnamico. Infatti cristallizzata dalla benzina si ha in lunghi aghi bianchi f. a 170°.

L'etere purificato con un trattamento di carbonato sodico diluito e leggermente riscaldato, cristallizza dalla benzina in fiocchi di aghi bianchi f. a 159°. analizzatolo si ebbe:

Da gr. 0,2211 di sost. gr. 0,6168 di CO_2 e gr. 0,0967 di H_2O

	trovato	calcolato per $C_{15}H_{11}O \cdot OC_6H_3(OH)_2$
C =	76,08	75,90
H =	4,85	4,81

anche per questo fenol dovrà tentarsi la preparazione dei prodotti bisostituiti e trisostituiti.

In questo stesso laboratorio da altri si completeranno queste ricerche, sperimentando acidi e fenoli differenti, come verrà tra breve pubblicato; io mi occuperò di altre condensazioni con l'anidride fosforica.

Istituto Chimico della R. Università di Napoli.
Giugno 1901.

finito di stampare il dì 16 Ottobre 1901

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SU ALCUNE NUMMULITI DELL'ITALIA MERIDIONALE

MEMORIA

della dott. GIUSEPPINA GENTILE

presentata nell'adunanza del dì 8 Giugno 1901.

Le nummuliti che formano l'oggetto di questo lavoro si conservano nelle collezioni dell'Istituto geologico dell'Università di Napoli.

Trattandosi, in generale, di esemplari inclusi nella roccia, ho fatto del mio meglio per renderli ben visibili a mezzo di molteplici sezioni o per isolarli, eseguendone poi parecchie preparazioni microscopiche. Ho potuto così riscontrare 12 specie e 5 varietà.

Nel quadro che segue è esposto il risultato delle mie osservazioni. Da esso emerge che le Nummuliti esaminate provengono dai piani medio e superiore dell'eocene: il primo rappresentato da calcari brecciati, con prevalenza delle forme *laevigata*, *lucasana* e *perforata*; l'altro dalla nota facies di Flysch (scisti, arenarie, conglomerati, galestri e breccioline nummulitiche), con prevalenza delle *Tchihatcheffi* e *Guettardi*.

E ora compio il dovere, per me assai gradito, di esprimere i sensi della più devota gratitudine al mio ottimo maestro, prof. Francesco Bassani, il quale, oltre all'aver messo a mia disposizione il materiale di studio, mi fu largo d'incoraggiamenti e di consigli.

Istituto geologico dell'Università
Napoli, 1901.

Specie	Piani nei quali le specie indicate si trovano a preferenza	Provenienze
N. garganica Tell.	Bartoniano	Calcare di Manoppello (Chieti)
N. Guettardi d'Arch. et Haime	Paris. e Barton.	Calcare di Agnana (Reggio)
		Calcare di Sassinoro (Benevento)
		Calcare di Ceresole (Potenza)
		Conglomerato del Vallone di Rosa alle falde del Vulture (Potenza)
		Toppo di Falda presso Melfi (Potenza)
		Calcare della Regione Albèrigo, a nord di Viggianello (Potenza)
N. italica Tell.	Parisiano sup.	Calcare di Manoppello
Id. var. japygia Tell.	Parisiano sup.	Calcare di Manoppello
N. laevigata Lam.	Parisiano	Calcare del Gran Sasso d'Italia
		(?) Calcare della Regione Alberigo, a nord di Viggianello
Id. var. scabra Lam.	Parisiano	Calcare del Gran Sasso d'Italia
		Calcare fra Sala e Marsiconuovo (Potenza)
N. Lamarcki d'Arch. et Haime	Parisiano	Calcare del Gran Sasso d'Italia
N. lucasana Defr.(?)	Parisiano sup.	Calcarè di Padula (Salerno)
Id. var. Meneghinii d'A.	Parisiano sup.	Calcare dei dintorni di Sepino (Campobasso)
		Calcare di Sassinoro
N. Molli d'Arch.	Bartoniano	Arenaria dell'isola di Capri
N. perforata d'Orb. var. granulata T.	Parisiano sup.	Calcare dei dintorni di Sepino
		Calcare di Manoppello
Id. var. Renevieri d. l. H.	Parisiano sup.	Conglomerato del Vallone di Rosa
N. striata d'Orb.	Paris. e Barton.	Calcare dei dintorni di Sepino
		Conglomerato del Vallone di Rosa
N. subgarganica Tell.	Bartoniano	Calcare di Manoppello
N. Tchihatcheffi d'A. et H.	Bartoniano	Calcare di Manoppello
N. variolaria Sow.	Bartoniano	Arenaria dell'isola di Capri
		(?) Breccia nummulitica di Mascilimiero nei dintorni di Lagonegro (Potenza)

OPERE CITATE [1]).

I. J. B. Lamarck, *Système des animaux sans vertèbres.* Paris, 1801.

II. J. B. Lamarck, *Monographie* ecc., 1804.

III. J. B. Lamarck, *Suite des mémoires sur les fossiles des environs de Paris* (Annales du Muséum, vol. V, 1804, e vol. VIII, 1806).

IV. A. D'Orbigny, *Annales des sciences naturelles,* vol. VII, 1826.

V. J. Sowerby, *Mineral conchology of Great Britain,* vol. VI, 1829.

VI. E. D'Archiac, *Histoire des progrès de la géologie* (Soc. géol. de France, tome troisième, Paris, 1850).

VII. A. D'Orbigny, *Prodrome de paléontologie stratigraphique,* vol. II, Paris, 1850.

VIII. E. D'Archiac et J. Haime, *Description des animaux fossiles du groupe nummulitique de l'Inde, précédée d'un résumé géologique et d'une « Monographie des Nummulites ».* Paris, 1853.

IX. Ph. De la Harpe, *Étude des Nummulites de la Suisse* (Mém. Soc. pal. suisse, vol. VIII, 1881).

IX bis. L. Baldacci e M. Canavari, *La regione centrale del Gran Sasso d'Italia* (Boll. Com. geol. it., vol. XV, 1884).

X. P. Oppenheim, *Beiträge zur Geologie der Insel Capri und der Halbinsel Sorrent* (Zeitschr. d. deutsch. Ges., Berlin, 1889).

XI. A. Tellini, *Le Nummulitidi della Majella, delle isole Tremiti e del Promontorio garganico* (Boll. Soc. geol. it., vol. IX, Roma, 1890).

XII. A. Tellini, *Le Nummuliti della Majella (Abruzzi) — Appendice alle osservazioni geologiche fatte nel gruppo della Majella da P. Moderni* (Boll. r. Com. geol. d'It., vol. XXII, Roma, 1891).

XIII. M. Cassetti, *Appunti geologici sul Matese* (Boll. Com. geol. d'It., vol. XXIV, Roma, 1893)

XIV. M. Cassetti, *Relazione sui lavori eseguiti nella Valle del Volturno nell'anno 1893* (Boll. Com. geol. d'It., vol. XXV, Roma, 1894).

XV. G. De Lorenzo, *Le montagne mesozoiche di Lagonegro* (Atti r. Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. VI, serie II, 1894).

XVI. L. Baldacci e C. Viola, *Sull'estensione del Trias in Basilicata e sulla tettonica generale dell'Appenino meridionale* (Boll. Com. geol. it., vol. XXV, 1894).

XVII. G. De Lorenzo, *Osservazioni geologiche nell'Appennino della Basilicata meridionale* (Atti Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. VII, serie II, 1895).

XVIII. E. Cortese, *Descrizione geologica della Calabria* (Memorie descrittive Carta geol. d'Italia, vol. IX, Roma, 1895).

XIX. G. De Lorenzo, *Studi di geologia nell'Appennino meridionale* (Atti Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. VIII, serie II, 1896).

XX. G. De Lorenzo, *Reliquie di grandi laghi pleistocenici nell'Italia meridionale* (Atti Acc. sc. fis. e mat. di Napoli, vol. IX, ser. II, 1899).

XXI. G. De Lorenzo, *Studio geologico del Monte Vulture* (Att. Accad. Sc. fis. e mat. di Napoli, vol. X, serie II, 1900).

[1]) Per brevità, le opere comprese in questo elenco sono indicate nel corso del lavoro col solo numero romano.

Genere NUMMULITES Lam.

Nummulites garganica Tell.

Fig. 1.

1890. — Tellini, **XI**, p. 25, tav. XII, fig. 5, e tav. XIV, fig. 4, 5.

Nummulite lenticolare, con orlo sottile e superficie coperta di grosse granulazioni, regolarmente disposte in linee che vanno obliquamente dal centro alla periferia. Grandezza: $\frac{4}{1,5}$; $\frac{5}{2}$ mm.[1]).

Ha una piccola camera centrale (*microsfera*), e vi si contano 7-8 giri di spira regolare, il cui passo va crescendo dal centro all'orlo. La lamina è quasi uguale all'altezza delle logge nei giri centrali, poi diventa più sottile, mantenendosi dapprima superiore alla metà di quell'altezza, finchè nell'ultimo giro ha spessore minore. Le camere sono perciò quasi quadrate al centro, indi assumono forma di rettangoli in cui l'altezza ha preponderanza sulla larghezza.

I setti sono regolari, equidistanti in ciascun giro, ma più fitti alla parte centrale, di ugual sottigliezza dalla base all' apice, quasi diritti e appena un po' inclinati sulla lamina. Ve ne sono: 6 in $\frac{1}{4}$ del quarto giro; 8 in $\frac{1}{4}$ del quinto, e 10 in $\frac{1}{4}$ dell'ottavo giro.

Ho trovato pochi esemplari di *N. garganica* in un calcare di Manoppello (Chieti), che probabilmente fa parte della serie calcarea inferiore (*Parisiano*) dei depositi eocenici della Majella (**XII**).

Nummulites Guettardi d'Arch. et Haime

Fig. 2.

1850. — D'Archiac, **VI**, vol. III, p. 242 [*Nummulina Ramondi*, var. *minor*].
1853. — D'Archiac et Haime, **VIII**, p. 130, tav. VII, fig. 18-19.

Nummulite lentiforme, assai rigonfia al centro, con orlo sottile e superficie ricoperta da filetti settali quasi diritti, che non raggiungono la parte centrale.

Le dimensioni della maggior parte degli esemplari sono espresse da queste frazioni. $\frac{2,5}{1,5}$, $\frac{3}{2}$ mm.

In sezione longitudinale appare nel centro una grande camera (*megasfera*), quasi circolare, con 4-5 giri di spira regolare, a passo crescente verso la periferia. La lamina è sottile, misurando appena $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ dell'altezza delle logge. I setti sono re-

---

[1]) Il numeratore di queste frazioni rappresenta il diametro; il denominatore, lo spessore.

golari, equidistanti, un po' incurvati all'apice, poco inclinati, ingrossati alla base. Se ne contano 5 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro; 6 in $\frac{1}{4}$ del giro successivo. Le camere sono quasi quadrate verso il centro, rettangolari invece negli ultimi due giri, ove la loro altezza è circa il doppio della larghezza.

La sezione trasversa ha forma di elisse rigonfia alla parte centrale, appuntata agli estremi del grande asse, e lascia vedere 4-5 lamine sovrapposte, abbastanza spesse.

Ho riscontrato numerosi esemplari di *N. Guettardi* (fig. 2) nel noto e molto discusso calcare di Agnana, ascritto generalmente all'eocene medio (dov'era già stata citata [**XVIII**, p. 129]), nel calcare di Sassinoro (eocene medio) e in quello di Ponte Ceresole presso Lagopesole, riferito da De Lorenzo al Flysch eocenico superiore della base del Vulture (**XXI**). In tutti e tre questi giacimenti la detta specie è associata a copiosi individui di un'*Alveolina* sp.

Rinvenni alcuni rappresentanti di *N. Guettardi* anche in un masso erratico incluso nei conglomerati pliocenici del Vallone di Rosa sottostanti alle formazioni vulcaniche del Vulture (**XXI**), e in una breccia dei dintorni di Melfi, appartenente all'eocene superiore.

Ho riferito infine a questa specie molti esemplari trovati in un calcare scuro, compatto, di Regione Alberigo a nord di Viggianello (Basilicata), assegnato all'eocene superiore (**XX**).

Nummulites italica Tell.

Fig. 3.

1890. — Tellini, **XI**, p. 32, tav. XII, f. 12-14, e tav. XIV, f. 41.

La forma è lenticolare e misura 13 millimetri di diametro e 4,5 di spessore. Ha orlo sottile e centro poco rigonfio; la superficie è priva di granulazioni, con filetti settali poco distinti.

Sezionata nel senso longitudinale, mostra una microsfera e 14 giri di spira non molto regolare, poichè il passo, che è piccolo alla parte centrale e a quella periferica, va aumentando senza regola nei giri intermedi, ove arriva a misurare il doppio e il triplo dello spessore della lamina.

I setti sono regolari, sottili, incurvati e alquanto inclinati. Si mantengono equidistanti e piuttosto fitti in tutta la spira. Se ne contano: 9 in $\frac{1}{4}$ del settimo giro, 12 in $\frac{1}{4}$ del nono e 14 in $\frac{1}{4}$ del dodicesimo giro. La lamina è sottile e conserva lo stesso spessore dal centro alla periferia: solo per qualche tratto dei giri mediani si assottiglia maggiormente. Le camere appaiono per lo più regolari, quadrate al centro e verso l'orlo, rettangolari invece, con l'altezza che giunge a misurare anche il doppio della larghezza, nei giri intermedi.

Ho riscontrato pochi esemplari di *N. italica* nel già citato calcare di Manoppello.

Var. japygia Tell.

1890. — **Tellini, XI, p. 35, tav. XII, fig. 15, e tav. XIV, fig. 22, 38, 39.**

Nello stesso calcare di Manoppello ho trovato un esemplare simile alla *N. italica*, ma che ne differisce principalmente per essere più piccolo, raggiungendo appena la grandezza di mm. $\frac{8}{4,5}$.

Attribuisco questa forma alla varietà *japygia* della *N. italica*, perchè presenta altri caratteri differenziali, oltre la dimensione minore: è cioè più rigonfia del tipo alla parte centrale, e la sua superficie è coperta di grosse e rade granulazioni, molto ben visibili, specialmente al centro. Ha **12** giri di spira più regolare che nel tipo, lamina più spessa e camere quasi quadrate in tutta la sezione.

Nummulites laevigata Lam.

Fig. 4.

1801. — Lamarck, I, p. 101.
1806. — » III, vol. VIII, tav. 62, fig. 10.

Nummulite a microsfera, delle dimensioni medie di mm. $\frac{11}{4}$, $\frac{13}{6}$. La superficie è coperta da filetti settali ondulati, variamente intrecciati fra loro e visibili specialmente alla periferia. Esaminando alcune forme nelle quali manca qualche tratto delle lamine superficiali, si vedono ben distinte delle minute granulazioni. In certi esemplari l'orlo è piuttosto sottile e la parte centrale molto rigonfia; altre forme invece, che sono quasi discoidali, hanno orlo ottuso e centro poco spesso.

La spira è abbastanza regolare, formata da **14-16** giri, con passo quasi costante in tutti i punti. La lamina è sottile al centro, ove misura appena la metà dell'altezza delle camere; però a mezzo raggio la lamina stessa comincia ad ispessirsi, divenendo uguale e in certi punti maggiore dell'altezza delle logge. Le camere sono quindi rettangolari alla parte centrale, con l'altezza che ha prevalenza sulla larghezza, e si fanno poi quadrate, sebbene non molto regolari, nei giri più esterni.

I setti sono piuttosto fitti in tutta la spira, ma specialmente al centro, ugualmente sottili alla base e all'apice, per lo più equidistanti; quasi diritti e perpendicolari nei giri centrali, vanno però incurvandosi e inclinandosi alquanto rispetto alla lamina, verso la periferia. In media se ne contano: 8 in $\frac{1}{4}$ del quinto giro, 13 in $\frac{1}{4}$ del decimo, e 16 in $\frac{1}{4}$ del quindicesimo.

Ho riscontrato parecchi individui di *N. laevigata* (**fig. 4**) in un calcare del Gran Sasso, bianco, compatto, zeppo di nummuliti, che probabilmente spetta alla parte inferiore di quella serie eocenica (**IX bis, pag. 357**). Mi sembrano appartenere alla stessa specie anche molti esemplari trovati in un calcare scuro, compatto, proveniente dalla già citata Regione Alberigo, a nord di Viggianello ed ascritto dal prof. De Lorenzo all'eocene superiore (**XX**). Però li riferisco con dubbio alla *N. laevigata*, perchè per-

la loro disposizione si presentano tutti in sezione trasversa, anche su piani perpendicolari fra loro, onde i caratteri differenziali della spira mi restano incogniti.

Questa specie era già stata citata nei calcari grigi, compatti, dell'eocene medio della Basilicata meridionale (**XVII**, p. 20; **XIX**, p. 56; **XXI**, p. 21).

Var. scabra (Lam.)

1804. — Lamarck, **II**, p. 107, tav. IV, fig. 9 *b-c*.
1804. — » **III**, vol. V, p. 241, n. 3.

Esemplari di grandezza varia: $\frac{8}{5}, \frac{9}{3,5}, \frac{12}{4}$ mm. Possono essere quindi subglobosi, oppure lenticolari, cioè poco spessi al centro e ad orlo alquanto sottile, e talvolta quasi discoidali. La superficie è coperta di granulazioni, fitte specialmente alla parte centrale, e verso l'orlo si rendono poco visibili i filetti settali assai fini, più o meno ondulati e intrecciati.

In sezione longitudinale la spira mostrasi abbastanza regolare, formata da 10 a 14 giri, a passo quasi costante. La camera centrale (*microsfera*), la lamina, i setti e le logge si comportano press'a poco come nella *N. laevigata*, eccettuate piccole differenze, per le quali però non credo di poterne fare una specie a parte, come fu considerata, oltre che dal Lamarck, da D'Archiac et Haime nella loro classica « *Monographie des Nummulites* ». Mi sembra più giusto di seguire l'opinione del prof. Tellini facendone una varietà della *N. laevigata*, dalla quale si può asserire che differisca soltanto per la presenza delle granulazioni superficiali e per le dimensioni, che sono generalmente più piccole.

Alcuni esemplari di questa varietà furono da me trovati nello stesso calcare del Gran Sasso in cui rinvenni la *N. laevigata*.

Inoltre riferisco alla medesima varietà *scabra* parecchie nummuliti riscontrate in un calcare grigio, compatto, proveniente da una località della Basilicata a S. E. del piano di S. Vito, tra Sala e Marsiconuovo, e descritto da De Lorenzo come eocene medio (**XX**).

Nummulites Lamarcki d'Arch. et Haime

Fig. 5.

1853. — D'Archiac et Haime, **VIII**, p. 109, pl. IV, f. 14-16.

Forma lenticolare, poco rigonfia al centro, con orlo piuttosto sottile e superficie coperta di granulazioni ben visibili alla parte centrale. Gli esemplari di questa specie sono piccolissimi, raggiungendo appena le dimensioni $\frac{2}{1}, \frac{3}{1,5}$.

In sezione longitudinale vedesi nel mezzo una grande camera, la quale nel diametro maggiore misura quasi mezzo millimetro di larghezza, e la prima loggia della serie è semilunare e ampia in quasi tutti gli esemplari. La spira è formata da **3-4** giri abbastanza regolari, con passo decrescente solo all'ultimo giro. I setti sono

quasi equidistanti fra loro, ben incurvati e inclinati, non molto sottili tanto alla base quanto all' apice. Se ne possano contare: 4 in $\frac{1}{4}$ del secondo giro, 6 in $\frac{1}{4}$ del terzo, e 8 in $\frac{1}{4}$ del quarto giro.

La lamina conserva un eguale spessore in tutta la spira, e mentre nei giri centrali misura la metà circa dell'altezza delle logge, nell' ultimo giro invece, per il diminuire del passo, è uguale a quell'altezza. Le camere sono regolari, in forma di rettangoli nei primi tre giri, con l'altezza che prevale sulla larghezza, quadrate invece alla periferia.

Ho riscontrato alcuni esemplari di *N. Lamarcki*, molto ben conservati e riconoscibili, nel precitato calcare del Gran Sasso d'Italia.

Nummulites lucasana Defr. (?)

1850. — D'Archiac, VI, vol. III, p. 238 [*Nummulina lucasana* Defr., ms.].
1853. — D'Archiac et Haime, VIII, p. 124, tav. VII, fig. 5-12.

Riferisco alla *N. lucasana* parecchie forme che trovansi in un calcare bianco di Padula (Salerno), adoperato come pietra da scalpellare e riferito all' eocene medio (XVI e XX). Gli esemplari sono però così poco distinti, che mi fanno restare in dubbio sulla loro determinazione specifica, e se li ascrivo alla *lucasana*, lo faccio tenendo conto delle dimensioni, dell'aspetto della sezione trasversa e di una grande camera centrale, nettamente visibile.

Var. Meneghinii d'Arch. et Haime

Fig. 6.

1853. — D'Archiac et Haime, VIII, p. 120, tav. V, fig. 7 *a-c*.

Gli esemplari che riferisco a questa varietà hanno dimensioni assai variabili, ma più comuni vi ho notate le seguenti: $\frac{7}{3}$; $\frac{6,5}{2}$; $\frac{5,5}{2,5}$; $\frac{4}{2}$ mm.

Hanno forma lenticolare, più o meno rigonfia al centro, con orlo piuttosto ottuso, superficie coperta di strie raggianti sino all'orlo, e di granulazioni grosse e rade alla parte centrale, visibilissime ad occhio nudo, specialmente sulla penultima lamina.

Sezionate longitudinalmente, queste nummuliti mostrano una camera centrale circolare (*megasfera*), la quale misura mezzo millimetro di diametro in quelle di media grandezza, e 6-8 giri di spira abbastanza regolare, a passo costante o un po' più piccolo all'orlo. Le camere sono piuttosto irregolari, quasi quadrate al centro, e divengono più larghe che alte nei giri successivi, per l'ingrossarsi della lamina. Questa nei primi giri ha spessore uguale all'altezza delle logge, e verso la periferia la supera. I setti sono per lo più equidistanti, radi, ricurvi, ben inclinati e piuttosto sottili. Per lo più si trovano in numero di 6 in $\frac{1}{4}$ del quarto giro e di 8 in $\frac{1}{4}$ del sesto.

In sezione trasversa si ha un'elisse rigonfia, con estremi non molto acuti, poichè gli assi stanno come 3 a 2. Inoltre è nettamente visibile la camera centrale e, sovrapposti ad essa, di solito, 7 giri di lamina.

Ho riscontrato parecchi esemplari di *N. lucasana* nel calcare scuro alla Sorgente di Campitello presso Sepino (fig. 6), e li ho riferiti alla varietà *Meneghinii* perchè hanno la lamina molto più spessa del tipo e della varietà *granulata* Tell.; di più le granulazioni superficiali non sono così fitte ed estese da farli attribuire a quest'ultima. Però ho trovato queste forme associate nel detto calcare con la *N. perforata* var. *granulata*, mentre di solito accompagnano la var. *Renevieri* della *N. perforata*.

Alcuni esemplari di *N. lucasana* var. *Meneghinii* furono da me riconosciuti anche nel calcare di Sassinoro (eocene medio) [1]), dove furono raccolti, al pari dei precedenti, dal prof. Bassani.

Nummulites Molli d'Arch.

Fig. 7.

1850. — D'Archiac, **VI**, vol. III, p. 239.
1853. — D'Archiac et Haime, **VIII**, p. 102, tav. IV, f. 13 *a-c*.

Nummulite lenticolare, poco rigonfia al centro, con orlo sottile e superficie ricoperta interamente da numerose granulazioni. Grandezza media: $\frac{5}{2}$.

In sezione longitudinale si osserva una grande camera centrale, circolare, che supera il mezzo millimetro di diametro, e 8-9 giri di spira regolare, a passo quasi costante. La lamina, sottilissima nel primo giro, ispessisce rapidamente sino a superare la metà dell'altezza delle logge, conservando tale grossezza per tutta la spira, eccettuati gli ultimi giri, nei quali mostrasi di nuovo ridotta.

I setti sono piuttosto equidistanti, poco curvi e quasi perpendicolari rispetto alla lamina. Sono abbastanza fitti in tutti i giri e ugualmente sottili dalla base all'apice. Ve ne sono 5 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro, 7 in $\frac{1}{4}$ dei settimo giro, e 8 in $\frac{1}{4}$ dell'ottavo. Le camere, più alte che larghe alla parte centrale, diventano quadrate, per l'ispessirsi della lamina, nei giri intermedi, e alla periferia la larghezza prevale un poco sull'altezza.

Ho riscontrato alcuni esemplari di *N. Molli* nell'arenaria (macigno) dell'isola di Capri, ascritta all'eocene superiore (**X**).

---

[1]) La *N. lucasana* era già stata citata nei calcari eocenici di Sepino, Sassinoro e Morcone (**XIII**, p. 340; **XIV**, p. 272).

Nummulites perforata d'Orb.

1826. — D'Orbigny, **IV**, vol. VII, p. 129 [*Nummulina perforata*].
1853. — D'Archiac et Haime, **VIII**, p. 115, tav. VI, fig. 1-12.

Var. **granulata** Tell.

Fig. 8.

1890. — Tellini, **XI**, pag. 23, tav. XII. fig. 2-3; tav. XIV, fig. 42-43.

Forma lenticolare, con orlo ottuso e centro molto rigonfio; superficie ricoperta di grosse e rade granulazioni, ben visibili tra i filetti settali raggiati. Dimensioni: $\frac{12}{6}$, $\frac{14}{7}$.

Nella sezione longitudinale si osserva una piccola camera centrale (*microsfera*), ma poco distinta, come anche non sono ben netti i giri che l'attorniano. Si possono tuttavia contare da 12-14 giri di spira non molto regolare, con passo dapprima costante e che va impiccolendosi lentamente solo alla periferia.

Le camere sono irregolari in certi esemplari, abbastanza regolari in altri, più larghe che alte, specialmente verso l'orlo, pur essendo quasi quadrate nei giri centrali. La lamina è inegualmente ingrossata non solo nei diversi giri, ma anche in vari punti dello stesso giro di spira. Il suo spessore, che al centro è uguale all'altezza delle logge, va sempre più aumentando, finchè verso l'orlo supera di molto quell'altezza.

I setti sono radi, sottili, inclinati e ricurvi irregolarmente, inequidistanti in tutta la spira, più fitti al centro. Ve ne sono 6 in $\frac{1}{4}$ del sesto giro; 9 in $\frac{1}{4}$ dell'ottavo; 11 in $\frac{1}{4}$ del decimo.

La sezione trasversa mostra un'elisse rigonfia, i cui assi stanno come 4 a 2. Vi si contano 10-12 giri di lamina, regolarmente sovrapposti.

Ho riconosciuto molti esemplari di questa varietà (fig. 8) raccolti dal prof. Bassani nel calcare scuro di Campitello presso Sepino (eocene medio), dove la *N. perforata* era già stata citata (**XIII**, p. 340; **XIV**, p. 272). Alcuni ne ho rinvenuti anche nel predetto calcare di Manoppello.

Var. **Renevieri** de la Harpe

Fig. 9.

1881. — De la Harpe, **IX**, p. 132 e 134, tav. III, fig. 8-14.

Ascrivo a questa varietà della *N. perforata* moltissimi esemplari che trovansi in un incluso nei conglomerati del Vallone di Rosa al m. Vulture, poichè in queste forme i giri non sono ravvicinati alla periferia, come lo sono sempre nel tipo, e perchè la spira è abbastanza allargata.

Questi stessi esemplari differiscono poi da quelli riscontrati a Sepino e a Manoppello, perchè non presentano alla loro superficie traccia alcuna di granulazioni, ma solo filetti settali, diritti od ondulati, sempre ben visibili.

Nummulites striata d'Orb.

Fig. 10.

1850. — D'Orbigny, **VII**, vol. II, p. 406 (pars).
1853. — D'Archiac et Haime, **VIII**, p. 135, tav. VIII, fig. 9-14.

Nummulite lentiforme, poco rigonfia al centro, con orlo sottile e superficie ricoperta di strie diritte, molto marcate, raggianti dal centro all'orlo. Le dimensioni di queste forme variano da $\frac{4}{1,5}$ a $\frac{3,5}{2}$.

In sezione longitudinale si vede al centro una camera circolare, non molto grande, ma però benissimo distinta, e 6-7 giri di spira assai regolare, che la circondano con passo costante. La lamina ha uno spessore che è uguale alla metà circa dell'altezza delle logge, e si conserva di tale grossezza in tutti i giri. I setti sono regolari, equidistanti, poco incurvati e poco inclinati, ugualmente sottili dalla base all'apice. Ne ho contati in media: 5 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro, 8 in $\frac{1}{4}$ del quinto giro, 9 in $\frac{1}{4}$ del sesto giro. Le camere sono rettangolari, e la loro altezza misura una volta e mezzo la larghezza, mantenendosi in queste proporzioni dal centro alla periferia.

La sezione trasversa appare in forma di elisse allungata, con estremi appuntati, e i due assi stanno come 4 a 1,5 o come 4 a 2. Vi si vedono 6-7 giri di lamina sovrapposti l'uno all'altro in modo assai regolare.

Ho riscontrato i rappresentanti di questa specie nel calcare chiaro di Sepino (fig. 10), raccolti dal prof. Bassani, e di Sassinoro, dov'era già stata citata (**XIII**, pag. 339 e **XIV**, p. 272).

Ho ascritto alla *N. striata* pochi esemplari trovati in un incluso nei conglomerati del Vallone di Rosa al m. Vulture, e sebbene queste forme presentino un numero minore di giri spirali, pure ho creduto bene di riferirle alla detta specie per la regolarità e i caratteri che presentano i giri stessi, e per i filetti settali diritti, raggianti e visibilissimi alla superficie esterna.

Nummulites subgarganica Tell.

Fig. 11.

1890. — Tellini, **XI**, p. 26, tav. XII, fig. 10-11; tav. XIV, fig. 1-3.

Forma a megasfera, con 5-6 giri di spira regolare, con passo più piccolo al centro, che va crescendo continuamente sino alla periferia. La lamina è molto ingrossata nei giri centrali, tanto che il suo spessore supera l'altezza delle camere; nei giri esterni invece la lamina è più sottile di quell'altezza medesima. La camera

centrale è piuttosto piccola; le logge dei primi giri sono quadrate, quelle verso la periferia sono un po' più alte che larghe. I setti sono abbastanza fitti, regolarissimi, equidistanti, quasi diritti e impiantati perpendicolarmente sulla lamina. Ne ho contati in media: 6 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro e 7 in $\frac{1}{4}$ del quarto giro. Questa specie ha piccolissime dimensioni: il suo spessore è indeterminato, mentre il diametro non supera i 3 millimetri. Ne ho riscontrati parecchi rappresentanti nel citato calcare di Manoppello.

Nummulites Tchihatcheffi d'Arch. et Haime

Fig. 12.

1853. — D'Archiac et Haime, p. 98, pl. I, fig. 9 *a-e.*

Ho riscontrato varii esemplari di questa specie nel predetto calcare di Manoppello, la maggior parte sezionati naturalmente nel senso longitudinale, e riconoscibili con facilità pei loro caratteri distintivi. La grandezza media è espressa da $\frac{7}{3,5}$. In alcune forme intiere ho potuto osservare la superficie liscia, coperta da strie sottilissime e assai fitte, raggianti dal centro alla periferia. L'orlo è piuttosto sottile.

Hanno spira quasi regolare, formata da 4-5 giri a passo costante negl'intermedi, e un po' più piccolo nel primo e nell' ultimo giro. La camera centrale è grande, misurando circa un millimetro di diametro. Le altre camere sono piuttosto regolari, con l'altezza che misura il doppio circa della larghezza, meno nell'ultimo giro in cui sono quadrate. La lamina è regolare, spessa circa la metà dell'altezza delle logge, solo un po' più sottile alla periferia.

I setti sono abbastanza fitti, assottigliati all'apice, assai ricurvi e inclinati, non tutti equidistanti fra loro. Ve ne sono 7 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro e 9 in $\frac{1}{4}$ del giro successivo.

Questa specie fu già trovata con molta frequenza in varie località della Majella, nei calcari bianchi dell'eocene superiore (**VIII**, p. 98; **XI**, p. 14; **XII**, p. 7).

Nummulites variolaria Sow.

Fig. 13.

1829. — Sowerby, **V**, vol. VI, p. 76, tav. 538 *a*, fig. 3 [*Nummularia variolaria*].

Le dimensioni degli esemplari di questa specie che ho esaminati sono assai variabili, ma sempre piccole: $\frac{4}{2}$, $\frac{3}{1,5}$, $\frac{2,5}{1,5}$ mm. La parte centrale è più o meno rigonfia, l'orlo sottile e la superficie ricoperta da filetti settali raggianti dal centro alla periferia, nettamente visibili.

Nella sezione longitudinale di queste forme ho osservato una piccola camera centrale, ma ben distinta, circondata da 4-5 giri di spira regolare, con passo quasi sempre costante. La lamina conserva in tutti i punti il medesimo spessore, che è un po' più piccolo dell'altezza delle logge, e in certi esemplari misura anche la

metà, o meno, di quell'altezza. I setti sono quasi equidistanti, solo più fitti alla parte centrale; son poco curvati e poco inclinati, egualmente sottili alla base e al-l'apice. Nell'ultimo giro si mostrano però più ricurvi e ad angolo più acuto rispetto alla lamina. Se ne contano: 6 in $\frac{1}{4}$ del terzo giro; 7 in $\frac{1}{4}$ del quarto. Le camere sono regolari e quasi quadrate in tutta la spira, ma nelle forme a lamina sottile sono rettangolari, e circa il doppio più alte che larghe. Questi esemplari a lamina più sottile e con setti più curvi e maggiormente inclinati si avvicinano molto alla *N. subdiscorbina* de la H., della quale hanno anche le dimensioni: $\frac{2,5}{1,3}$.

Ho trovata ben rappresentata la *N. variolaria* (fig. 13) nell'arenaria (macigno) di Capri (eoc. sup.); dov' era già stata citata dal dott. Oppenheim (**X**, p. 464). Riferisco a questa specie anche molti esemplari rinvenuti nei calcari dell'eocene superiore di Lagonegro (Basilicata) e precisamente alla confluenza del torrente Vajeto col fiume Serra, nella valle di Petinachiana e in quella di Mascilimiero (**XV**, p. 73). Però non sono certa di questa determinazione, perchè gli esemplari stessi sono parte mal conservati e parte si presentano solo in sezione trasversale.

finita di stampare il dì 11 Luglio 1901

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Figura 1. *N. garganica* Tell. $(\frac{8}{1})$ — Calcare di Manoppello.

» 2. *N. Guettardi* d'Arch. et H. $(\frac{8}{1})$ — Calc. di Agnana: *a)* sez. long.; *b)* sez. trasversa.

» 3. *N. italica* Tell. $(\frac{3}{1})$ — Calcare di Manoppello.

» 4. *N. laevigata* Lam. $(\frac{3}{1})$ — Calcare del Gran Sasso d'Italia.

» 5. *N. Lamarcki* d'Arch, et H. $(\frac{8}{1})$ — Calcare del Gran Sasso d'Italia.

» 6. *N. lucasana* Defr., var. *Meneghinii* d'Arch. et H. $(\frac{6}{1})$ — Calcare di Sepino: *a)* sez. long.; *b)* sez. trasv.

» 7. *N. Molli* d'Arch. $(\frac{6}{1})$ — Arenaria di Capri.

» 8. *N. perforata* d'Orb., var. *granulata* Tell. $(\frac{4}{1})$ — Calcare di Sepino, presso la Sorgente di Campitello: *a)* sez. long.; *b)* sez. trasversa.

» 9. *N. perforata* d'Orb., var. *Renevieri* de la H. $(\frac{6}{1})$ — Congl. Vallone di Rosa.

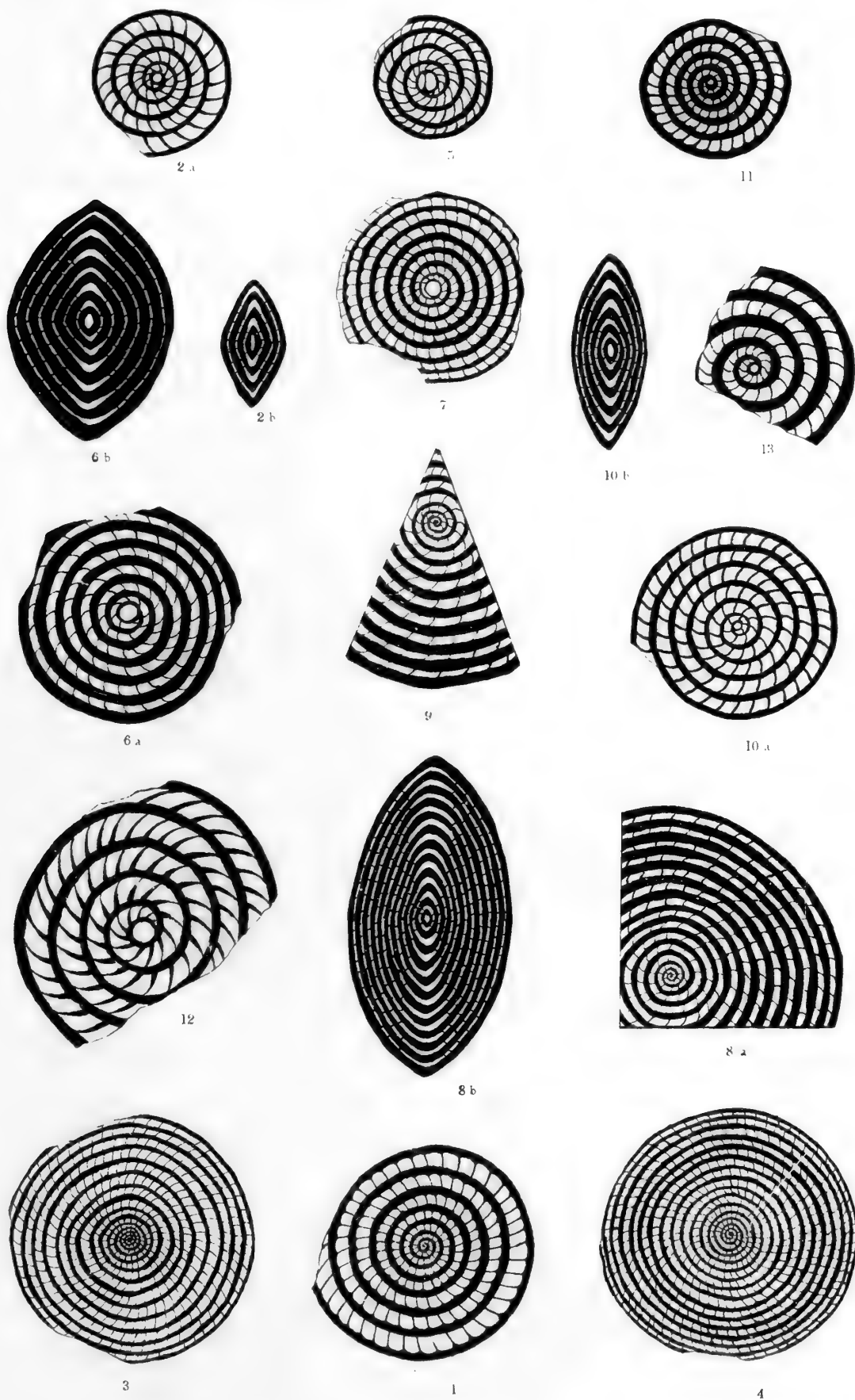
» 10. *N. striata* d'Orb. $(\frac{8}{1})$ — Calc. di Sepino: *a)* sez. long.; *b)* sez. trasversa.

» 11. *N. subgarganica* Tell. $(\frac{8}{1})$ — Calcare di Manoppello.

» 12. *N. Tchihatcheffi* d'Arch. et H. $(\frac{6}{1})$ — Calcare di Manoppello.

» 13. *N. variolaria* Sow. $(\frac{8}{1})$ — Arenaria di Capri.

G. GENTILE DIS.

ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO MILANO

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DI UN TENIOIDE DELL'ALAUDA ARVENSIS
CON RIGUARDO SPECIALE AD UN ORGANO PARAUTERINO

MEMORIA

del dottor ATTILIO CERRUTI

presentata nell'adunanza del dì 6 Luglio 1901.

Undici anni fa, il compianto prof. Crety, descrivendo alcuni tenioidi nuovi delle coturnici, segnalava in uno d'essi (*Taenia nigropunctata*) la presenza di un organo singolare, come un « tubo contorto », che, partendo dal punto ove si uniscono i due lobi formanti l'utero in ogni proglottide, si dirige verso la parte anteriore della stessa.

Il diligente autore, circa la struttura del nuovo organo, si esprime così: « Con lo stesso [forte] ingrandimento, osservando una sezione trasversa, condotta nel mezzo della proglottide matura, si osserva che il tubo contorto è un cilindro, ed è formato da numerosi filamenti, che si colorano intensamente, i quali dalla periferia si portano verso il centro obliquamente ».

L'A. non dà altri particolari al riguardo, riserbandosi di descrivere più tardi lo sviluppo successivo e completo dell'organo e la sua funzione. Sventuratamente la morte sopravvenuta poco dopo non gli permise di mantenere la promessa.

Tre anni dopo lo Stiles, in una memoria pubblicata insieme ad Hassall, indicava e figurava anch'egli, in una tenia poco studiata (*Stilesia globipunctata*, parassita delle pecore), aderente a ciascuno dei due uteri contenuti in ogni proglottide, un organo particolare, avente presso a poco la forma di un cono, con la punta larga e rotondeggiante, e formato, notisi, da numerosissimi filamenti molto sottili.

L'A. però, per la mancanza di strobili completi, accenna solo alla presenza dell'organo ed a qualche particolare.

Era quest'organo descritto dallo Stiles, nella tenia di mammifero, omologo a quello che il Crety descriveva e figurava in una tenia d'uccello?

Se noi consideriamo la posizione relativa dell'organo e insieme la struttura filamentosa indicata dall'uno e dall'altro autore, la conclusione dell'omologia non può essere contrastata. Ad ogni modo, pare che lo Stiles non abbia ricordati i dati

di Crety, perchè non discute, nè ricorda l'omologia, neppure nel suo lavoro pubblicato nel 1896, sebbene riporti in questo un sunto della memoria del Crety e le figure relative.

Però nel 1898, in un'altra memoria pubblicata pure insieme all'Hassall, lo Stiles scrive della *Stilesia globipunctata*: « two lateral cornucopia-like egg pouches are present in each segment ». Senza alcun dubbio i due: « cornucopia-like egg pouches » della *Stilesia* sono organi di quel genere. Il Ransom, profittando del citato lavoro dello Stiles e dell'Hassall (1896), ha richiamato in onore l'osservazione del Crety, del quale però non ha potuto esaminare la memoria originale.

Il Ransom, studiando un nuovo cestode (parassita del tacchino), *Metroliasthes lucida*, ha trovato in esso un organo avente pure la forma di un cono a larga punta, e fatto da numerosi filamenti; ed ha potuto convincersi che le uova contenute dapprima nell'utero, penetrano poi a piccoli gruppi nell'interno dell'organo che si muta infine in una capsula uterina.

Infine un cenno riguardo all' organo di cui mi occupo dà il Dr. Fuhrmann (1901) in uno degli ultimi numeri del *Zoologischer Anzeiger*. Si tratta della descrizione sommaria, preventiva, d'un nuovo genere di Tenia, questa volta anche di uccelli, genere a cui il Fuhrmann dà il nome di *Amerina*. Nella frase diagnostica del nuovo genere l'A. indica: « eine eigenthümliche Zellmasse, in welche, später, die Eier hineingepresst werden ».

Le specie che il Fuhrmann segna come appartenenti al suo genere, sono state trovate in uccelli americani e sono due: *Amerina longiovata* (*Plegadis guarauna*, *Loxops* sp., *Xanthornus cayanensis*) e *A. inermis* (*Zonotrichia pileata*). L'A. però, mentre dà i caratteri più notevoli del genere, circa alle *nn. spp.* si limita semplicemente ai nomi.

Ho avuta l'occasione di studiare, nella fine dello scorso anno, un interessante tenioide, trovato in allodole (*Alauda arvensis*) catturate a Taranto nell'Ottobre, in cui potei fare delle osservazioni circa l'organo in questione di cui sì poco si conosce. Descriverò anzitutto la specie, la quale per molti caratteri corrisponde appunto al gen. *Amerina*.

I pochi esemplari da me posseduti hanno piccole dimensioni, raggiungendo lo strobilo più grande una lunghezza di appena 65 mm., su di una larghezza massima di mm. 1.5. Le proglottidi ultime sono più strette di quelle della parte mediana dello strobilo.

Lo scolice (fig. 1) è privo di rostello e di uncini, ed è relativamente grosso, largo circa un mm. Le ventose sono rotonde, grosse, e l'animale può protenderle a guisa di tubi aventi una lunghezza pari, o superiore a quella dello scolice.

La musculatura delle ventose (fig. 2) è notevole per il suo forte sviluppo. Delle fibre (fig. 2, *fr*) partono dallo strato circondante ogni ventosa e si dirigono verso la parte anteriore dello scolice, in cui però manca del tutto un rostello.

Allo scolice segue un breve collo. Le proglottidi sono generalmente molto più larghe che lunghe; solo le ultime hanno forma quasi quadrangolare. I pori genitali, posti quasi nel mezzo del margine laterale della progottide, sono irregolarmente alterni.

I vasi escretori più piccoli, larghi 12-16 μ in media, sono più vicini all'asse longitudinale della proglottide che non quelli più grandi, i quali ultimi, larghi 20-24 μ, al margine posteriore d'ogni segmento, sono riuniti da un canale trasverso, che passa accosto all'utero, allorchè questo è sviluppato. Il canale trasverso dà alle volte dei piccoli rami.

Il poro genitale d'ogni proglottide è ben distinto, e vi è un antro genitale sufficientemente profondo. In generale sul rapporto delle glandole genitali io ho riscontrata la topografia accennata dal Fuhrmann nella diagnosi del genere *Amerina*.

L'apparato riproduttore maschile consta di un piccolo numero (4-6) di testicoli (fig. 11, *h*). Essi son posti in fila, come nota il Fuhrmann, nel campo opposto all'ovario. Dal canto mio richiamo l'attenzione sulla rilevante grandezza dei testicoli, che possono giungere, a completo sviluppo, oltre gli 80 μ di diametro.

Il deferente passa in fuori ai canali escretori longitudinali, e forma numerose e circonvolute anse prima di sboccare nella piccola tasca del pene (fig. 11, *k*).

L'ovario (fig. 11, *o*) è molto piccolo, ed ha forma presso a poco ovoide. Negli stadi un po' inoltrati, è tutto irregolarmente diviso in numerose cellette (fig. 8, *o*). Inoltre esso non è posto sull'asse longitudinale della proglottide ma alquanto spostato verso il poro genitale, a breve distanza dal canale escretore più grande.

L'ovidutto, dapprima dilatato ad imbuto, si restringe molto, per poi allargarsi fino ad assumere un diametro di 12 μ prima di mettersi in relazione col ricettacolo seminale.

La vagina, molto stretta, è situata posteriormente alla tasca del pene, e corre parallelamente all'asse trasverso della proglottide, poi si dilata e forma il *receptaculum seminis* piriforme.

Dopo l'incontro col ricettacolo, l'ovidutto prosegue il suo corso, ed a breve distanza dell'utero incontra il vitellodutto.

Il vitellogeno, piccolo e rotondo, ha struttura affine a quella dell'ovario, e si distingue sui tagli, per la presenza di numerosi e piccoli granuli di vitello fortemente colorabili (fig. 11, *d*).

Il vitellodutto, nel punto in cui comunica col vitellogeno, presentasi allargato ad imbuto, come accade pure in altri tenioidi di uccelli.

Vicino allo sbocco del vitellodutto si trovano le glandole del guscio, attorno all'ovidutto (fig. 11, *c*), e sono poco distinte, giacchè si atrofizzano molto presto.

Anche l'ovario del resto si atrofizza rapidamente, ed io sono riuscito solo a vederne le tracce, in proglottidi che seguono ben presto allo scolice.

L'ovidutto, poco dopo l'incontro con le glandole del guscio, si dilata a formare l'utero. Questo è piccolo, sferico, posto lateralmente, vicino al poro genitale nella parte posteriore della proglottide.

Per orientarsi sulla disposizione dell'apparecchio genitale, può servire la fig. 11. In essa si vede come in breve spazio son racchiuse glandole e condotti, con i rapporti indicati, fra cui come ovidutto ascendente e discendente decorrono, presso a poco, paralleli, accosto all'utero.

Ecco ora in riassunto le osservazioni che riguardano il particolare organo che io denominerei per la sua posizione *organo parauterino*, od *organo del Crety*, dal suo scopritore.

Allorquando le uova fecondate cominciano a passare nell'utero, importanti cangiamenti si notano in quest' ultimo.

Vicino al punto ove l'ovidutto discendente sbocca nell'utero, cominciano a notarsi numerosissimi nuclei, che col loro insieme formano un organo coniforme (fig. 8, *op*), con la base aderente all'utero, e con l'asse leggermente inclinato su quello trasverso della proglottide. Negli stadi successivi si nota che il citoplasma aderente ai nuclei prende forma di fuso (fig. 7), e gli assi dei singoli fusi si mantengono quasi paralleli fra loro. Però il citoplasma dei nuclei più lontani dall'utero si modifica più lentamente, così che sul principio i fusi citoplasmatici vicini all'utero sono completi, mentre quelli della parte distale da esso sono in via di formazione.

Esternamente compariscono sui tagli elementi con un piccolo nucleo, apparentemente grandi, vescicolari, assai simili a quelli che Diamare (1893) indica intorno al deferente del *Dipylidium caninum*. Lo stato del materiale non permette che mi pronunzii sulla loro essenza (fig. 7, *eg*).

Man mano che lo sviluppo procede, l'organo cambia forma diventando quasi ellissoidale, perchè la sua punta si allarga e diviene rotondeggiante.

Nelle proglottidi mature poi offre un'altra modificazione. Nella parte più lontana dell' utero comparisce un leggero strozzamento, e la porzione che dal solco viene ad esser circoscritta si ripiega sulla rimanente parte (fig. 4, *op*).

Quando tutto l'organo parauterino si è ben sviluppato, presenta particolare struttura istologica. Il citoplasma circondante i nuclei si è ridotto molto; è divenuto addirittura filiforme, di modo che i nuclei sembrano impigliati fra una massa di sottilissimi fili (fig. 4, *op*).

Questo stadio corrisponde a quello descritto dal Crety [1]) nella *Taenia nigropunctata*. Tutta la massa dei fili è poi circondata da una parete apparentemente lamellosa, e dovuta, forse, ad esterne modificazioni dello stesso blastema formativo (cfr. nota 2ª a pag. 5).

L' utero, nelle proglottidi mature, non è più sferico, ma ha assunta la forma di una lente, o menisco concavo-convesso, con la concavità adagiata sull'organo fibroso parauterino (fig. 6, *op*).

In una sezione trasversa troviamo più tardi le uova incluse in una massa a struttura trabecolare, con sottilissimi fili aggrovigliati, fra i quali apparisce una sostanza omogenea che si colora debolmente (fig. 5, *op*).

Allorchè gli embrioni si sono sviluppati nell'interno delle uova, queste, che hanno un diametro di 27-34 μ, cominciano ad esser spinte nell'organo parauterino per subire ulteriori trasformazioni. Nelle proglottidi da me possedute, non ho potuto trovare una fase di sviluppo più inoltrata di quella disegnata nella fig. 6, nella quale si vede che la massa delle uova è penetrata in parte nell' organo parauterino.

È molto probabile però che lo sviluppo ulteriore della tenia da me trovata proceda come pel *Metroliasthes*, (e ciò avverrà, forse, nelle proglottidi libere) e che quindi l'organo parauterino diventi in totalità capsula uterina come in quello.

Quale è la funzione di tal capsula?

La mia osservazione diretta non mi permette una conclusione sicura, tanto più

[1]) Cfr. Crety, 1890, fig. 1.

che non ho potuto finora esaminare proglottidi libere. Giudicando per analogia con apparecchi di altre tenie, forse non è errato supporre che, emesse le proglottidi con le feci e disfatto il parenchima generale, la capsula possa poi servire come ultimo mezzo di difesa della massa degli embrioni.

Come si è veduto dal cenno storico, ben pochi particolari si possono desumere dalla pubblicazione dello scopritore dell'organo in esame; e, per quanto possiamo giudicare dalle figure del Crety, questi non ha avuto innanzi a sè che uno stadio inoltrato, presso a poco quello da me disegnato nella fig. 6.

Circa ai primi stadi di sviluppo, si resta incerti se il Ransom abbia voluto accennare nella fig. 2, tav. XIII della sua memoria, agli stessi nuclei da me veduti nella tenia delle allodole (fig. 4). Nel testo l'A. si limita a scrivere: «Just anterior to the uterus within a cone-shaped space, the parenchyma becomes spongy, with greatly thickened fibers».

Accenna pure il Ransom a sottili fibre che, proliferando dall'interno del parenchima, penetrano nel corpo parauterino. Nel cestode da me osservato, non si sviluppa così la massa fibrosa.

Crety parla di un tubo contorto, ma non dice se questo è diviso in lobi; tal divisione chiara nella sua specie, e nella *Stilesia globipunctata*, non è accennata dal Ransom pel *Metroliasthes*.

Anche la migrazione delle uova nell'interno della massa parauterina diversamente da quanto è stato notato nel *Metroliasthes*, avviene nella specie dell' *Alauda*. In quest'ultima specie le uova penetrano tutte insieme nell'organo parauterino. Nel *Metroliasthes* si dividono prima in piccoli gruppi, che migrano separatamente nella massa fibrosa ed ogni gruppo d'uova rimane in ultimo avvolto da una capsula formata dalla sostanza fibrillare.

Le specie finora note come fornite di organo parauterino sono: *Taenia nigropunctata*, *Stilesia globipunctata*, *Metroliasthes lucida*, *Amerina longiovata*, *A. inermis*, *Taenia Candelabraria*, *Chapmania tauricollis*. A queste dovrà aggiungersi quella da me descritta, qualora possa esser considerata come specie distinta, ciò che potrà sapersi solo dopo la pubblicazione del lavoro del Fuhrmann [1]).

Spero di poter ritornare, in avvenire, sul valore morfologico dell'organo. In questo senso tuttavia non priva di significazione mi sembra la maniera con la quale io trovo che esso si sviluppa [2]).

---

[1]) Secondo le regole vigenti in sistematica dovrei senz' altro passar su specie di cui son noti soli i nomi, e denominare la mia specie per esempio: *Amerina alaudae*.

Tuttavia, ripeto, riservo un giudizio definitivo dopo ulteriori dati del Fuhrmann.

Voglio qui notare anche che il Fuhrmann nella recente memoria: Bemerkungen über einige neuere Vogelcestoden », sostiene che ogni gruppo importante d'uccelli ha delle specie di tenie che non si trovano in uccelli appartenenti ad altri gruppi. Questo criterio dell'A. oltre all'essere in contraddizione con fatti noti, lo è pure con quanto lo stesso Fuhrmann scrive a proposito d'una delle sue nuove specie, l'*Amerina longiovata*.

Egli infatti descrive tale specie come parassita del *Plegadis guarauna*, e del *Xanthornus cayanensis*. Intanto è a notare che il primo è un ibide, il secondo un passeraceo.

[2]) Il dott. Diamare mi partecipa direttamente l'opinione che questi organi parauterini non sembrano, in essenza, fenomeni nuovi nè isolati, ma che si può ricondurli con la mente al pro-

Molto caratteristica nella tenia da me trovata nelle allodole, è anche la forma dell'embrione. Anzi è appunto per tale strana forma, che m'induco ad assegnare al genere *Amerina* il tenioide descritto.

Furhmann nella diagnosi del genere scrive: «Der Embryo zeigt eine eigenthümliche langsgestreckte Form, so dass einen Nematoden sieht».

Nei primi stadi di sviluppo, l'embrione ha forma simile a quella di tutti gli embrioni di cestodi, più tardi assume la forma allungata e fusiforme disegnata nella fig. 9; più tardi ancora si presenta in forma d'un nematode ed avvolto su di se stesso (fig. 5, *ebr*). La sua larghezza è di circa 4 μ.

La fig. 10, lo rappresenta veduto a forte ingrandimento.

Sono notevoli in esso i grossi nuclei ovali.

Sento ora il dovere di porgere i miei speciali ringraziamenti al Dr. V. Diamare, Coadiutore in questo Gabinetto, pei l'aiuto prestatomi e per la cura con la quale mi ha guidato in questo mio primo lavoro.

Istituto d'Anatomia Comparata della R. Università, diretto dal Prof. A. Della Valle.
Napoli, Giugno 1901.

finita di stampare il dì 31 Agosto 1901

cesso istesso con cui si generano le cosidette *capsule ovariche* o meglio *ovifere* degli altri cestodi. Con ogni probabilità trattasi d'una particolare modalità di quel processo. Nel 1893 (Le funzioni dell'ovario nella Davainea tetragona Molin, Rendiconti della R. Acc. delle Scienze Fisic. e Mat. di Napoli, fasc. 8-12, Dicembre) l'A. fu d'avviso che le capsule ovifere non al parenchima delle proglottidi dovessero riferirsi, ma piuttosto ad ulteriore modificazione d'uno speciale tessuto preesistente, indicando che questo si dovesse ricercare o in un residuo dell'epitelio germinativo o — e ciò gli è sembrato in prosieguo ancor più accettabile — in quel residuo del blastema primitivo il quale trovasi all'intorno di tutto l'apparato genitale. Nel caso attuale si tratta appunto d'un organo il quale sorge come una posteriore differenziazione cellulare, in un senso determinato, all'esterno d'un tratto genitale, a sua volta ultimamente formato, l'utero, la cui funzione esso completa o sostituisce.

Secondo il modo di vedere di Diamare, poichè nulla autorizza a credere che elementi di altra natura e diversamente differenziati (parenchimali) prendano parte alla costruzione di organi futuri, si deve riconoscere piuttosto, ne' casi in questione, semplicemente *una differenza di tempo nello sviluppo di parti proprie dello stesso sistema genitale*, come in complesso accade in questo sistema dei vermi a nastro in cui successivamente sorgono parti quando già iniziata od avvanzata è l'atrofia di precedenti parti.

BIBLIOGRAFIA

1890. Crety C., *Cestodi della Coturnix communis Bonn.* Bollettino dei Musei di Zool. ed Anat. Comp. della R. Università di Torino, vol. V, n. 88.

1893. Diamare V., *Il gen. Dipylidium* Lt. Atti della R. Accad. di Scienze Fisiche e Mat. di Napoli, tav. I-III.

1893. Stiles Ch. and Hassall A., *A revision of the adult cestodes of cattle, sheep, and allied Animals.* Bureau of animal industry. Bull. num. 4, Washington.

1896. Stiles Ch. and Hassall A., *Tapeworms of poultry.* Bureau of animal industry. Bull. num. 12, Washington.

1898. Stiles Ch. and Hassall A., *The inspection of meats for animal parasites.* Bureau of animal industry. Bull. num. 19, Washington.

1900. Ransom B. H., *A new avian cestode: Metroliasthes lucida.* Studies from the Zool. laboratory Lincoln. Nebraska. Transactions American Microscopical Society.

1901. Fuhrmann O. [1]), *Neue Arten und Genera von Vogeltänien.* Vorläufige Mittheilung. Zool. Anz. 13 Mai., N. 643, e 27 Mai 1901, N. 644, p. 320, dove « *Anurina* » è cambiata in « *Amerina* ».

1901. Fuhrmann O. [2]), *Bemerkungen über einige neuere Vogelcestoden.* Centralbl. f. Bakt. u. Parasitenk. XXIX Bd. N. 19.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Scolice e collo. Da preparato in toto. Obb. A, oc. 2. Zeiss.

» 2. Sezione dello scolice; *fle*, fibre muscolari esterne; *fli*, fibre muscolari interne; *fa*, strato muscolare avvolgente la ventosa; *fr*, fibre della parte anteriore dello scolice; *mp*, musculatura propria della ventosa. Obb. A, oc. 2. Zeiss.

» 3. Proglottidi mature. Da preparato in toto. *op*, organo parauterino. Obb. A, oc. 2. Zeiss.

» 4. Corpo parauterino veduto in sezione, per mostrare la struttura fibrillare. Obb. DD, oc. 2. Zeiss.

» 5. Sezione dell'utero, con le uova con embrione nematoidiforme (*ebr*), racchiuse nella massa descritta nel testo. Obb. F, oc. 2. Zeiss.

» 6. Sezione trasversa di proglottidi mature. Il taglio interessa più profondamente le proglottidi anteriori. La massa delle uova è penetrata nell'organo parauterino. Obb. A, oc. 2. Zeiss.

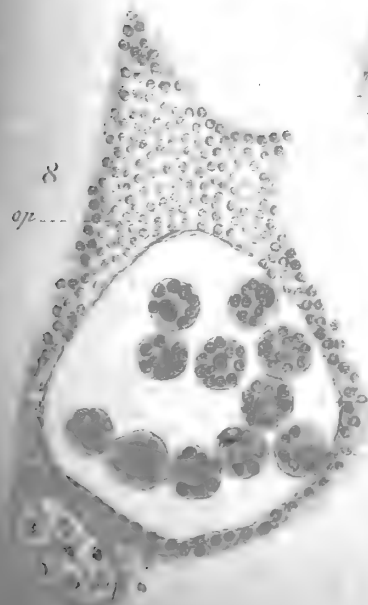
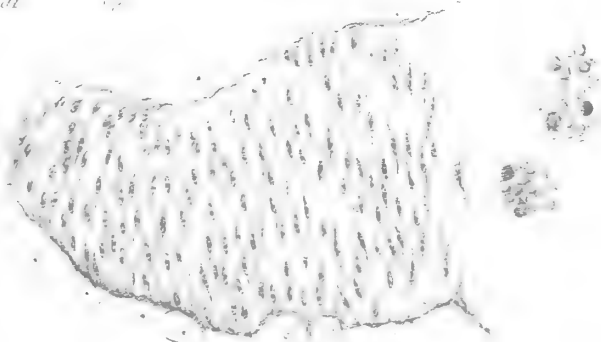
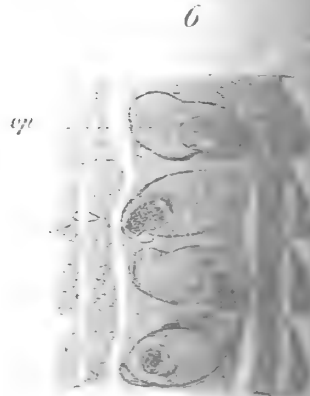
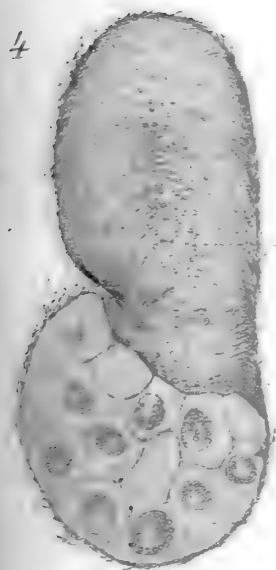
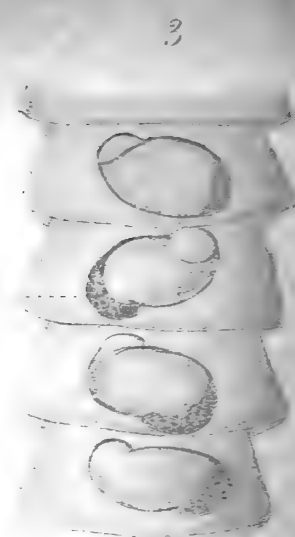
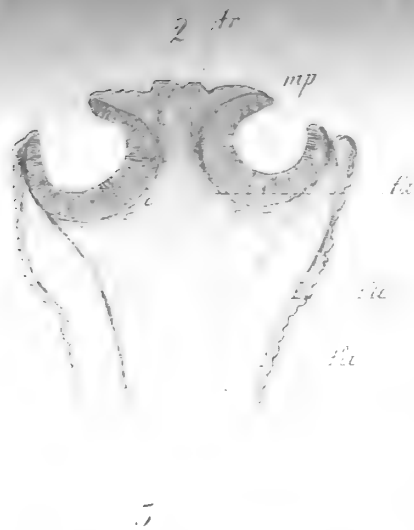
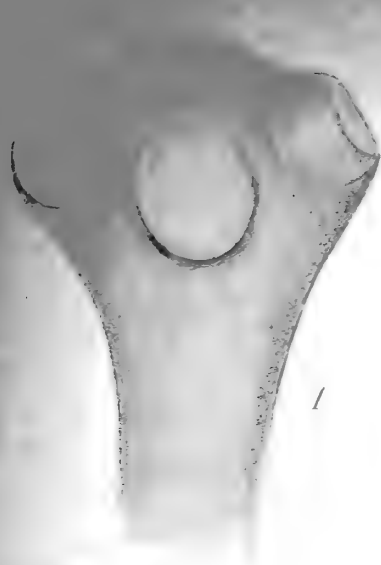
» 7. Il corpo parauterino in uno stadio intermedio fra quello disegnato nella fig. 8, e quello disegnato nella fig. 4. Si notino i fusi citoplasmatici; *eg*, elementi di dubbio significato (cfr. p. 4); *ov*, uova. Obb. F, oc. 2. Zeiss.

» 8. Inizio del corpo parauterino. Obb. F, oc. 2. Zeiss.

» 9. Uovo con embrione in via di sviluppo, Obb. $^{1}/_{12}$. Imm. omog. Oc. 2. Zeiss.

» 10. Uovo con embrione sviluppato. Non è stata disegnata la massa avvolgente l'uovo. Obb. $^{1}/_{12}$. Imm. omog. oc. 2. Zeiss.

» 11. Schema dell'apparecchio riproduttore: *o*, ovario; *b*, ricettacolo seminale; *v*, vagina; *d*, vitellogeno; *c*, glandole del guscio; *ut*, utero; *e*, canale escretore più grande; *f*, canale escretore più piccolo; *g*, canale escretore trasverso; *h*, testicoli; *i*, deferente: *k*, tasca del pene; *op*, corpo parauterino al suo inizio.

Vol. XI, Serie 2.ª N.º 7.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

CONSIDERAZIONI SULL'ORIGINE SUPERFICIALE DEI VULCANI

MEMORIA

di GIUSEPPE DE LORENZO

presentata nell'adunanza del dì 7 Dicembre 1901

« Hinc via Tartarei quae fert Acherontis ad undas »
VIRG. *VI Aen.*

Riassumo in questo scritto brevemente alcune osservazioni e considerazioni, che nel corso degli anni son venuto facendo sui vulcani dell'Italia meridionale, le quali mi pare che convalidino le antiche vedute sulla origine superficiale dei vulcani sparsi per la faccia della terra. Parlando di origine superficiale naturalmente non intendo rievocare il concetto estremamente unilaterale di Buffon, che collocava nel centro o addirittura alla cima dei monti ignivomi la sede del fuoco animatore, ma credo solamente indicare, che gli attuali fenomeni eruttivi sono limitati alla parte superficiale, o corticale, del nostro pianeta, pel quale essi rappresentano i processi e i modi di scambio e di miscela tra la litosfera e l'idro-atmosfera.

In tal modo quindi i vulcani non sono considerati come estrusioni, troppo esigue rispetto alla loro origine, di un'unica massa centrale, incandescente e fluida, ma, conformemente ai risultati dei calcoli astronomici, vengono riguardati come sintomi esteriori e superficiali d'un corpo planetario in via di avanzato consolidamento e raffreddamento e nella sua grande massa interna già quasi del tutto irrigidito. A tale risultato senza sforzo si giunge, se si tiene esatto conto dei mezzi e modi, per cui si esplicano le eruzioni vulcaniche; delle varie forme, che assumono i vulcani; della composizione e struttura, che essi rivelano; della funzione, che rappresentano nell'economia tellurica; e delle analogie, che presentano con altri fenomeni simili e più vistosi, offerti da altri corpi cosmici, i quali, come il sole, non sono pervenuti ancora all'avanzato stadio di consolidazione, cui è giunta la terra. Ciò appunto cercherò di esporre in breve nelle pagine seguenti, servendomi specialmente di esempii tratti dalle nostre contrade vulcaniche.

Diversi tipi di vulcani

Chiunque ha veduto dei vulcani in varî stati di attività, ha potuto facilmente osservare quale e quanta parte nel loro funzionamento esercita il vapor di acqua, accompagnato in misura subordinata da altri gas. Infatti, sia che si veggano le fumarole sprigionarsi dal fondo e dai fianchi d'un cratere allo stato di solfatara; o che si osservino le centinaia di scorie e di bombe, lanciate tra scoppî e schianti dall'estremità di una colonna lavica, nel suo periodo di attività cronica stromboliana e nei parossismi acuti di tipo vulcaniano; o che si esplori « il corso Del temuto bollor, che si riversa Dall'inesausto grembo Su l'arenoso dorso »; o che si assista allo spettacolo di una corrente di lava, che sgorga impetuosa dai fianchi di un vulcano e si stende verso le falde tra grandi nembi di vapore; o che finalmente ci si rappresenti una violenta esplosione di tipo pliniano, come quella del Krakatau: sempre e da per tutto è il vapor d'acqua, che produce questi fenomeni e processi di attività, dai più esigui ai più ingenti. Il magma eruttivo, spogliato dell'acqua e degli altri gas, ossia ridotto a una semplice fusione minerale, sarebbe per sè stesso inerte, non capace di potere cinetico e dinamico maggiore di quello di un qualsiasi metallo semplicemente fuso. Ma come i metalli fusi, giusta quanto Reyer ci ha con buoni argomenti ripetuto, assorbono gas e diventano così capaci di gonfiarsi e sprazzare, similmente il magma dall'acqua assorbita, sia allo stato sferoidale che a quello di vapore, trae la forza di sorgere, di muoversi, d'irrompere, di scoppiare, d'esplodere.

Or dunque l'acqua, essendo il principale elemento attivo delle eruzioni, è anche quello che principalmente determina la struttura, la forma e la funzione dei varî vulcani; l'acqua quindi fornisce la base prima per una naturale classificazione dei diversi tipi di vulcani.

Se facciamo astrazione dalle stufe, dalle sorgenti termali e termominerali, dai vulcani di fango e dai geysirs, in cui l'acqua, allo stato fluido o aeriforme, fuoriesce dalla terra con moderata attività, portando semplicemente sospese o disciolte in sè le sostanze, attraverso cui passa, si può considerare come il primo grado di vera attività vulcanica quello, in cui il vapor d'acqua sotto forte tensione, aprendosi improvvisamente un varco, squarcia il suolo con un'apertura circolare o ellittica, sui cui orli slancia il materiale, attraverso il quale s'è aperto violentemente il passaggio. Viene così a formarsi un *cratere* o *bacino d'esplosione*, un *pit-crater*, un *Maar*: come ce ne sono noti da tutte le regioni vulcaniche.

Naturalmente non avviene quasi mai, che in tali esplosioni il vapor d'acqua lanci in aria solamente il materiale attraverso cui ha fatto irruzione: generalmente esso porta con sè anche il magma, di cui fa intima parte; e questo magma, data la forza di tali esplosioni, esce ordinariamente polverizzato sotto forma di ceneri, sminuzzato in lapilli, frantumato in brecce e soffiato in pomici o in scorie, secondo la maggiore o minore acidità della soluzione fusa originaria. Questo materiale frammentario, accumulandosi in strati quaquaversali intorno alla bocca d'eruzione, secondo le norme dettate dalla sua natura fisica, dalla sua forza

di projezione e dalla legge di gravità, finisce col costituire un cono, retto od obliquo, con ampio e svasato cratere ad imbuto, che è la forma tipica dei *vulcani di tufo* o di altro materiale frammentario, o dei vulcani del tipo dei *puys*.

Ma spesso, dopo che il vapor d' acqua con le sue esplosioni, o anche forse accidenti tettonici con le loro beanti fratture, hanno aperto la via al magma; questo, gonfiandosi e innalzandosi possentemente, invece di esplodere e sminuzzarsi si riversa all'esterno con grandi sbocchi di lava, i quali, a seconda della maggiore o minore vischiosità e fluidità, si accumulano su sè stessi o si espandono su grandi superficie. Nel primo caso si hanno dei coni regolari sul genere di quelli, alti fino a 130 m., formatisi nelle due ultime eruzioni laterali del Vesuvio del 1891 e del 1895; nel secondo invece si formano delle pile quasi orizzontali di estesi banchi lavici l'uno all' altro sovrapposti, come ce n' offre vistosissimo esempio il Dekkan: in tutte due i casi si hanno dei puri *vulcani di lava*.

Generalmente però la maggior parte dei vulcani non sono tutti di lava nè tutti di tufo o di materiale frammentario; ma le eruzioni laviche, alternandosi con le esplosioni di ceneri, di lapilli, di pomici, di brecce, di bombe e di scorie, concorrono con la loro armonica mistione a formare quel tipo classico dei *vulcani compositi*, che ci è così bellamente rappresentato dal Vesuvio, dallo Stromboli e dall' Etna, e che è il più diffuso tra i vulcani oggi sparsi sulla faccia della terra.

Sia or dunque, che trattisi di crateri d' esplosione, o di vulcani di tufo, o di lava, o compositi: in tutt' i casi noi abbiamo già nel materiale, di cui questi vulcani sono formati, un criterio approssimativo, per poter giudicare della relativa profondità, da cui è partito il magma, che ha fatto eruzione. Questo criterio c' è dato appunto dalla qualità e quantità del materiale, attraverso cui il magma stesso s' è aperto il passaggio, per venire alla superficie.

Materiali autogeni e allogeni

In ogni vulcano generalmente vi sono materiali autogeni, costituiti dai prodotti di solidificazione del magma originario e provenienti dalle profondità, in cui il magma stesso giaceva o si formò, e materiali allogeni, rappresentati dalle sostanze estranee, con cui il magma si trovò a contatto nella sua permanenza plutonica, e attraverso cui si aprì il passaggio, per presentarsi all' aperto nello stato vulcanico.

I materiali autogeni, a seconda della varia quantità e tensione dell'acqua in essi contenuta, possono presentarsi nelle diverse forme di solidificazione, clastiche e continue, dianzi accennate: cioè di ceneri, lapilli, brecce, pomici, scorie, blocchi, bombe e lave. Essi possono quindi fare arguire della profondità, da cui provengono, solo mediante la loro composizione chimica e mineralogica, la loro struttura e le possibili relazioni genetiche, che presentano con i terreni, attraverso cui son passati.

Non così i materiali allogeni, i quali, rappresentando quella parte di terreni, che il magma ha attraversato per fare eruzione alla superficie, possono dare un indizio quasi sicuro dalla profondità, da cui il magma stesso proviene. Naturalmente questi materiali allogeni, essendo stati strappati dal magma e dal vapor

d'acqua alla loro matrice infranta e squarciata, non possono trovarsi che nelle forme clastiche di ceneri, lapilli, brecce e blocchi rigettati: intatti, o più o meno metamorfosati dal magma, con cui i più profondi di essi si trovarono a lungo e immediato contatto.

Se fosse possibile calcolare esattamente il materiale allogeno rigettato dai vulcani, si avrebbe una certa misura approssimativa della grandezza del camino, per il quale il magma ha fatto eruzione. Ma ciò non è fattibile, perchè il materiale allogeno si trova di solito intimamente mescolato col materiale autogeno, che lo ha portato alla luce. Anche se ciò fosse possibile, in certi casi tale criterio potrebbe essere fallace. Così, p. es., nei vulcani di lava e nei vulcani compositi, avendo potuto la colonna lavica ascendere da grandi profondità per un lungo e stretto camino (precedentemente creato da anteriori esplosioni o da dislocazioni orogeniche), senza intaccarne le pareti, si avrebbe all'esterno uno scarsissimo. o addirittura nullo, materiale allogeno, pur essendo il cammino percorso dalla lava abbastanza lungo: quindi in tali vulcani bisogna contentarsi di esaminare solamente la qualità, trascurando la quantità, dei blocchi rigettati.

Ben altrimenti avviene nei crateri d'esplosione e nei vulcani di tufo o di materiale frammetario, in cui il vapor d'acqua, facendo improvvisa e rapida esplosione e squarciando il suolo con ampli e svasati crateri, rigetta all'esterno grande quantità del materiale allogeno, attraverso il quale s'è aperto il passaggio. In questi tipi di vulcani dunque si può con una certa speranza di riuscita tentar di calcolare la profondità del camino vulcanico.

Crateri d'esplosione e vulcani di tufo

Nei crateri d'esplosione e nei vulcani di tufo si ha di solito una bocca eruttiva, di forma circolare o ellittica, intorno a cui s'è depositato, in minore o maggiore quantità, il materiale eruttato; in modo da formare, o un sottile orlo rialzato, come nei crateri d'esplosione sul tipo del lago d'Averno, ovvero un regolare cono con apertura craterica imbutiforme, come nei vulcani di tufo sul tipo del Monte Nuovo.

Nel materiale eruttato da questi crateri v'è una miscela intima e irregolare di sostanze autogene e di sostanze allogene, in modo che non è possibile sceverare esattamente le une dalle altre. Se il materiale fosse tutto allogeno, non si avrebbe che a calcolarne il volume complessivo, per poterne poi dedurre (giacchè è nota l'apertura craterica) l'altezza del camino da cui esso proviene: con una certa approssimazione, s'intende. Siccome però il materiale allogeno forma soltanto una parte, non tutto il volume del cono, è chiaro, che la profondità del camino è sempre realmente molto minore di quella, che si ottiene considerando un cono vulcanico di tufo come interamente composto da materiale strappato alla sua base, e calcolando in conseguenza. Con un calcolo di tal genere si ottiene quindi sempre una *profondità massima* del punto, da cui sono provenute le esplosioni, che hanno aperto il cratere e formato il cono vulcanico.

Questo ragionamento riuscirà più chiaro, se si applicherà ad alcuni crateri di esplosione e vulcani di tufo più noti, come quelli dei Campi Flegrei, primo tra essi lo storico e celebre Monte Nuovo.

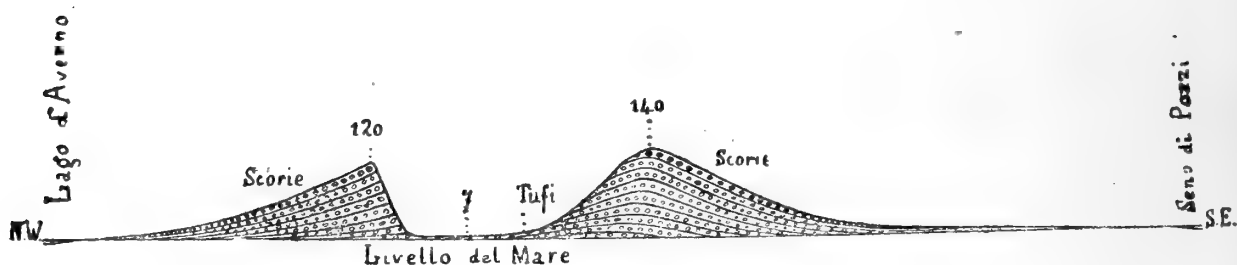
Monte Nuovo

Il Monte Nuovo è un tipico vulcano di tufo e scorie, formatosi per semplice accumulazione di materiale eruttato da una bocca ignivoma. Le descrizioni di Simone Porzio, Marcantonio delli Falconi e Ferrante Imperato, soprattutto la sua forma e costituzione non lasciano alcun dubbio in proposito. Il voler credere a un sollevamento e gonfiamento del suolo, come fu immaginato da Francesco del Nero e dai sostenitori della teoria dei crateri di sollevamento, è una follia, che è già senz'altro immediatamente refutata, secondo fece osservare Scacchi, dalla posizione intatta, verticale, del Tempio d'Apollo, alle falde nord-ovest del cono, e dalla posizione, anch'essa immutata, dell'antico Monticello del Pericolo, oggi La Montagnola (v. fig. 3 dell'annessa tavola), che, come risulta dalla descrizione e dalla figura data da Marcantonio delli Falconi, rimase solo in parte sepellito sotto le falde del Monte Nuovo. Anche Abich del resto, che pure era un sostenitore della teoria del sollevamento, nelle sue *Geologische Beobachtungen über die vulkanischen Erscheinungen und Bildungen in Unter- und Mittel-Italien* (Braunschweig 1841, p. 41) non potè fare a meno di osservare, che il Monte Nuovo entra interamente nella serie dei comuni coni d'eruzione, e che le sue masse chiare e incoerenti non mostrano alcuna traccia dell'influsso secondario di fuoco che si sia solo posteriormente su esse esercitato, ma piuttosto sembrano dire, che le circostanze fisiche, dominanti nell'accumularsi di quel cono d'eruzione, furono molto simili a quelle, sotto il cui influsso debbono essersi originate nei Campi Flegrei molte formazioni analoghe a quelle del Monte Nuovo. A confutazione delle opinioni di von Buch uno splendido capitolo scrisse Lyell, negli aurei suoi *Principles of Geology* (vol. I, p. 607 e seg. dell'edizione del 1872), dando del Monte Nuovo, oltre le figure, prese da Hamilton, una descrizione e una sezione geologica, che rappresentano ancor oggi quanto di meglio si è scritto su quel vulcano.

La descrizione di Lyell infatti corrisponde esattamente alla visione, che può avere del Monte Nuovo chiunque lo ascenda e lo guardi con occhio non turbato da opinioni e teorie preconcette. Già la sola vista della sua forma esteriore (vedi, nell'annessa tavola, fig. 1, vista da Baia; fig. 2, vista dalla Via Herculea), simile a quella d'un grande formicaio lo rivela quale un tipico cono formatosi per accumulazione di materiale eruttato. La sua intima costituzione non fa che convalidare questa idea. Gli strati di tufo e di scorie, che inclinano di circa 20° tutt'attorno alle falde del cono e che nelle pareti est e nord del cratere inclinano anche di 26°-30° verso l'interno, corrispondono con esattezza mirabile alla costruzione ideale di un cono craterico, formatosi per accumulazione di materiale eruttato da una bocca di ejezione in posizione non del tutto normale intorno alla bocca stessa, ma leggermente spostato verso oriente (v. fig. 1) a causa forse dell'obliquità del camino vulcanico, e anche pel vento, che nella notte della massima eruzione soffiava forte da occidente.

Il materiale è costituito da sostanze allogene ed autogene: le prime rappresentate da ceneri, lapilli, frammenti di tufi, di conchiglie e di laterizî, strap-

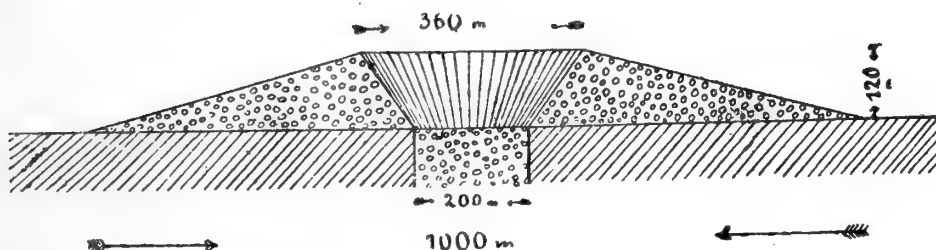
pati al suolo, attraverso cui passò l'eruzione; le seconde da ceneri, lapilli, pomici e scorie, facenti parte del magma originario: le une e le altre fuse a formare strati di tufi, simili a quelli del resto dei Campi Flegrei e in alcuni punti così compatti da rivaleggiare quasi con quelli del vicino Gauro. La parte superficiale del cono è costituita poi da due banchi (separati mediante uno strato di tufo) di grosse e nere scorie trachitiche, o fonolitiche, che rappresentano gli ultimi prodotti di eruzione del piccolo vulcano. Siccome poi dal tempo della sua formazione ad oggi la denudazione del cono, pure essendo stata continua ed efficace, non ne ha ancora alterato essenzialmente le forme, ne deriva, che il cratere si trova oggi press'a poco così come quando si formò, e che il fondo di esso ha press'a

Fig. 1.

Scala 1 : 12.000
Sezione geologica del Monte Nuovo

poco la circonferenza della vera bocca eruttiva originaria, che, come in tutti i crateri d'esplosione, è sempre abbastanza ampia.

Ciò premesso, e aggiunto che i canali formati dalle esplosioni (come è dimostrato dalle esperienze di Daubrée, dai Diatremata adamantiferi dell'Africa australe, dagli embrioni di vulcani della Svevia, descritti da Branco, e specialmente dalle numerose e interessantissime sezioni di antichi vulcani, illustrate da Archibald Geikie nella sua splendida opera su *The ancient volcanoes of Great Britain*, 2 vol., London 1897) hanno di solito forma quasi cilindrica e sezione conforme al fondo dei crateri; se il materiale eruttato dal Monte Nuovo fosse tutto derivato dal sottosuolo, basterebbe calcolarne il volume, per trovare poi subito l'altezza del camino cilindrico esplosivo, e quindi il probabile punto di partenza dell'esplosione, che ha formato il vulcano. Perciò, se noi consideriamo il vulcano come tutto formato da materiale allogeno, e calcoliamo in conseguenza, avremo sempre una profondità maggiore, mai minore, di quella da cui realmente è venuta l'esplosione. Vero è che il camino esplosivo non è rimasto cavo, ma è ripieno di quel medesimo materiale, che forma il cono; ma tale eccesso di volume non fa che compensare ciò che nella composizione del cono manca di materiale allogeno. Ed essendo poi, tanto nel Monte Nuovo che in tutti gli altri vulcani, il materiale allogeno sempre in quantità molto inferiore al materiale autogeno, ne deriva ancora una volta che questo calcolo approssimativo darà sempre un risultato *massimo* per la profondità, da cui probabilmente ha potuto partire l'esplosione.

Cerchiamo ora d'applicare tale calcolo al Monte Nuovo. Questo vulcano, pigliando i valori medî delle misure reali, può considerarsi come un tronco di cono retto a basi circolari, di cui il cerchio di base ha poco più di 1000 m. di diametro, il cerchio superiore circa 360 m. e l'altezza media quasi 120 metri. Questo tronco di cono è reso cavo da un cratere, a forma d'imbuto o di tronco di cono rovescio, di cui la base superiore e l'altezza sono eguali a quelle del tronco di cono solido, cioè rispettivamente di 360 m. e 120 m. ciascuna, e la base inferiore, ossia il fondo del cratere, ha poco meno di 200 m. di diametro. Ora è chiaro, che il volume di tutto il materiale eruttato, costituente la parte solida del Monte Nuovo, è eguale al volume dell'intero tronco di cono meno il volume del tronco di cono

Fig. 2.

Scala 1:12.000
Schema della formazione del Monte Nuovo

rappresentato dal cratere. Chiamando quindi con V il volume della parte solida, con v il volume del cratere cavo e con W il volume complessivo di entrambi, ci ha che

$$V = W - v \ ;$$

e, indicando con a l'altezza comune, con R il raggio della base del cono, con r il raggie all'orlo superiore del cratere e con r_1 il raggio del fondo del cratere stesso, siccome sappiamo, che

$$W = \frac{\pi a}{3}(R^2 + Rr + r^2) \quad \text{e} \quad v = \frac{\pi a}{3}(r^2 + rr_1 + r_1^2)$$

ne risulta, che

$$V = \frac{\pi a}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \frac{\pi a}{3}(r^2 + rr_1 + r_1^2) \ ,$$

ossia

$$V = \frac{\pi a}{3}(R^2 + Rr - rr_1 - r_1^2) \, .$$

Qui innanzi abbiamo però detto, che

$$R = 500 \text{ m.}$$
$$r = 180 \text{ m.}$$
$$r_1 = 100 \text{ m.}$$
$$a = 120 \text{ m.}$$

sostituendo quindi nella formula tali valori, si ha:

$$V = 39.187.200 \text{ m.c.}$$

Supponendo ora che tale quantità di materiale sia stata tutta asportata dal camino cilindrico, attraverso cui il magma ha fatto esplosione, siccome già conosciamo la base di tale cilindro, rappresentata dal fondo del cratere, è facile calcolare l'altezza del cilindro stesso, mediante la formula

$$V = \pi r_1^2 x, \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{V}{\pi r_1^2}$$

in cui V è già dato dal volume del materiale costituente il cono del Monte Nuovo, $r_1 = 100 =$ raggio del fondo del cratere e x è l'altezza ignota del cilindro. Sostituendo questi valori nella formula, si ha:

$$x = 1248 .$$

Ossia la profondità massima, da cui sarebbe partita l'esplosione, che ha dato origine al Monte Nuovo, sarebbe di 1248 m. al disotto della superficie di base del cono.

La profondità ottenuta con questo calcolo potrebbe però forse anche essere superiore alla realtà, perchè, come s'è già detto innanzi e come risulterà più appresso da ulteriori considerazioni, non solo il materiale allogeno è in quantità molto minore di quella già calcolata, ma esso anche per la sua qualità offre degli argomenti, per dimostrare che molte esplosioni vulcaniche partono in generale da poca profondità al disotto del suolo.

Se si applica questo stesso calcolo agli altri vulcani di tufo dei Campi Flegrei, come Nisida, il Gauro, Vivara, gli Astroni etc., si hanno come profondità *massime* dei punti di partenza delle loro esplosioni dei risultati, che oscillano sempre da meno di 1000 fino a poco più di 2500 metri: il che va perfettamente d'accordo con la conclusione, a cui, come ora vedremo, si arriva per altra via, considerando, non più la quantità, ma la qualità del materiale allogeno eruttato. — Infatti tra i blocchi rigettati da questi vulcani di tufo dei Campi Flegrei non si riscontrano mai, o quasi mai, frammenti della base sedimentaria più profonda, ma solo blocchi dei terreni eruttivi sottogiacenti, i quali non possono avere molto più di poche centinaia di metri di spessore.— Ma di ciò avremo occasione di occuparci qui appresso, parlando dell'origine degli altri tipi di vulcani: per ora debbo ricordare, che a simili conclusioni sulla superficialità delle esplosioni vulcaniche giunse già da tempo Rozet (*Mémoire sur les volcans de l'Auvergne*, Mém. soc. géol. France, 1844) nei suoi studii sui vulcani dell'Alvernia, e che Chaper ha calcolato a 300 m. la profondità massima dei Diatremata adamentiferi della formazione dei Karoo nell'Africa australe.

Vulcani di lava e vulcani compositi

Le considerazioni fatte nel precedente paragrafo sono del tutto inapplicabili ai vulcani di lava e ai compositi, perchè in questi, come più innanzi si è detto, delle correnti di lava possono anche provenire da remote profondità attraverso uno stretto e lunghissimo camino, senza aver quasi intaccato le pareti di esso. In tali casi quindi non si può tenere conto, che della qualità del materiale allogeno trasportato in alto dal magma eruttivo, cercando di dedurre da essa la profondità dei terreni attraverso cui il magma stesso si è aperta la via.

I vulcani compositi e i vulcani di lava a volte però danno luogo a formazioni così ingenti e maestose, che sembra difficile poter scompagnare da essi l'idea di una grande profondità d'origine. Esempio vistoso di ciò ci offrono i famosi traps del Dekkan, che coprono grande parte dell'India meridionale, per un'area di circa 200.000 miglia quadrate e con uno spessore medio di 2000 metri. Innanzi a tale enorme espansione di magma eruttivo si rimane certo perplessi sulla sua profondità d'origine, e pare che solo ci possa confortare il pensiero, che queste gigantesche eruzioni eoceniche o pre-coceniche non trovano paragone nelle attuali! E pure anche queste colossali pile di lave, di ceneri, di brecce e di scorie, se si considerano come conseguenze, accumulatesi per secoli, di cause eruttive non molto dissimili dalle attuali, solo espandentisi su grande spazio e prolungantisi per grande tempo, finiscono per svelare un'origine non eccessivamente misteriosa. Basta infatti a tal proposito vedere a quali conclusioni giunge R. D. Oldham nel suo *Manual of the geology of India* (Calcutta, 1893, pag. 283) in riguardo alla formazione dei traps del Dekkan.— Nei tempi susseguenti al cretaceo medio una grande area della penisola indiana faceva parte di un continente, a superficie ineguale in alcune parti, verso oriente però costituito principalmente da estesi piani, che per qualche lieve cambiamento di livello, anteriore al periodo vulcanico, furono convertiti in laghi. Molto probabilmente in quest'epoca, o poco dopo, dovevano esservi frequenti sorgenti silicee. A quanto pare i laghi s'erano disseccati e i loro depositi erano stati già in qualche punto soggetti a denudazione, prima che avessero luogo i primi sbocchi di lava. Questi si successero l'un l'altro poi a considerevoli intervalli, durante i quali si formarono altri laghi e paludi, per le interruzioni causate da correnti laviche o da cambiamenti di livello dovuti alle eruzioni. In questi laghi esisteva una ricca fauna di pesci, molluschi e crostacei entomostraci con una rigogliosa flora acquatica, mentre una varia e ricca vegetazione occupava le contrade circostanti, probabilmente accompagnata da una fauna terreste egualmente varia e abbondante. Altri efflussi di lava empirono i primi laghi e ne coprirono i depositi, ma nello stesso tempo diedero origine a nuovi laghi, in modo che ne successero parecchie alternazioni locali di lava e di terreni sedimentari. Gradualmente i laghi scomparvero, o perchè non avevano più tempo di formarsi, o, più probabilmente, perchè le correnti laviche avevano livellato le ineguaglianze formando una superficie basaltica piana e continua. Verso la fine del periodo vulcanico, forse per la più ampia intermittenza tra un'eruzione e un'altra, cominciano a ripresentarsi i depositi lacustri, con faune e flore però molto

mutate da quelle dei primi laghi. Le accumulazioni locali, sparse per tutta l'area vulcanica, di ceneri, di bombe e di scorie, e la presenza di numerosi dicchi, attestano l'esistenza di una grande quantità di focolari eruttivi, o vulcani propriamenti detti, da cui sgorgarono le possenti correnti di lava, che, dotate di una straordinaria fluidità, si estesero a enormi distanze, coprendo tutto il paese. La depressione, a cui il paese stesso dovè andar soggetto per il vuoto lasciato al disotto dall'extravasazione del magma e per l'ingente peso sovraimpostosi, fu forse in parte compensata dal sollevamento continentale, da cui quei fenomeni eruttivi, al pari di tutti gli altri, dovettero essere accompagnati. — Guardati a questo modo dunque anche i traps del Dekkan, come gli altipiani di lava del versante pacifico dell'America settentrionale, perdono molto del loro mistero e diventano il prodotto di una accumulazione successiva di eruzioni vulcaniche solo alquanto più potenti delle attuali, a cui per il resto sono del tutto simili. Anche la loro origine quindi sarà stata forse poco più profonda di quella che c'è rivelata dai nostri attuali vulcani.

Negli attuali vulcani di lava e vulcani compositi il principale criterio, per potere approssimativamente giudicare della loro profondità d'origine, è dato, come s'è detto, dalla qualità degli inclusi o blocchi rigettati. Questi inclusi possono con Lacroix dividersi in omeogeni ed enallogeni, secondo che rappresentano porzioni del magma, modificate in profondità dal contatto con altre rocce, oppure parti di queste rocce stesse, intatte o più meno metamorfosate, che l'azione vulcanica ha rotte e portate all'aperto. Sono questi inclusi specialmente, che ci danno un indizio della profondità da cui proviene il magma; ma anche gli inclusi omeogeni, convenientemente interpretati, possono dirci qualche cosa, come ci ha mostrato lo stesso Lacroix (*Les enclaves des roches volcaniques*, Macon 1893, pag. 641), il quale proprio con questo mezzo è giunto alla conclusione, che le sanidiniti rigettate dal monte Somma e dai crateri di Procida si sono formate a poca distanza dalla superficie.

In quanto poi agli inclusi enallogeni, si può stabilire come legge generale, risultante da numerose osservazioni: 1° che i blocchi rigettati da un vulcano generalmente derivano dai terreni, sui quali il vulcano immediatamente sorge, o possono con essi mettersi facilmente in relazione; 2° che tali blocchi sono intatti quando derivano dai terreni più alti su cui il vulcano si appoggia, e si presentano sempre più alterati e metamorfosati, a misura che mostrano provenire da terreni più profondi; 3° che il limite massimo di metamorfismo, provante un lungo contatto delle rocce alterate col magma, corrisponde a una profondità generalmente breve; 4° che finalmente i blocchi enallogeni, rigettati da tutti i vulcani, non offrono mai qualche nuovo esemplare o indizio di roccia ignota, ma sempre corrispondono alle rocce ben note della superficie della terra.

Senza ricorrere ora, come esempio, ai vulcani dell'Alvernia, che hanno rigettato frammenti di graniti e gneiss, sol perchè granito e gneiss formano la loro base immediata, e a tutti gli altri vulcani della terra, che si trovano press'a poco in simile condizione, basta menzionare i vulcani nostri d'Italia, per vedere come si trova in essi rigorosamente applicata la legge su citata. Infatti i vulcani fiancheggianti l'Appennino forniscono, come blocchi rigettati enallogeni, anzitutto fram-

menti di arenarie, di scisti, di argille, terziarie e quaternarie, fossilifere o no, quasi sempre intatte; vengono subito dopo i calcari, che presentano tutti gli stadî del metamorfismo, dal primo grado di calcinazione fino alla trasformazione completa in ammassi di minerali silicati.

Nei vulcani dei Campi Flegrei, in cui le esplosioni debbono essere state anche più superficiali, i massi rigettati provengono quasi tutti dai terreni eruttivi sottostanti, senza quasi mai raggiungere la vera base sedimentaria calcarea. Esempio convincente ce ne dà il tufo giallo di Posillipo, tutto sparso di pezzi di tufo verde come quello dell' Epomeo, il quale in alcuni pozzi artesiani s' è riscontrato giacere appena a 50-100 m. sotto la superficie. Quando in alcuni rari casi, come agli Astroni, si trovano blocchi di calcare, questi sono già completamente trasformati in humboldtilite e altri silicati: prova d'una lunga permanenza a contatto col magma, in profondità. Nelle Isole Flegree (Procida, Ischia) forse a causa di eruzioni più profonde, già si trovano blocchi di calcari in vari stati di alterazione, come alla Somma. Al Vulture e a Roccamonfina i calcari mesozoici, più o meno alterati, rappresentano il limite massimo di profondità, da cui partirono le esplosioni.

Il Vesuvio, specialmente nella sua parte antica della Somma, rappresenta il giacimento classico di questi blocchi rigettati. Quivi i frammenti di rocce eruttive più antiche (trachitiche, tefritiche e basanitiche), i blocchi di argille sabbiose a fossili pleistocenici e gli scarsi frammenti di arenarie eo-mioceniche sono ancora perfettamente intatti. Quasi intatti sono anche alcuni blocchi di calcare, i quali però già passano gradatamente alla infinita serie di inclusi metamorfosati di calcari e di calcari dolomitici, nota al mondo intero per la quantità e bellezza dei suoi minerali. Ora quale può essere lo spessore della serie di terreni largitrice di tali blocchi, rigettati dal Vesuvio?

I terreni eruttivi, a giudicare dai circostanti pozzi artesiani e dalle vicine formazioni geologiche, non si estendono più di qualche centinaio di metri al disotto del livello del mare: cinquecento metri rappresentano già un massimo possibile, ma poco probabile; nè più di tanto si può assegnare ai sedimenti del pliocene e del pleistocene, che agli orli del bacino mancano quasi del tutto. Il Flysch eo-miocenico, che è tanto abbondante sotto il Vulture, a cui ha fornito molto materiale allogeno, deve fare quasi del tutto difetto sotto il Vesuvio, a giudicare dalla scarsezza di blocchi rigettati di tal genere. La pila dei calcari cretacei nei circostanti monti campani ha uno spessore di circa 1000 metri, e altrettanti ne misurano le sottostanti dolomiti del trias superiore, che forniscono al Vesuvio blocchi già del tutto metamorfosati: quindi, tutto compreso, il limite massimo della profondità d'origine delle esplosioni del Vesuvio non deve essere superiore ai 3000 metri. Infatti H. J. Johnston Lavis nel suo primo studio su *The ejected blocks of Monte Somma* (Trans. Edinb. Geol. Soc., 1893) calcola a 890 m. sotto il livello del mare l'apice della cavità esplosiva di una di queste grandi eruzioni del Vesuvio, maggiormente largitrice di blocchi rigettati.

Qui si potrebbe obiettare, che altra cosa è il punto di partenza di tali esplosioni e altra la dimora del magma eruttivo; il quale potrebbe provenire da profondità ben maggiore di quella, in cui scoppia poi l' ultima esplosione creatrice

del condotto vulcanico, per il quale il magma si riversa alla superficie; ma a tale obiezione sono da opporre parecchie considerazioni, convalidate da argomenti di fatto e da studî sul terreno.

Anzitutto, in qual modo il magma sarebbe asceso fino al punto, in cui una minore resistenza gli avrebbe permesso l'esplosione finale? Non certo mediante una serie di esplosioni anteriori, che lo avrebbero fatto avanzare aprendogli a poco a poco il cammino, così come i minatori si avanzano nella escavazione dei tunnels sotterranei, a furia di mine successive: la conoscenza, che abbiamo delle forze eruttive, e la pressione che deve straordinariamente aumentare col crescere della profondità, non lasciano campo a una simile ipotesi. Allora forse mediante dislocazioni tettoniche, che avrebbero aperto la via al magma fino a un certo punto, giunto al quale esso avrebbe potuto poi erompere da sè? Ma anzitutto queste dislocazioni tettoniche, per quel che ne sappiamo e per quel che se ne può supporre, non avrebbero anch'esse che poche migliaia di metri di profondità; in secondo luogo esse dovrebbero palesare qualche volta e in qualche modo la loro esistenza al difuori: ora recentemente e da Geikie nella Gran Brettagna e da Stübel nelle Ande e da Böse nel Messico e da De Stefani nell'Appennino settentrionale e da me nel meridionale e da altri altrove s'è cercato appunto in vario modo di dimostrare l'indipendenza, se non di tutti, almeno di buon numero di vulcani da fratture preesistenti, in guisa da elevar quasi queste osservazioni particolari a una regola generale. Non è quindi ora il caso di ricorrere a ipotetiche profonde fratture della crosta, per convalidare l'ipotetica profonda origine dei vulcani.

Ma v'è ancora di più. Innanzi s'è detto, che gli inclusi enallogeni dei vulcani si presentano sempre più alterati e metamorfosati a misura che provengono da strati più profondi, e che ad es. i blocchi di calcari e di dolomiti rigettati dal Vesuvio, i quali non vengono certo da profondità maggiori di 1000-3000 metri, sono già completamente metamorfosati. Ora tale metamorfismo non si è potuto produrre dal semplice passaggio del magma durante la sua ascensione: basta infatti osservare come molte rocce siano rimaste insensibili al contatto dei filoni, che le attraversano, per convincersi quanto sia debole l'azione di questo magma ascendente. Bisogna quindi supporre, che i calcari e le altre rocce metamorfiche rigettate dai vulcani facciano parte di aree (simili a quelle che circondano le masse granitiche), che sono rimaste lungamente a contatto in una certa profondità con plaghe di magma fluido e incandescente, il quale ha metamorfosato, più o meno profondamente, le rocce circostanti, prima di squarciarle e lanciarle in aria per aprirsi un passaggio. Queste plaghe di formazione, o di stazione, del magma eruttivo si troverebbero quindi a poca profondità. E infatti le masse granitiche, p. es. quelle terziarie alpine illustrate da W. Salomon nel suo lavoro *Ueber Lagerungsform und Entstehungsart der periadriatischen granitischkörnigen Massen* (Tschermak's miner. petr. Mittheil., 1897), se si considerano come plaghe di magma consolidate in profondo, mostrano appunto come bastino poche migliaia di metri di profondità, per produrre la formazione di tali rocce di tipo abissale, plutonico.

Dunque anche l'esame dei vulcani lavici e compositi mena, per altre vie, alle stesse conclusioni ottenute con l'esame dei vulcani di tufo e di esplosione: cosa che non deve sorprendere, se si riflette che questi diversi tipi di vulcani in

sostanza non rappresentano che esplicazioni diverse di un medesimo agente, cioè della forza eruttiva. E i vulcani lavici e compositi presentano numerosi tipi di passaggio a quelli di tufo e di esplosione, come ci mostrano i *necks* della Scozia così bellamente illustrati da Geikie, molti dei quali nelle loro sezioni mostrano con evidenza straordinaria, come vulcani compositi di tipo Vesuvio possano avere un largo cuore prevalentemente composto di breccia e di tufo, non dissimile da quello di tutti i vulcani d'esplosione.

Se ora dalla esposizione dei singoli fatti riguardanti la forma e la struttura dei vulcani, ci dilunghiamo alquanto verso considerazioni di indole un po' più generale sulla funzione e la ragione dei vulcani stessi, otteniamo anche qui dei risultati, che concordemente menano a supporre di origine superficiale la produzione degli attuali fenomeni eruttivi.

Funzione dei vulcani

Nello studio dei fenomeni eruttivi, a causa della loro vistosità e terribilità, più facilmente che in quello di altre manifestazioni telluriche si perde di vista la proporzione esatta dei fenomeni stessi con il pianeta che li produce, e si è indotti a ricercarne in profondi abissi le ipotetiche origini. Noi quindi qui più che altrove dobbiamo tenerci stretti al sano principio del metodo induttivo e, invece di fare un salto nel buio, procedere gradatamente mediante quel postulato: Similia similibus cognoscuntur, che per la geologia ci è stato in questo secolo proclamato da Lyell, ma a cui già il grande Empedocle aveva dato saldo e sicuro fondamento nei versi, conservatici da Aristotele (*De Anima*, I, 2, 404[b]):

γαιη μεν γαρ γαιαν οπωπαμεν, υδατι δ' υδωρ,
αιθερι δ' αιθερα διον, αταρ πυρι πυρ αιδηλον.

Il nome di Empedocle è indissolubilmente e perennemente legato a quello dell'Etna, del più classico e più bello dei vulcani, che con le sue gigantesche conflagrazioni poteva bene inspirargli fantastiche supposizioni sulla sua origine: ciò nonostante il sommo filosofo agrigentino serenamente proclamava il principio, che, come con i fenomeni della terra, dell'acqua e dell'aria noi conosciamo la terra, l'acqua e l'aria, così mediante i fenomeni del fuoco possiamo conoscere anche il fuoco terribile, che egli considerava sparso qua e là superficialmente sotto la terra: πολλα δ' ενερθ' ουδεος πυρα καιεται. Intanto l'ipotesi d'una grande massa centrale della terra, fluida e incandescente, ci ha allontanati non poco da questa giusta visione; a cui però sempre si finisce per ritornare, quando si scruta profondamente la funzione e l'essenza dei vulcani.

Se infatti consideriamo un vulcano nel massimo della sua attività, quando dal suo grembo sgorga furioso il magma incandescente, con fiumi di fuoco, accompagnati da getti di scorie e di bombe e avvolti da nuvoli enormi di cenere e da nembi spettacolosi di vapor d'acqua, vediamo che tutta la sua azione si riduce a uno scambio (molto violento per il nostro modo di concepire) o a un rimescolamento dei materiali della litosfera con quelli dell'idrosfera e dell'atmosfera. I gas e l'ac-

qua, che ordinariamente compiono il loro ciclo tra la terra, l'aria e il mare mediante i sottili spiragli delle moffette o per mezzo delle sorgenti, dei ruscelli o dei fiumi, portando anche sospese o disciolte sostanze calcaree e silicee, durante le eruzioni vulcaniche si sprigionano violentemente, trascinando con sè dal grembo della terra sostanze minerali fuse e incandescenti, che vengono a cristallizzarsi e consolidarsi alla superficie, a misura che quella soluzione fusa che è il magma viene a perdere gradatamente di pressione, di calore e di vapor d'acqua, ossia a misura che si raffredda e si evapora. Così che, come noi abbiamo immaginato una circolazione di acque sotterranee, che si svolge a poca profondità sotto il suolo, possiamo anche figurarci più completa e complessa tale circolazione, facendo pervenire l'acqua ancora più in giù, verso i focolari magmatici, di cui essa con la sua potenza espansiva va a formare la parte cinetica: concetto che io ho piuttosto diffusamente esposto nel mio *Studio geologico del Monte Vulture.* Questa era press'a poco la concezione conforme a natura, che gli antichi avevano di tali fenomeni tellurici, e tale, come mi ha fatto avvertito il mio amico Neumann, ce l'ha esposta Lucio Apulejo, erede e raccoglitore della migliore sapienza greca, in questa descrizione del suo libro *De Mundo*: « Sed non aquarum modo tellus in se fontes habet, verum spiritu & igni foecunda est. Nam quibusdam subter occulti sunt spiritus; & flantes incendia indidem suspirant: ut Liparis, ut Aetna, ut Vesuvius etiam noster solet. Illi etiam ignes, qui terrae secretariis continentur, praetereuntes aquas vaporant, & produnt longinquitatem flammae, quum tepidiores aquas reddunt vicinia ferventiores ». Ma questa circolazione sotterranea delle acque, che viene a mescersi con i fuochi eruttivi, non ha solo lo scopo di sollevare meccanicamente alla superficie il magma interno, ma esercita anche una importante funzione chimica, la quale è però anch'essa d'indole superficiale.

Infatti i processi chimici, che attualmente si svolgono alla superficie della terra, sono nel regno minerale principalmente quelli di ossidazione e di idratazione, che preparano la via e i mezzi agli ulteriori processi vitali. Ora sono appunto l'idrosfera e l'atmosfera, che rappresentano gl'involucri più esteriori del pianeta, quelli che danno gli elementi per l'ossidazione dei pochi metalli, alcali e terre, che si riscontrano nella crosta terrestre e che provengono in parte dalla extravasazione del magma eruttivo. La composizione della crosta terrestre, secondo i calcoli esposti da F. W. Clarke nel suo lavoro su *The relative abundance of the chemical elements* (Philosoph. Society of Washington, 1889) è data, su cento parti, da

O	47.29
Si	27.21
Al	7.81
Fe	5.46
Ca	3.77
Mg	2.68
Na	2.36
K	2.40
H	0.21
	99.19

Il resto, 0.81, è dato dagli altri elementi rari. È dunque l'ossigeno, quest' elemento volatilissimo ed esteriore del nostro pianeta, che rappresenta la parte preponderante nella composizione della crosta terrestre, e che certo non si trova tutto ab initio incluso nel magma, ma dev' essere in gran parte assorbito dall' idrosfera, con cui il magma viene a trovarsi a contatto. La composizione stessa dei magmi eruttivi corrisponde esattamente a quella della crosta; e le eruzioni non ci apportano dalle profondità niente di nuovo, che riveli altri elementi, di densità maggiore di quella che si riscontra alla superficie della terra.

È noto infatti, che il peso specifico medio delle rocce componenti la crosta terrestre è di circa 2,65, e quello dell'acqua marina, che è tanta parte della superficie della terra, di 1,027; mentre il peso specifico dell' intero nostro pianeta, calcolato con diversi metodi, oscilla tra 5,56 e 5,69: per cui c' è da supporre che l' interno del globo sia costituito da masse, che superino di molto la densità di 5.7. Nè si può immaginare, che tali masse siano costituite dagli stessi materiali della crosta, cresciuti di densità solo per effetto dell' aumentata pressione; perchè per questo solo motivo la densità sarebbe molto maggiore di quella, che la terra in realtà possiede: come risulta dai calcoli di A. Ritter in *Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Körper* (Wiedermann's Annalen d. Physik. u. Chemie, 57), secondo i quali l' aria atmosferica, per il solo effetto dell' aumentata pressione secondo la legge di Mariotte e Gay-Lussac, raggiungerebbe al centro della terra un peso specifico di 143,5. Fatte le proporzioni con gli altri elementi, si vede subito quali enormi risultati si otterrebbero secondo questa ipotesi. Bisogna quindi in realtà ritenere che l' interno della terra sia costituito da materiali più densi di quelli che si riscontrano alla superficie. Ora di tali materiali più densi le rocce eruttive, anche quelle plutoniche, non ci forniscono alcun esempio (l' unico caso del ferro nativo nel basalte di Ovifak non infirma la legge generale); ragione per cui si può ben supporre, che le rocce eruttive stesse non provengano da grandi profondità.

Da alcuni si è immaginato, che il magma eruttivo nel raffreddarsi aumenti di volume e perda quindi di densità, acquistando il peso specifico medio comune alle sostanze della crosta terrestre, mentre allo stato fuso fluido sarebbe più denso e pesante. Sono noti a tal proposito gli esperimenti di Palmieri, che dal galleggiare dei pezzi di lava solida sulla lava fusa del Vesuvio volle dedurre la maggiore densità di questa rispetto a quella: il che, dato il modo come furono fatti gli esperimenti (come già più d'uno ha fatto rilevare), equivarrebbe a supporre, che un ago o una scaglia di ferro abbia un peso specifico minore del miele vischioso, alla cui superficie può eventualmente galleggiare. Invece gli ultimi studî sperimentali di C. Doelter su *Die Dichte des flüssigen und des festen Magmas* (Neues Jahrbuch f. Mineral., 1901, Bd. II, p. 141 e seg.) dimostrano a sufficienza quel che c' era naturalmente da aspettarsi, che cioè il peso specifico della fusione fluida è sempre minore di quello della corrispondente roccia solida. A ciò si aggiunga, che spesso il magma consolidatosi lentamente e sotto fortissima pressione, come quello ad es. delle masse granitiche, ha un peso specifico anche minore di molte lave, specialmente basaltiche, consolidatesi rapidamente e sotto la sola pressione dell' atmosfera.

Tutto ciò ci mena a concludere ancora una volta, che i fenomeni eruttivi sono di indole tutta superficiale e che essi non interessano che la sola crosta litoide della terra; senza raggiungere la massa centrale più densa, la quale, anzi che immaginarsi incandescente e fluida, deve piuttosto considerarsi già solida e irrigidita, press'a poco così come fu indicata schematicamente da Bombicci nel suo studio *Sulla costituzione fisica del globo terrestre* (Memoria dell'Accademia di Torino, 1887), o anche come si suppone da quelli, che immaginano una terra sempre solida, formatasi per successiva precipitazione di meteoriti: ciò senza preoccuparsi ancora delle speciali condizioni geologiche di genesi dei singoli magmi eruttivi.

Queste condizioni geologiche di genesi dei magmi conducono alla medesima conclusione della superficialità dei fenomeni eruttivi. Infatti, è ormai indiscutibile, che l'azione vulcanica rappresenti un fattore concomitante dei sollevamenti epeirogenici e dei corrugamenti orogenici; e non solo l'azione vulcanica, ma anche tutta l'azione eruttiva in generale, come si apprende, ad es., dalle grandi masse granitiche periadriatiche, le quali si sono formate, a quanto pare, proprio durante il possente corrugamento orogenicò della catena alpina con le sue varie ramificazioni. Dovunque poi si facciano degli studî sui vulcani, non si può disconoscere il loro stretto legame con le catene montuose, a cui essi sono addossati; e basta guardare una carta vulcanologica della terra, per vedere a colpo d'occhio, come tutti gli odierni vulcani seguono rigorosamente le più recenti linee di corrugamento montuoso della superficie terrestre. Ora la formazione delle montagne, sia che per essa si ammetta l'ipotesi del peso, o quella delle geosinclinali, o quella del calore, con l'aggiunta degli scivolamenti fatta da Reyer, o quella semplicemente della contrazione, in tutt'i casi è ora generalmente considerata come un fenomeno eminentemente superficiale, interessante solo le poche migliaia di metri più esteriori della crosta terrestre. Del pari superficiale quindi deve essere considerata l'azione eruttiva, la quale, sia che si immagini come derivante da processi fisici o chimici, nel senso di Mallet, svolgentisi al disotto delle zone di corrugamento, o che si creda provenire da limitati focolari magmici periferici, nel senso di Hopkins o di Stübel, sempre però appare strettamente legata al fenomeno superficiale della formazione delle montagne. Quanto sia superficiale poi il fenomeno vulcanico è comprovato anche da ciò che Reyer chiama insaccamento dei vulcani e che io ho dimostrato essere avvenuto per il Vulture; il quale, a causa della massa di magma sovraimpostosi e del vuoto prodottosi al disotto s'è realmente affondato o insaccato nella sua base sedimentaria: cosa non possibile, se la crosta, su cui il vulcano sorse, fosse stata di grande spessore.

Ma qui i sostenitori della massa centrale fluida e incandescente, e anche quelli, che suppongono una massa tenuta bensì solida o rigida della pressione, ma che però può muoversi e diventare plastica appena la pressione cessa, oppongono, che le montagne e i corrugamenti sono accompagnati da fenomeni eruttivi, sol perchè con le loro dislocazioni rompono la pressione della crosta e permettono la libera uscita del magma, che giaceva costretto al disotto. Ma come si può supporre, che una massa enorme di magma, dotata della ingente forza espansiva, che noi vediamo così violentemente agire nelle eruzioni, sia tenuta in freno dalla sottile pellicola rappresentata dalla scorza terrestre, solo questa essendo capace di movimento e di

dislocazione? Le maggiori catene di montagne non hanno uno spessore di sedimenti superiore a una diecina di chilometri: e se anche si fa salire a venticinque, e perfino a cinquanta chilometri lo spessore della crosta, questa crosta così spessa rispetto alla massa del globo terrestre sarebbe solo come un sottile guscio di 5 mm. intorno a una sfera di 1 metro e 30 cm. di diametro. È evidente che tale guscio non può rappresentare certo il potere necessario e sufficiente a mantenere costretta e compressa tutta l'interna massa magmica, solida o fluida che essa sia. I vulcani dunque non possono provenire da questa ipotetica massa centrale, ma debbono avere le loro radici subito al disotto delle zone di corrugamento montuoso, di cui rappresentano un fenomeno concomitante e con cui costituiscono la forma di scambio superficiale tra litosfera, idrosfera e atmosfera, che ora si svolge nella parte esteriore del nostro pianeta; essendo la parte interiore forse già passata a quello stato di consolidazione, da cui uscirà, per rimettersi nella circolazione cosmica, quando nei futuri eoni il pianeta stesso, scoppiando, o spezzandosi nell'urto con altri corpi, si sparpaglierà negli spazî siderali sotto forme di asteroidi, di meteoriti e di polvere cosmica.

La funzione superficiale dei nostri vulcani ci è inoltre anche in certo modo rischiarata dalla visione dei giganteschi processi eruttivi, che ora si compiono alla superficie del sole. Il sole infatti, giusta la teoria di Kant, che finora, malgrado le obiezioni mossele dai soliti ricercatori di eccezioni, resta incontrastabilmente la più sublime e vasta concezione, che l'umanità possegga dell'universo, il sole, dico, si trova in uno stato, attraverso il quale la terra deve essere già passata. Ora, sia che si considerino con Secchi le macchie solari come cavità comprese tra le facule, o che con Zöllner, e forse più giustamente, le si riguardino come prodotti di consolidazione scoriacea della fotosfera, certo è che esse sono l'esponente di giganteschi rivolgimenti e colossali vortici, che tendono a portare le parti più densificate verso il centro di quella massa incandescente. In questo senso appunto R. Emden ha recentemente scritto i suoi *Beiträge zur Sonnentheorie* (Sitzungsber. d. math. naturwiss. Classe d. Ak. d. Wiss. zu München, 1901, p. 339 e seg.), in cui arriva alla conclusione, che le macchie rappresentano dei vortici, originati dalla rotazione di varî strati sferici di diverse densità, che tendono a portare verso il centro le sostanze più dense d'un corpo celeste raffreddantesi per irraggiamento, di cui le parti liquide e gassose più leggiere tendono a risalire sempre verso la periferia. Anche per la terra quindi, per analogia di quel che avviene ora nel sole, è supponibile, che nel suo passato le parti più dense si siano precipitate e consolidate gradualmente verso il centro, respingendo alla periferia le parti liquide e gassose; e che quindi i nostri attuali vulcani rappresentino proprio gli ultimi e più superficiali stadii di questi processi di scambio tra le parti solide, liquide e gassose del pianeta.

Conclusione

Nelle precedenti pagine ho esposto, corredandole di osservazioni e dati di fatto, le seguenti principali considerazioni:

1.ª Il materiale allogeno rigettato dai vulcani, ossia quello che non fa

parte intrinseca del magma eruttivo, ma è da questo strappato alle pareti del camino attraverso cui passa, ci offre un criterio approssimativo, per scandagliare in certo modo la profondità dei punti, da cui le eruzioni sono partite.

2.ª La quantità di tale materiale allogeno, rigettato dai crateri d' esplosione e dai vulcani di tufo e di materiale frammentario, assoggettata a un certo calcolo approssimativo, dà per i punti di partenza delle esplosioni una profondità massima, che per i vulcani dei Campi Flegrei oscilla da meno di 1000 a poco più di 2500 metri. Risultati press' a poco simili offrono i Maare della Svevia e i Diatremata adamantiferi dell' Africa australe.

3.ª La qualità del materiale allogeno, rigettato dai vulcani di lava e dai vulcani compositi (sul tipo del Vesuvio), fa supporre una profondità massima di origine, che pel Vesuvio ad esempio può essere compresa nei limiti da meno di 1000 a circa 3000 metri al disotto della piattaforma, su cui sorge il vulcano. Tale risultato è convalidato dall'esame della forma e del materiale dei necks degli antichi vulcani di Scozia.

4.ª Non solo i vulcani, ma anche gli ammassi di magmi eruttivi consolidatisi plutonicamente in profondità hanno probabilmente un' origine poco profonda: come ci indicano le masse granitiche periadriatiche, che si son formate durante il corrugamento eocenico della catena alpina, a quanto pare a poche migliaia di metri al disotto della superficie.

5.ª La funzione dei vulcani, consistente principalmente nella ossidazione e nella idratazione dei metalli, degli alcali e delle terre, è di natura prevalentemente superficiale; giacchè questi elementi della litosfera solo alla superficie, nell' idrosfera e nell' atmosfera, possono principalmente trovare gli elementi per tali processi di ossidazione e idratazione.

6.ª Il peso specifico medio dei magmi eruttivi solidi è eguale al peso specifico medio della crosta terrestre (2.65) ed è quindi circa di una metà inferiore alla densità media della terra (5.70). Le osservazioni sulle lave correnti e gli studî sperimentali sintetici menano alla conclusione, che allo stato fluido i magmi hanno un peso specifico anche alquanto minore di quello che presentano allo stato solido. Quindi la composizione del magma non corrisponde affatto a quella che si deve presupporre per la parte centrale della terra; nè d' altronde, per varie ragioni, si può immaginare un magma interno più denso per effetto solamente d'aumentata pressione.

7.ª D' altra parte, ad eccezione dell'unico esempio del ferro nel basalte di Ovifak, i magmi eruttivi, anche quelli profondi, plutoniani, non albergano in sè sostanze di maggiore densità, portate da plaghe più profonde: bisogna quindi ammettere, che l' azione eruttiva veramente non interessa la parte centrale e più densa della terra.

8.ª La relazione intima e irrefragabile, esistente tra i fenomeni eruttivi e la formazione delle montagne, indica anche la poca profondità d'origine dell'azione eruttiva in generale, e della vulcanica in particolare; giacchè i corrugamenti orogenici sono già per sè stessi fenomeni superficiali, interessanti solo la pellicola più esteriore, e spessa appena poche migliaia di metri, della crosta terrestre.

9.ª Se la parte interna della terra è già tutta consolidata e rigida, come risulta dei calcoli astronomici e come dovrebbe infatti avvenire in conformità della teoria di Kant, i fenomeni eruttivi rappresentano la parte periferica ancora attiva del nostro corpo planetario in stato di avanzato raffreddamento.

10.ª Come attualmente nel sole le parti superficiali più raffreddate e dense si precipitano verso il centro con movimenti rotatorî, che danno luogo a vortici giganteschi (macchie), mentre le parti più interne e leggiere risalgono alla superficie con colossali eruzioni (facule e protuberanze): il tutto menando alla formazione di un nucleo più denso, sempre crescente, e di un involucro meno denso, respinto sempre più alla periferia; così anche nella terra i fenomeni eruttivi rappresentano gli ultimi processi di scambio, superficiali e periferici, della parte solida con la liquida e la gassosa del nostro pianeta.

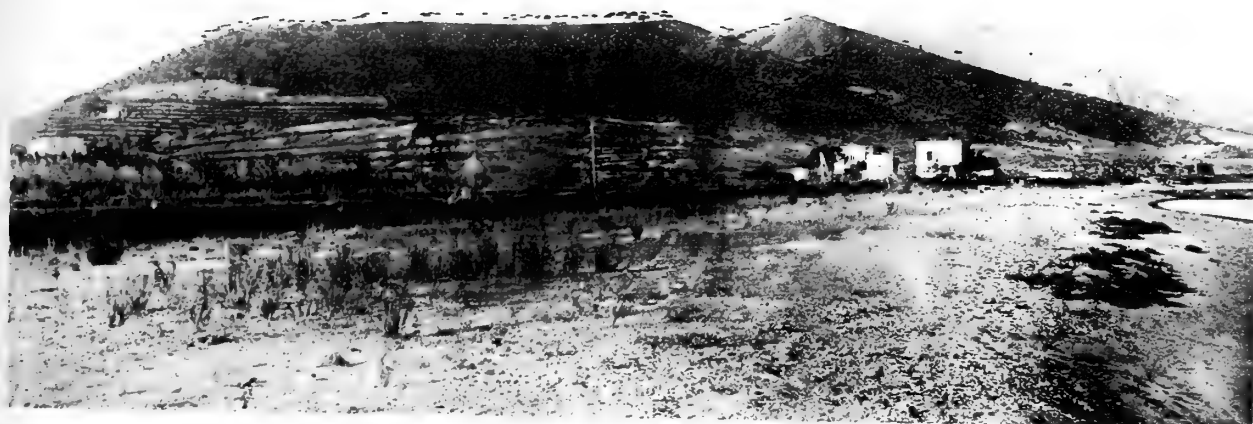
Queste considerazioni nel loro insieme credo che forniscano discreto argomento, per rigettare l'ipotesi di un'unica massa centrale, incandescente e fluida, da cui i nostri vulcani dovrebbero trarre origine, e per ritenere invece, che i fenomeni eruttivi delle ultime epoche geologiche, da che forse si è sviluppata la vita sulla faccia del nostro pianeta, e specialmente l'azione vulcanica attuale, abbiano, rispetto a tuttaquanta la massa della terra, un'origine molto superficiale.

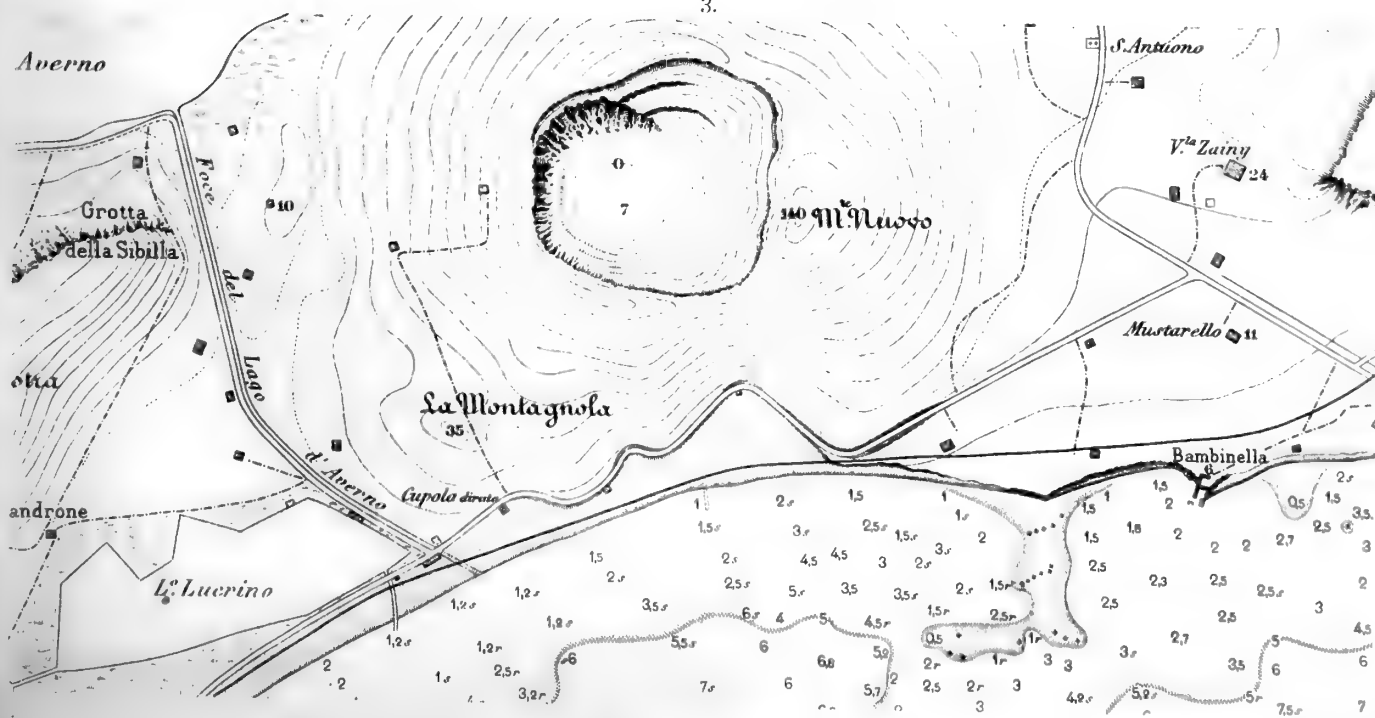
Napoli, Museo geologico dell'Università,
Decembre del 1901.

finita di stampare il di 28 Gennaio 1902

1.

MONTE NUOVO DA BAIA

2.

MONTE NUOVO DALLA VIA HERCULEA

3.

SCALA 1 : 12.000

FOT. CALZOLARI & FERRARIO, MILANO

Vol. XI, Serie 2.ª **N.° 8.**

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

IL CRATERE DI ASTRONI
NEI CAMPI FLEGREI

MEMORIA

di **G. DE LORENZO** e **C. RIVA**

presentata nell'adunanza del dì 12 Aprile 1902

« Wir bewohnen fürchterliche Ruinen »
KANT
in *Vorles. üb. Phys. Geographie.*

INTRODUZIONE

Questo pensiero di Kant « noi abitiamo terribili ruine » in nessun punto della terra trova forse più adequata applicazione che nella plaga compresa tra il Vesuvio e Cuma, dove appunto sulle macerie immani dei commossi elementi tellurici è germogliata una delle civiltà più rigogliose e fiorenti. Ancor oggi, chi dallo sperone dei Camaldoli libra lo sguardo su questa plaga famosa e vede quasi ai suoi piedi spalancarsi la voragine cupa ed enorme del cratere di Astroni, e intorno a questo sorgere e moltiplicarsi colli corrosi e crateri infranti, che con mobile ondeggiamento si spandono verso il sorriso innumerabile del mare, inghirlandato ai margini dalle corone multicolori di congregazioni umane, deve anche pensare, quanto spasimo inconscio e quanta visibile ruina è costata alla terra la produzione di questo suo lembo, destinato a dar vita e nutrimento a uno dei più mirabili tronchi dell'arte e del pensiero umano.

Nè di tale spasimo e di tale ruina furono ignari gli abitatori di questo suolo, che per primi qui giunsero alla conscienza di sè e del mondo che li circondava; giacchè essi qua appunto collocarono le sedi delle battaglie gigantesche tra le oscure e violenti forze titaniche della terra e le potenze più serene del cielo. Uno di noi, in una nota sul *Significato geologico di alcuni miti ariani* (Rendiconti di questa Accademia, Luglio 1901) ha cercato di dimostrare, che i Ciclopi e i Centomani non sono che i vulcani: col grande cratere circolare terminale, con i numerosi coni avventizî sulle spalle e con le terribili correnti di lava lungo i fianchi; e che la vittoria finale dell'Olimpo, nella Titanomachia e Giganto-

machia, non rappresenta che il cessare delle grandi conflagrazioni vulcaniche, quando si vedono le membra ingenti dei violenti figli della terra giacere atterrate, squarciate, arse e fumanti sotto il sorriso sereno, inalterabile e vittorioso del cielo lucente. Non altrimenti, del resto, questi miti erano stati interpretati dagli stessi grandi antichi, come ce lo mostra, ad esempio, quel sommo conoscitore dei fuochi vulcanici, che fu Empedocle; il quale diceva, che nel mito degli antichi Titani e Giganti non bisogna scorgere se non quella terribile rivoluzione e convulsione della natura, in cui tutti gli elementi più gravi tendono a disporsi da una parte e i più lievi dall'altra: τους παλαιους κινης Τιτανας επι την φυσιν και Γιγαντας και την μυθικην εκεινην και φοβεραν ακοσμιαν και πλημμελειαν επιδειν ποθης χωρις το βαρυ παν και χωρις το κουφον. Il nome stesso di *Astronì*, il quale porta in sè la medesima radice di quello di uno dei tre Ciclopi, *Sterope*, ci indica forse, che il grande cratere, il quale fissa ora il cielo con l'enorme orbita vacante e nera, fu da quei primi uomini veduto nelle sue colossali eruzioni quasi come occhio fulgente e folgorante. Ciò è in certa guisa anche comprovato dall'origine geologicamente recentissima, e forse anche preistoricamente non troppo remota, di questo cratere, che, come appresso si vedrà, s'è formato in un periodo piuttosto avanzato della storia eruttiva dei Campi Flegrei. D'altra parte il suo nome, come ci fa osservare l'amico Neumann, potrebbe anche rappresentare il caratteristico aspetto raggiato, *astrale*, della sua forma.

Quando poi la forza ferrea di Roma scese su queste rive a ingentilirsi a contatto della coltura ellenica, assunse anche le cognizioni impostele dall'arte e dalla sapienza greca: e dalla fusione delle due civiltà nacquero, e si esplicarono nelle opere di Virgilio, Orazio, Ovidio, Giovenale, etc. le immortali descrizioni di queste contrade, che ancora formano vivente patrimonio della nostra coltura. Ma gli aborigeni, che coltivavano già da anni questo suolo, e i Romani, che qui venivano a cercare pausa ai lor dolori (Pausilipon), predilessero, ed a ragione, le molli colline in riva al mare, e non si occuparono delle interne terre, da essi ritenute incolte, selvagge e barbare. Quindi è che del cratere di Astroni non si ha alcuna speciale descrizione; pur essendo esso ben noto, come ci dimostrano gli avanzi delle grandiose terme romane, che si trovano accanto ad esso e che ancor oggi, rovinate e coperte d'edera, impongono venerazione e rispetto. Forse esso, col suo profondo e cupo baratro, misterioso e solenne nel silenzio della selva da cui era rivestito, era, al pari dell'Averno, ritenuto come una delle vie, che portano giù, alle onde del tartareo Acheronte. E forse anche, pigliando proprio esempio da queste contrade, Ovidio, ripristinando la somma sapienza pitagorica, anticipava di circa due millennî la teoria del sollevamento dei vulcani, nei versi del XV delle *Metamorfosi*:

> Vis fera ventorum, caecis inclusa cavernis,
> Exspirare aliqua cupiens, luctataque frustra
> Liberiore frui coelo, cum carcere rima
> Nulla foret toto nec pervia flatibus esset,
> Extentam tumefecit humum, ceu spiritus oris
> Tendere vesicam solet aut direpta bicornis
> Terga capri. tumor ille loci permansit, et alti
> Collis habet speciem, longoque induruit aevo.

Infatti proprio questa teoria al principio del nostro secolo fu, con successo tanto rumoroso quanto transitorio, applicata al cratere d'Astroni.

Tramontato lo splendore di Roma nelle tenebre del Medio Evo, svanì anche ogni traccia di visione generale di queste contrade; tanto meno quindi si ebbe alcun cenno generale del cratere di Astroni. Bisogna aspettare il graduale rinascimento dell'antica coltura, per vedere anche qualche accenno letterario o scientifico alle terre di cui ci occupiamo. Tra il 1212 e il 1221 infatti il medico Pietro da Eboli compose il suo *Carmen de balneis Puteolanis*, dedicato al gran re Federico, e descrisse in esso i bagni termali, allora molto caldi, di Astroni, o Astruni, come egli dice, attribuendo loro quelle qualità terapiche, che nove secoli prima erano state esposte da Oribasio, il celebre filosofo e medico dell' altro monarca anticristiano, di Giuliano l'Apostata.

Poco più d'un secolo dopo venne in questi lidi il divin Petrarca, che descrisse i Campi Flegrei nella lettera IV del quinto libro delle sue *Familiari*: « Vidi loca a Virgilio et, quod maxime mireris, ab Homero multum ante descripta. Vir Graius antiquissimus atque doctissimus, et nulli secundus ingenio, insignem et qualem res exigebat locum nusquam inveniens, ab Italia mutuatus est. Vidi Averni et Lucrini lacus, Acherontis quoque stagnantes aquas... Vidi Sybillae patriam ac domum, et horrificum illud specus stultis irremeabile, doctioribus inaccessum. Vidi Falernum montem famoso palmite conspicuum, et hic aridam tellurem morbis salutare fumum perpetuo exhalantem, illic cinerum globos, et ferventas scatebras, aheni instar undantis, confuso murmure eructantem ». Abbiamo riportato questo brano, quantunque non si riferisca agli Astroni, perchè da esso scaturisce un fatto importante per la storia dell'attività eruttiva dei Campi Flegrei. Petrarca infatti potè vedere la terra eruttante con confuso murmure globi di cenere e ferventi scatebre, come di fuso bronzo ondeggiante, solo alla Solfatara: il che dimostra, che anche più d'un secolo dopo la nota eruzione del 1198 questo cratere doveva trovarsi in uno stato d'attività tale, da mostrare la lava incandescente.

Con l'avanzarsi del Rinascimento si cominciano finalmente ad avere le prime notizie particolari del cratere di Astroni e le prime congetture sulla sua natura vulcanica. Nel quattrocento infatti gli Aragonesi rivolsero speciale attenzione a questo remoto recesso, sia per le terme in esso ancora esistenti, che per il comodo asilo, che i suoi boschi solitarî offrono alla selvaggina. Alfonso I quindi lo cinse di un muro, facendone un parco riservato reale, e nel 1452 vi diede la famosa caccia, descritta da quel Bartolomeo Faccio, che pel primo congetturò anche la natura vulcanica del luogo. Che dopo il Faccio quasi nessun altro vi abbia pensato fino al principio del settecento, ci è dimostrato da questo passo della *Istoria naturale del monte Vesuvio* di Gaspare Paragallo, Napoli 1705, pag. 19: « E per avventura non dovrà parere anche strano molto il diviso dell'Alberti, che 'l monte degli *Struni*, o *Astruni*, posto tra Napoli e Pozzuoli, in cui sono le caccie Regali, fosse altresì nato per cagion dei fuochi sotterranei della terra: del che par che ne facci testimonianza non pure quella sua cavità, simile a quello d'altri monti arsi, ma la gran copia del Solfo, che vi si scorge nel suolo, e l'avere non guari lungi i fonti d'acque calde. Il che diè ragione di dire, ben due

secoli addietro, a Bartolomeo Fazio nel libro dei Gesti del Re Alfonso: Locus Neapoli quatuor millia passuum proximus, quem vulgo li Struni vocant, nos unum e Phlegraeis campis ab ardore nuncupandum putamus ». Col settecento del resto cominciano le prime ricerche analitiche, che preludono alla scienza moderna, e da quest'epoca quindi si possono indicare solo i principali di quelli, che più o meno diffusamente si sono occupati del cratere di Astroni.

Bisogna però, prima di andare oltre, menzionare la magnifica pianta di Napoli e dintorni, eseguita nel 1629 da Alessandro Baratta (della quale un esemplare è esposto nel Museo di San Martino), giacchè in essa è data una bellissima figura del cratere di Astroni, riprodotta poi in carte posteriori.

È poi anzitutto necessario ricordare quel Niccolò Braucci (da noi mentovato nel nostro studio sul *Cratere di Vivara*, Atti di quest'Accademia, vol. X, 1900), che nella sua manoscritta *Istoria naturale della Campania sotterranea*, composta verso il 1767, così parla degli Astroni: « Il secondo vulcano dei Campi Flegrei di Plinio non è più lontano da quello di Pianura che un sol miglio occidentale; ed è quello appunto, che oggi si appella Astruni. Esso rappresenta un perfetto anfiteatro, le cui labbra son di circa tre miglia di circonferenza, e la sua profondità meno di cento passi. Le labbra son tante colline alzate dalle materie di fuoco, le quali son pomici, ceneri e sassi bruciati. Esse si dilatano per più d' un miglio intorno al vulcano, con un pendio quasi simile a quello delle sue fauci. Il fondo interiore contiene quattro laghi, alcuni dei quali in tempo di està si disseccano; il più grande in alcuni siti è profondissimo. Nella sua riviera di levante ribolle un'acqua minerale, che porta sal alcali e solfo. In vicinanza di quei laghi si scoprono alcuni rialzi di tufo non tocchi dagli incendj; laonde io ho giudicato, che dentro di quel vano si fossero aperte più bocche di fuoco, fra mezzo delle quali fossero rimaste intatte quelle piccole vocche di tufo. Da questo vulcano non sono uscite fuora materie liquefatte, ma solo cenere, pomici e sassi bruciati ». A parte qualche lieve inesattezza queste osservazioni hanno lo stesso pregio di accuratezza, già da noi notato a proposito del cratere di Vivara.

Quasi contemporaneamente al Braucci studiava nei dintorni di Napoli, anche dal punto di vista geologico, sir William Hamilton, che nel 1776 raccolse le sue ricerche nella splendida opera *Campi Phlegraei*. Quivi (pag. 67) egli dà una breve descrizione, non così particolareggiata come la predetta di Braucci, del cratere d'Astroni, il quale egli dice composto, al pari del cratere di Agnano, di tufi e di strati di pomici sciolte, frammenti di lava e altre materie bruciate, similmente a ciò che si vede nel Vesuvio. Nelle tavole XVII, XIX e XX della stessa opera egli diede poi del cratere di Astroni quelle note figure, che, al pari delle altre sue illustrazioni di questi luoghi, furono copiate e ripetute da molti dei geologi posteriori, che si occuparono dei Campi Flegrei.

Quando Hamilton ancora era a Napoli, e ospite anche qualche volta di lui, fu qui Goethe, che consacrò ai Campi Flegrei una delle sue prime visite. Di questa visita, oltre le impressioni durature riverberatesi poi in altre opere, egli diede anche dettagliata notizia in una lettera del 1° Marzo 1787, in cui accenna anche al cratere di Astroni: « Sotto il più puro cielo il suolo più insicuro. Acque bollenti, crepacci esalanti solfo, monti di scorie contrastanti alla vita vege-

tale, spazî nudi, repellenti, e fuori di ciò poi una vegetazione sempre florida, aggrappantesi dovunque può, sollevantesi su tutte le morte ruine e intorno ai laghi e ai ruscelli, affermandosi anche con la più splendida selva di querce sulle pareti di un antico cratere ». L'impressione rapida, e pure indimenticabile, di questa visione è quindi da Goethe paragonata alla lettura di Sakuntala.

Pochi anni appresso, il più diffuso illustratore di questi luoghi, Scipione Breislak, pubblicò a Firenze, nel 1798, la sua *Topografia fisica della Campania*, che riprodusse poi a Parigi nel 1801, sotto il titolo di *Voyages physiques et lythologiques dans la Campanie*. In entrambe le opere egli descrive il cratere di Astroni come uno dei più interi e meglio conservati di questa contrada, riferendone le dimensioni ed esponendone la costituzione, rappresentata, nella cinta esterna, da scorie, pomici e ceneri, mescolate a pezzi erratici di lava, e nella parte interna da una collina di tufo, mista a massi di lava. Egli inoltre ricordò la massa di lava, incastonata nella parte orientale del cratere, e la corrente del fondo, e in entrambe distinse feldspati, mica e olivina, con produzione secondaria di silice.

Fino a questo momento i descrittori del cratere di Astroni, non turbati ancora da alcuna preconcetta opinione geologica, lo avevamo rappresentato così come esso realmente è: cioè come un vulcano costituito da materie eruttive frammentarie, accumulatesi per una o più esplosioni, con qualche picciolo accenno a correnti di lava continua. Ma nel 1799 venne per la prima volta a Napoli Leopold von Buch, che doveva poi con i suoi scritti successivi esercitare una grande influenza, sotto un certo aspetto funesta, sulla geologia degli Astroni, dei Campi Flegrei e dei vulcani in generale. Il geniale geologo infatti, mentre da un lato fu coscienziosissimo e acuto descrittore dei fatti osservati, dall' altro si fece tant'oltre trasportare dalla infelice e preconcetta idea dei crateri di sollevamento, da giungere persino a travisare le cose realmente esistenti, pur di sottometterle a quella teoria. Uno dei principali casi di questa aberrazione è rappresentato appunto dalla sua descrizione del cratere di Astroni. Invero nel 2° volume delle sue *Geognostische Beobachtungen auf Reisen*, stampate nel 1806, egli non parla ancora di ciò; anzi allora vedeva le cose così limpidamente, che si meravigliava, come si potesse ritenere il Monte Nuovo un cratere di sollevamento (pag. 460 del I vol. dei *Gesammelte Schriften*). Ma nel 1825, pubblicando la sua *Physikalische Beschreibung der canarischen Inseln*, egli espose sul Monte Nuovo un'opinione diametralmente opposta e diede degli Astroni questa erronea e perniciosa descrizione (pag. 526 del III vol. dei *Gesamm. Schr.*): « On rencontre le trachyte en masse dans plusieurs endroits, surtout entre la solfatare de Pouzzol et la mer; mais son apparition au milieu du beau cratère de soulèvement d'Astroni est du plus grand intérêt et en même temps fort remarquable. Ce cratère singulier est entièrement entouré de couches de tuf, qui, au lieu d'être horizontales, s' inclinent ici vers l'extérieur tout autour du cratère même. La tête de ces couches forme à l' intérieur des exarpements souvent presque perpendiculaires. Du milieu du fond s' élève de nouveau une colline en forme de dôme arrondi jusqu' à la hauteur de deux cents pieds, et cette colline n'est qu' une masse solide du plus beau trachyte blanc grisâtre à cristaux de feldspath et d'amphiboles nets et brillants. Il est donc clair, que les couches de

tuf ont été rejetées de côté par le gonflement et le soulèvement de ce dôme de trachyte. Si les forces volcaniques avaient suffi pour le faire dépasser le bord des tufs du cratère, il se serait formé un Puy-de-Dôme, un Chimboraço; et si ces forces avaient eu assez d'intensité pour s'ouvrir une communication par ce dôme et pour former à sa cime un cratère, un véritable volcan aurait paru dans ces environs. et le Vésuve n'aurait plus eu d'éruption. Le Monte Nuovo, sorti de terre en 1538, n'a pas pu faire paraître le trachyte caché au-dessous de son cratère; mais le reste est parfaitement semblabe à Astroni. C'est aussi un cratère de soulèvement, dont les côtés sont formés de couches de tuf blanc, inclinées comme la surface du cône même. C'est à tort qu'on le croit formé par éruption et de matières incohérentes, de scories et de ponces. Les couches solides de tuf soulevées sont très visibles tout autour du cratère, et il n'y a que la surface extérieure qui soit composée de scories rejetées. Si donc on était tenté de douter de l'élévation des couches de tuf et du dôme de trachyte du cratère d'Astroni, le Monte Nuovo soulevé sous nos yeux en donnerait la preuve la plus convaincante et la plus certaine ». Abbiamo riportato per intero questo brano, perchè esso, oltre a costituire una delle cause di traviamento della geologia vulcanica in generale, è stato poi particolarmente il falso principio, da cui sono derivate e derivano molte erronee descrizioni degli Astroni. Queste false vedute di Astroni furono poi da von Buch nell'altro lavoro *Ueber Erhebungskratere und Vulkane* (pag. 301 del IV vol. dei *Gesammelte Schriften*) anche ulteriormente elaborate ed analizzate.

Mentre von Buch pubblicava e col credito del suo nome diffondeva queste vedute, girava (tra il 1829 e 1832) per l'Italia meridionale e la Sicilia Friedrich Hoffmann, le cui *Geognostische Beobachtungen* furono poi raccolte e pubblicate nel 1839 da von Dechen. A pag. 221 di tal volume Hoffmann descrive gli Astroni, nota l'inclinazione degli strati verso la parte interna del cratere, osserva che questi strati sono composti di pomici e altri materiali frammentarî, accenna alla presenza d'un eventuale piccolo cratere tra le colline centrali e descrive la trachite della parete orientale, che dice costituita da feldspato vitreo, mica, augite e scarsa olivina. Le osservazioni analitiche di Hoffmann, sempre molto coscienziose ed esatte, sono, è vero, generalmente superficiali e pedestri, ma hanno in compenso il pregio di non esser mai influenzate da alcuna idea preconcetta di indole teorica.

Nel 1836 si pubblicava anche, a Parigi, il *Voyage pittoresque à Naples et en Sicile* di R. Saint Non, nella tavola 223 del quale è data una veduta degli Astroni, molto fantastica però e inferiore assai a quelle di Hamilton.

Siamo così giunti al principale illustratore dei Campi Flegrei, ad Arcangelo Scacchi, il quale prima nelle sue *Lezioni di Geologia*, stampate a Napoli nel 1843, e poi nelle ben note *Memorie geologiche sulla Campania*, pubblicate anche a Napoli nel 1849, diede del cratere di Astroni quelle descrizioni e sezioni geologiche, che fino al giorno d'oggi sono state sempre ripetute da tutti coloro, che si sono occupati di quest' argomento. Egli osservò, che la massa di trachite incastonata nella parete orientale doveva essere di formazione anteriore al cratere di Astroni e quindi non aveva potuto pigliare nessuna parte nel presupposto sollevamento di questo, e che viceversa le trachiti del fondo, parte massicce e parte

in correnti scoriacee, rappresentano prodotti di eruzioni centrali posteriori, estranee anch'esse al sollevamento immaginato da von Buch, il quale viene così a perdere ogni ragion d'essere. Malauguratamente però Scacchi nella II tavola delle *Memorie geologiche sulla Campania* diede degli Astroni una sezione, in cui le masse centrali di trachite, apparendo come legate alla laterale, sembrano formare veramente una grande cupola lavica, ben capace di sollevare la scarsa quantità di tufo su essa poggiata. Così pure egli ripetette e maggiormente diffuse l'errore, che la maggiore collina centrale, l'Imperatrice, fosse composta di trachite compatta, mentre già Braucci e Breislak aveano riconosciuto trattarsi di semplici ammassi di tufo misto ad altro materiale frammentario. A ogni modo queste descrizioni di Scacchi restano finora le più complete che si abbiano sul cratere di Astroni.

Le descrizioni di Scacchi, con le relative figure, furono poco più tardi riprodotte, in tedesco, da J. Roth nel suo libro *Der Vesuv und die Umgebung von Neapel*, Berlin 1857, senza però aggiungervi nulla di nuovo.

Nel 1862 Poulett Scrope, publicando la seconda edizione della sua celebre opera *Volcanos*, a pag. 322 diede una breve descrizione di Astroni, per combattere la teoria del sollevamento, dimostrando, che le lave del fondo non potettero formarsi che alla fine delle eruzioni, le quali aveano creato il cratere, e che le inclinazioni quaquaversali degli strati di tufo formanti il cono oscillavano da 15° a 35°, al pari di tutti i vicini coni tufacei e con la stessa irregolarità nei caratteri dei giacimenti, che necessariamente accompagna queste ejezioni frammentarie. Anch'egli però s'ingannò, nel ritenere che le colline interne fossero tutte composte da cupole di lava trachitica.

Non così John Phillips, che nel suo bel volume *Vesuvius*, Oxford 1869, pag. 213, riconobbe, che la cinta esterna del cratere di Astroni è separata mediante un atrio dalla massa centrale, la quale a sua volta è rappresentata da una duplice collina, costituita da alquanta trachite, ma più da tufi e ceneri, con pomici e ossidiane. Egli peraltro, quantunque avesse fatto questa giusta osservazione, rimase indeciso tra l'opinione di von Buch e quella di Lyell sull'origine dell'antico cratere.

Nello stesso anno (Lille, 1869) Gosselet, pubblicando le sue *Observations géologiques faites en Italie*, diede anche in esse un breve cenno (p. 17) e una esatta sezione (tav. IV, fig. 7) di uno dei fianchi del cratere di Astroni.

Nel suo piccolo ma interessantissimo schizzo geologico *Der Vesuv*, Berlin 1873, G. vom Rath descrisse gli Astroni con giusto entusiasmo: « Astroni, un bacino circolare, selvoso, è uno dei più belli crateri del mondo. I varii, magnifici alberi cinti di piante rampicanti, un piccolo lago giù nel fondo, il vallo craterico limitante all'intorno lo sguardo, la silente pace, interrotta solo dal canto degli uccelli, concedono all'estinto cratere un grande incanto ». Egli inoltre, oppugnando la teoria del sollevamento, scrisse che il cratere di Astroni, al pari di quello del Monte Nuovo, è costituito da materiale eruttato, il quale nel cadere s'è stratificato corrispondentemente al pendio.

Roth in una noticina *Zur Geologie der Umgebung von Neapel* (Monatsber. d. Ak. d. Wiss. in Berlin; Gesammtsitzung von 10 Nov. 1881) riferì di aver

visto sull'orlo del cratere di Astroni, presso Torre Lupara, dei frammenti di roccia, che esternamente rassomiglierebbero ai frammenti di sanidinite leucitica, da lui trovati nei tufi del Vomero. In questa stessa nota v'è una lunga descrizione delle rocce di Vivara, da noi non conosciuta quando scrivemmo il lavoro sul *Cratere di Vivara* (Atti di questa Accademia, vol. X, 1900), in cui peraltro non ci è che una ricca confusione, senza che si arrivi neanche a stabilire la presenza a Vivara delle rocce basaltiche, che erano state già riconosciute da Abich e che sono state poi dettagliatamente descritte da noi.

Nello stesso anno 1881 J. W. Judd nel suo volume sui *Volcanoes*, p. 170, espose sugli Astroni una nuova e falsa veduta, che cioè la cinta esterna di questo vulcano non rappresenti che la base d'un cono eruttivo, di cui la cima fu troncata e squarciata da una subitanea esplosione, la quale diede luogo alla formazione del grande cratere: qualche cosa di simile ai Maare del Reno e ai crateri-laghi dei vulcani laziali. Tale bizarra idea è senz'altro refutata dagli strati costituenti il vulcano che, come qui appresso si vedrà, inclinano egualmente tanto dalla parte esterna che dalla interna del cratere.

In quest' ultimo lasso di tempo vengono intanto quasi del tutto a mancare delle osservazioni di indole particolare sul cratere di Astroni, e i libri si limitano a riportare le antiche descrizioni di Scacchi e di von Buch, col solito errore della cupola centrale di trachite. Così, ad esempio, Mercalli in *Vulcani e fenomeni vulcanici d'Italia*, Milano 1883, Reyer nella *Theoretische Geologie*, Stuttgart 1888, p. 114, Neumayr nel I volume, p. 183, dell'*Erdgeschichte*, Leipzig 1890, Zirkel nella seconda edizione del *Lehrbuch der Petrographie*, Leipzig 1893-94, vol. II, p. 380, ed altri ancora parlano sempre della grande cupola trachitica dell'interno degli Astroni.

Eccezione fanno le ricerche originali di Lacroix, che a pag. 326 del suo volume su *Les enclaves des roches volcaniques*, Macon 1893, descrisse i blocchi a humboldtilite del fondo del cratere, e gli studî di Pampaloni, che nella sua nota su *Le roccie trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei* (Rendiconti Acc. Lincei, 1° sem. 1899) fece la descrizione microscopica di alcuni campioni di lava raccolti dal prof. Carlo De Stefani.

Nel 1896 uno di noi, nei suoi *Studî di geologia nell'Appennino meridionale* (Atti di questa Accademia, serie 2ª, vol. VII) fece notare, a pag. 95, che il cratere di Agnano, il quale è il più antico dei vulcani centrali dei Campi Flegrei, ha dato, oltre alla lava del monte Spina, anche un'altra grossa massa trachitica, la quale, impigliata poi nelle posteriori eruzioni del cratere di Astroni, appare ora come un grosso picco contenuto nella parete orientale di questo vulcano; e che questo a sua volta ha avuto anche esso una storia molto complessa, perchè la interna collina dell'Imperatrice non è formata da una cupola trachitica, come generalmente e a torto si ritiene, bensì da un cono eruttivo centrale, composto di tufi, pomici e scorie da cui si versarono delle colate di lava sul fondo del cratere.

Nell'anno seguente, in The Geographical Journal of London (October, November 1897) comparve un bel lavoro di R. T. Günther, *The Phlegraean Fields*, su cui avremo occasione di tornare qui appresso, il quale, pur essendo di natura prevalentemente geografica, rappresenta finora uno dei migliori contributi alla conoscenza geologica dei Campi Flegrei.

Similmente W. Deecke nel suo eccellente, recentissimo *Geologischer Führer durch Campanien*, Berlin 1901, riassume egregiamente tutte le conoscenze geologiche, che si hanno finora su queste contrade, e dà anche poi nell' insieme un utile e pregevolissima guida geologica di tutta la Campania.

Tali conoscenze si avevano degli Astroni, quando noi abbiamo intrapreso lo studio di questo cratere, passandovi, nell'estate e nell'autunno del 1901, delle giornate mirabili, per la gioia di vedere a poco a poco sotto i nostri occhi risorgere il diruto edificio dell'estinto grandioso vulcano, e per la serena pace, che si gode dentro i recessi della fitta foresta, ondeggiante nella conca del profondo cratere. Le grandi querce e le ilici negre, non straordinarie di grossezza e di vecchiaia, ma piene di libera, naturale maestà, sono avvolte da sì fitte cortine di edera e affondano i loro tronchi in una così densa e lussureggiante macchia di roveti inestricabili e di felci gigantesche, tra cui brulica e ronza una così intensa manifestazione di bassa vita animale, che, aggiuntavi l'afa enorme del caldo, che s'accoglie nel chiuso cratere, e la visione del piccolo lago tutto coperto di ninfee, si ha addirittura l' impressione di trovarsi in una selva tropicale. Certo tale condizione di cose, se è bella per gli occhi e rallegrante per lo spirito, non è poi molto favorevole alle ricerche geologiche, specialmente nel fondo del cratere, in cui il roveto è così fitto, da divenire in alcuni punti addirittura insormontabile; e in altri punti, anche se si riesce a passare lasciando sulle spine tracce di pelle e di vesti, nulla si scorge, per il grosso, benefico mantello di humus che copre il suolo. Il bosco si va ora però anno per anno tagliando in sezioni successive, in modo che ogni anno si ha una nuova zona scoperta; e quando sarà tagliata la plaga del fondo, allora sarà forse possibile scorgere nella parte centrale qualche dettaglio, che a noi è rimasto celato dalla folta vegetazione annosa, nel suo pieno rigoglio estivo. Ciò malgrado confidiamo di poter dare in questo lavoro un quadro il più che possibile completo della natura dei materiali, che compongono il cratere di Astroni, della maniera, come essi sono compaginati e architettati, delle loro relazioni con i vulcani limitrofi e del più probabile tempo e modo di loro genesi.

I.

I MATERIALI

I materiali eruttati dal cratere di Astroni si stendono per un'ampia area sulla superficie dei Campi Flegrei. Infatti, se si pensa che nel 1872 e nel 1538 le ceneri, eruttate rispettivamente dal Vesuvio e dal Monte Nuovo, piovevano abbondantissime a Napoli, e che nell' eruzione che sepellì Pompei la caduta delle ceneri a Miseno era così fitta, a quanto riferisce Plinio il giovane, che non era possibile discernere le genti a pochi passi di distanza, e se si pon mente alla diffusione dei materiali esplosivi eruttati dalla montagna Pelée sulla Martinica nel suo recente vistoso cataclisma di questo mese di maggio, si comprende senz' altro a quale distanza e in quale quantità dovevano essere deposti i materiali più minuti eruttati dalle straordinarie esplosioni, che han dato origine al nostro colossale cratere. Grande parte quindi dei tufi grigi e delle pozzolane incoerenti, che nelle colline di Napoli si adagiano discordantemente sul tufo giallo, già denudato ed eroso,

devono provenire dagl' incendî degli Astroni, quantunque non sia agevole stabilire quanta parte di essi propriamente spetti alle eruzioni di questo e quanta a quelle dei crateri di Agnano, Solfatara, Campana, Cigliano, Averno, Baja, Santa Teresa, Monte Nuovo etc. etc., che hanno dato press'a poco consimili materiali. C'è però tra questi depositi grigi incoerenti uno straterello di lapilli manganesiferi, di caratteristica tinta violacea, il quale provenendo certo dagli Astroni, come qui appresso si vedrà, permette di seguire i depositi di questo vulcano per varî punti dei Campi Flegrei, fin sull'alto dello sperone dei Camaldoli, che domina tutto il gruppo.

A ogni modo non sono i materiali diffusi su ampia area quelli che debbono formare oggetto precipuo del nostro lavoro; giacchè questo piglia in considerazione solo il materiale più grosso e abbondante, accumulatosi immediatamente intorno alla bocca d'eruzione, a formare il grande cono craterico, a cui specialmente compete il nome di Astroni. Questo cono craterico, che è compreso tra i fondi dei laghi di Agnano e di Pianura da un lato e tra i coni eruttivi della Solfatara, di Cigliano e di Campana dall'altro (vedi la qui annessa carta geologica nella tav. VII), e che dal livello del mare sale fino a 250 m. su di esso, occupa col complesso di tutta la sua massa maggiore un'area di 7 chilometri quadrati circa. Su quest'area i materiali eruttivi si sono ammassati a costituire un cono largo e depresso, troncato superiormente e squarciato internamente da un ampio e profondo cratere, sul cui fondo sorgono minori colline, formate dal medesimo materiale, e separate mediante un vasto atrio annuliforme dalla grande cinta esteriore, le cui pareti si innalzano tutt' intorno a guisa d'un immenso anfiteatro: un Colosseo di gigantesche proporzioni. Siccome tali singole parti, cioè l'anfiteatro esteriore, l'atrio e le interiori colline, rappresentano in quest'unico edificio degli Astroni membri alquanto diversi l'uno dall'altro per morfologia, struttura e genesi, è bene descrivere partitamente per ciascuna di esse i rispettivi materiali costituenti.

1.

La grande cinta ad anfiteatro

La parte maggiore dei materiali eruttati dal cratere di Astroni si è ammassata tutt'intorno alla bocca d'eruzione, a formare una vasta cinta a forma di anfiteatro, di cui i fianchi esteriori si sono plasmati sulle ineguaglianze già esistenti nel suolo circostante, mentre la parte interiore ha serbata quasi intatta l'impronta e la forma impartitale dall'atto creativo: così che ora all'esterno s'espande un cono di forma piuttosto irregolare e difficile a prima vista a intendersi, mentre all'interno s'apre un cratere perfettissimo.

Le pendici esteriori sono più intatte e pure del lato prospiciente il lago di Agnano, dove da un livello di circa 10 m. sul mare salgono dolcemente fino a 150 m. circa, con la inclinazione e la curva normale d'un qualunque cono eruttivo di materiale frammentario; ma non così netto è invece il distacco dal vulcano della Solfatara, sulla cui cresta settentrionale, alta già 200 metri, l'apice più elevato degli Astroni, quello di Torre Nocera, si rileva appena di 51 metri mediante un dorso a inclinazione lievissima; e similmente anche minore d'un centinaio di metri è il rilievo sulla linea di contatto con i vulcanetti di Cigliano

e di Campana; mentre l'apice settentrionale di Torre Lupara, alto 241 m. sul mare, s' innalza addirittura poco più di trenta metri sull'orlo della cinta antica del cratere di Agnano (vedi gli annessi profili delle parti seconda e terza e la carta geologica della tav. VII); invece nelle insenature intercorrenti tra la cinta di Agnano e quella di Campana, tra questa e il Cigliano e tra il Cigliano e la Solfatara il cono di Astroni si espande con grandi lembi verso il piano, senza però mai raggiungere il basso livello rappresentato dal fondo dell'antico lago di Agnano.

Quando da queste dolci ed ondulate falde del vulcano si sale verso la sommità, a qualunque punto di essa si giunga, si rimane subito quasi esterrefatti, nel vedere d'improvviso spalancarsi sotto i piedi le fauci immani di un ampio e profondo cratere, di cui all'esterno neppure si sospettava l'esistenza. Questo cratere ha la forma precisa di un grande anfiteatro ellittico, con l'asse maggiore diretto quasi da oriente a occidente e il minore quasi da settentrione a mezzogiorno, con gradinate a cunei, scendenti abbastanza ripidamente verso l'arena del fondo. L'orlo superiore di quest'anfiteatro è fatto a guisa di sottile cresta sinuosa (vedi panorama della tav. VI), che oscilla tra un limite minimo di 100 m. sul mare, dato dalla spaccatura dell'ingresso, e un massimo di 251 m., rappresentato dal culmine di Torre Nocera, mantenendosi a un'altezza media di 200 m. sul mare. Quest'orlo superiore ha l'asse maggiore di 2000 metri e il minore di 1500 metri di lunghezza. L'orlo inferiore invece, che limita e circuisce l'arena del fondo dell'anfiteatro craterico, misura circa 1500 metri nell'asse maggiore e 1000 nel minore. Siccome il fondo del cratere in alcuni punti si trova appena a una diecina di metri sul mare e nel resto varia tra venti e cinquanta, ne risulta che l'altezza media delle interne pareti è di 150 metri, mentre la massima, sotto Torre Nocera e Torre Lupara, arriva fino a 200 metri: offrendo così un superbo spettacolo, sia che si ammiri il cratere dall'alto o che lo si guardi dal basso.

Qualunque punto ora si esamini di questa grande cinta esteriore, dessa si trova uniformemente e quasi identicamente da per tutto costituita da tufi, ceneri, lapilli, pozzolane, pomici e altri materiali eruttivi frammentarî, sottilmente e nettamente stratificati, in cui restano inclusi blocchi rigettati e scorie eruttive, di dimensioni non eccessivamente grandi. Nessuna traccia si riscontra di colate laviche continue, ove si faccia astrazione da una grande massa di lava, incastonata nella parete orientale ed estranea per origine, come qui appresso si vedrà, alla compagine della cinta craterica. Questi diversi materiali naturalmente non sono bruscamente e nettamente staccati l'uno dall'altro ma, in virtù dell'eterna legge *natura non facit saltum*, sono vicendevolmente fusi mediante transizioni graduali di struttura e di giacimento; a ogni modo, per intenderne bene la natura, è necessario esaminare partitamente i principali tipi di rocce che in essi si riscontrano.

A.

Agglomerati e Tufi

Le ceneri e i lapilli, e tutti i materiali frammentarî più minuti eruttati dagli Astroni, non sono rimasti perfettamente sciolti allo stato di pozzolane o di sabbie, così come quando per la prima volta si accumularono intorno al cratere, ma, ce-

mentati dalle acque, filtranti attraverso di essi, e constretti dalle pressioni secolari su essi esercitatisi, hanno costituito generalmente degli agglomerati, che in prevalenza sono piuttosto molli e poco coerenti, ma qualche rara volta hanno acquistato una compattezza tale, da emular quasi i tufi durissimi e consistenti di altri più antichi crateri.

In generale, su qualunque punto della cerchia di Astroni si ponga il piede, si vedono sempre (vedi fig. 1 e 2 della tav. II e fig. 2 della tav. IV) questi agglomerati soffici, grigi, costituiti da ceneri, lapilli, piccole pomici etc., e sempre nettamente stratificati, costituire tutta la compagine della grande cerchia craterica. Alcuni di questi strati, per certi loro caratteri speciali, chimici e geologici, saranno qui appresso descritti a parte, perchè hanno particolare interesse nello stabilire la diffusione dei materiali eruttati dagli Astroni. Tralasciando ora di fare una descrizione degli agglomerati più comuni, diamo solamente pochi cenni di alcuni di essi che hanno raggiunto un grado notevole di consistenza e compattezza.

***

Questi tufi compatti si trovano generalmente nella parte inferiore e più bassa degli strati costituenti la parete interna dell'anfiteatro, e forse si continuano tutt'all'ingiro di essa, quantunque in tre punti soli noi li abbiamo meglio che altrove visti sviluppati: e cioè nella parete interna sud-ovest, propriamente alla base dello sperone di Torre Nocera, e nella parete orientale, ai due lati della grande massa della Caprara.

Nello sperone di Torre Nocera essi costituiscono una pittoresca rupe scoscesa, che col suo colore chiaro spicca tra il verde cupo degli elci salienti su per la ripida parete. Quivi essi hanno colore prevalentemente grigio, eguale a quello degli altri agglomerati, sono pieni di piccole pomici, di lapilli, di rocce trachitiche, scoriacee e compatte, e di frammentini di cristalli di feldispato, di augite, di mica, e formano degli strati compatti e sonori sotto i colpi del martello, che li può rompere in pezzi ben definiti senza sgretolarli.

La massa di questi tufi consta di sostanza grigio-giallognola, assai torbida e decomposta in modo che non è riconoscibile la sua originaria natura, ma che sembra essere costituita da un impasto di ceneri pomicee: l'aspetto è terroso e fra i prodotti secondari è frequente la calcite. In questa massa sono sparsi numerosissimi frammenti di minerali e di lapilli, di pomici, di ossidiane, di scorie, di trachiti; e tanto i frammenti di minerali isolati quanto i minuti lapilli rocciosi, ma sopratutto i primi, sono in questi tufi abbondantissimi, e ad essi è in parte dovuta la loro compattezza.

Fra i minerali predominano i *feldispati*; segue per abbondanza l'*augite* e, in minor copia, la *biotite*, la *magnetite titanifera* e l'*apatite*. Non notammo nè l'olivina nè la leucite: minerali che pure entrano con una certa frequenza nei blocchi impigliati in questi stessi tufi, e che descriveremo in seguito.

Fra i feldispati l'alcalino predomina su quelli di Ca e Na, non di molto però, essendo anche questi ultimi abbondanti. Sono rari i cristalli completi di *feldispato alcalino*; per lo più si tratta di frammenti di varie dimensioni, dalle schegge

minutissime di frazioni di millimetro ai cristalli tabulari secondo (010), di 1-2 mm. di lunghezza secondo a. In base agli indici di rifrazione ci sembra di poter affermare, che questo feldispato alcalino stia tra il tipico *sanidino potassico* e l'*anortose*. È noto infatti come nei feldispati alcalini la rifrazione aumenta coll'aumentare della quantità di sodio in essi contenuta. Il valore di γ (per la luce gialla) da 1.525 pel sanidino potassico arriva a 1.529-1.530 nell'anortose tipico. Da ripetuti confronti con essenze delle quali di volta in volta veniva determinato l'indice di rifrazione mediante un refrattometro Abbé-Pulfrich, e tenendo esatto conto della temperatura, constatammo che il valore γ. del feldispato alcalino di questi tufi, è compreso, per la luce gialla, tra 1.526 e 1.527, e nella maggior parte dei casi è all'incirca eguale a 1.527. Sembra quindi un *sanidino sodico* come infatti le ricerche analitiche confermano. Questa varietà leggermente sodica pare sia il feldispato alcalino diffuso nei tufi della Campania, come confermerebbero anche le analisi fatte da Ricciardi pel sanidino dei tufi di Sarno e Baronissi (v. Deecke, *Zur Geologie von Unteritalien*, N. J., 1891, II, p. 306), quantunque queste analisi si debbano con ogni probabilità riferire a materiale piuttosto impuro. Non ci avvenne di osservare lamine di feldispato alcalino nelle quali il valore di γ fosse superiore a 1.527, e si può quindi escludere la presenza dell'anortose tipico.

I *feldispati di Ca* e *Na*, che, come già avvertimmo, sono in questi tufi notevolmente frequenti, appartengono a miscele basiche. La maggior parte dei cristalli consta di miscele comprese tra la *labradorite* e la *bitownite*, essendo gli indici di rifrazione compresi tra 1.551 e 1.576. Fra esse abbondano maggiormente le miscele vicine alla bitownite con

$$1.576 > \gamma' > 1.566 > \alpha',$$

indicando con γ' e α' gli indici di rifrazione compresi tra γ e β e, rispettivamente, tra α e β. In tutti i cristalli è marcatissima la struttura zonata e la periferia è costituita da miscele non più acide dell'andesina basica-labradorite ($\alpha' = 1.554$). Il nucleo poi dei maggiori cristalli si avvicina all'anortite:

$$\gamma' => 1.576;$$

e, benchè raramente, pure è dato talora constatare che γ' è nettamente superiore a 1.576 e α' è di poco inferiore a questo valore: rifrazione questa caratteristica per una miscela basica a 85-90 % di anortite. Anche i valori dell'estinzione, misurati sia in geminati doppi secondo le leggi di Carlsbad e dell'albite, che su lamine di sfaldatura (010) e (001), confermano questa diagnosi. Le sezioni secondo (010) mostrano generalmente quattro zone distinte, e talora si osserva che la zona più acida II, labradoritica $Ab_1 An_1$, è intermedia tra un mantello esterno I, di labradorite $Ab_2 An_3$, e un nucleo più basico IV, di bitownite-anortite, ripetendosi (III) la zona periferica intorno al nucleo basico, come risulta dai seguenti valori dell'estinzione:

zona	I	$a\alpha = 22°$	55 %	*An*
»	II	» = 17°	50 %	*An*
»	III	» = 22°	55 %	*An*
»	IV	» = 36°-38°	80-85 %	*An*

Lamine di sfaldatura secondo (001) mostrano le seguenti caratteristiche estinzioni:

6°-7°	= labradorite
12°	= labradorite-bitownite
22°-26°	= bitownite
32°-33°	= bitownite-anortite

ed è appunto in queste ultime lamine con a$\mathfrak{a}$ = 32°-33° che si notano i maggiori valori degli indici di rifrazione con $\gamma' \gg 1.576 > \alpha'$. Riassumendo: i feldispati di *Ca* e *Na* dei tufi di Torre Nocera appartengono a miscele, che dalla labradorite acida $Ab_1\,An_1$ arrivano all'*anortite*, con notevole prevalenza delle miscele *labradorite-bitownite*. Abbiamo insistito su questa diagnosi perchè, come vedremo in seguito, questi sono appunto i feldispati di *Ca* e *Na*, che con notevole abbondanza entrano in tutti i materiali di Astroni.

Il sanidino in parte è limpido, privo o povero di inclusioni vetrose; alcuni cristalli invece ne sono zeppi. Così dicasi pei feldispati di *Ca* e *Na*; quantunque in questi le inclusioni vetrose siano più abbondanti e costanti.

Tra i minerali colorati l'*augite* prevale notevolmente sulla biotite. È un augite di colore verde non molto intenso e si presenta in cristalli prismatici oppure in frammenti irregolari sparsi nel tufo. In lamine di sfaldatura (110) misuriamo

$$c\mathfrak{c} = 41°\text{-}45° \quad \text{e su (010)} \quad c\mathfrak{c} = 48°\text{-}50°.$$

Questo pirosseno è la varietà maggiormente diffusa nelle lave di Astroni.

La *biotite* forma laminette esagonali, intensamente brune; è una mica di seconda specie, coll'angolo apparente degli assi ottici 2E compreso tra 34° e 40°. Nelle varietà più oscure l'angolo è alquanto minore. Con eccezionale scarsità si trovano anche sparse in questo tufo piccole laminette di biotite, più chiara della precedente, di un vivace colore giallo bruno rossastro, a fortissimo angolo degli assi ottici, raggiungendo 2E 80° e 85°. Lamine basali di questa mica mostrano un notevole pleocroismo $\mathfrak{c} > \mathfrak{b}$; $\mathfrak{b}$ = giallo oro; $\mathfrak{c}$ = rosso bruno intenso. Questa mica, come vedremo in seguito, è frequente nelle lave scoriacee e compatte di Pagliarone e della Rotondella; in questi tufi, ripetiamo, è rarissima, come abbiamo accertato mediante la separazione dei componenti da un grosso blocco di tufo. Osservando al microscopio un preparato, costituito soltanto da mica isolata dal tufo, sopra cento o duecento lamelle di biotite bruna se ne trovano soltanto una o due appartenenti alla varietà a forte angolo degli assi ottici [1]).

L'*apatite* non è molto frequente; abbondante è invece la *magnetite*, che dà forte reazione del titanio.

Fra i minuti lapilli, che entrano nell'intima costituzione di questi tufi, abbondano sopra gli altri le pomici: costituite quasi intieramente da vetro chiaro,

[1]) Questi valori, misurati mediante la lente di **Klein** applicata all'oculare **Czapsky**, sono soltanto approssimativi; tuttavia anche nelle condizioni meno favorevoli, come è appunto il caso per molte lamelle di miche brune, si ottiene un'approssimazione di 2°-3°.

bolloso, incolore in sezioni sottili, nel quale sono sparsi rari microliti feldispatici ed augitici e rarissimi interclusi. L'indice di rifrazione del vetro pumiceo è nettamente inferiore a 1.524 e all'incirca eguale a 1.521, talora compreso tra questi due valori. Piuttosto frequenti sono pure i lapilli di ossidiane a vetro bruno, più o meno oscuro e a rifrazione eguale a quella del vetro delle pomici. Si nota una certa quantità di vetro di ossidiana a rifrazione leggermente inferiore a 1.521; scarso è il vetro a rifrazione eguale o di poco inferiore a 1.514. Come esporremo in seguito nella descrizione delle pomici e delle ossidiane, è il vetro delle pomici fibrose, sericee, che ha rifrazione eguale a quella del vetro incluso in questi tufi; mentre il vetro delle ossidiane e delle pomici scoriacee di Astroni ha rifrazione leggermente inferiore, che fa supporre una acidità alquanto maggiore. Si tratta però di differenze lievissime e che si riscontrano in differenti Schlieren di una medesima massa di pomice o di ossidiana. Questi valori sono invece tutti nettamente superiori agli indici di rifrazione dei vetri acidi liparitici. — Oltre ai lapilli di ossidiane bollose e compatte se ne notano alcuni di vetri a struttura perlitica. Meno frequenti sono i frammentini di jalotrachiti e di trachiti a massa ipocristallina, mentre sono più comuni i lapilli di trachiti basiche augitiche, olocristalline, a massa costituita essenzialmente da liste di sanidino con disposizione fluidale. Questi lapilli sono identici alle rocce, che costituiscono la maggior parte dei blocchi impigliati nei tufi incoerenti, che saranno descritti in seguito, e che vedremo appartenere a tipi intermedi tra le trachiti e le andesiti (vulsiniti). Vi sono rappresentati i tipi con e senza anfibolo bruno nella massa, e generalmente predominano le varietà sodalitiche. Si trovano poi frequenti i lapilli di rocce alquanto più basiche, di tipo trachidoleritico, ricche in sodalite e caratterizzate per la frequenza dei feldispati basici accanto al sanidino, a costituire la massa fondamentale. Rocce analoghe troveremo sparse, benchè raramente, fra i blocchi della grande cerchia del cratere.

Riassumendo: i *tufi compatti* che costituiscono la base dello Sperone di Torre Nocera sono ricchi non soltanto in frammenti di minerali diversi, fra i quali predominano il *feldispato alcalino*, le *miscele bitownitiche* e l'*augite*, accanto alla *biotite* all'*apatite* ed alla *magnetite*, ma anche da minutissimi lapilli di *pomici,* di *ossidiane*, di *trachiti* (vulsiniti) e di *trachidoleriti.*

***

Secondo giacimento di tufi compatti si osserva, come s' è detto, alla base della parete interna orientale, subito a nord della massa della Caprara, a cui tale giacimento resta lateralmente attaccato, in mezzo a un viluppo inestricabile di rovi. Questi tufi sono alquanto più gialletti dei precedenti dello sperone di Torre Nocera e sono prevalentemente costituiti da piccole pomici, assumendo quell' aspetto sferulitico, che si riscontra anche sovente nel tufo giallo di Posillipo e che è probabilmente dovuto all'aggregarsi delle ceneri intorno alle gocce di pioggia, da cui le eruzioni venivano accompagnate. Questi tufi sono assai più poveri in frammenti minerali dei precedenti e anche i lapilli di rocce compatte sono in essi assai più scarsi, mentre sono abbondantissime le pomici bollose o filamentose a vetro gialliccio

chiaro, povere in microliti e in interclusi feldispatici ed augitici. Per la prevalenza delle pomici possiamo distinguere questi agglomerati col nome di *tufi pumicei.*

I pochi lapilli trachitici sparsi in essi sono essenzialmente costituiti da trachiti olocristalline (*vulsiniti*), a interclusi di *sanidino*, di *labradorite-bitownite-anortite*, *augite* e più raramente di *biotite*. La maggior parte di essi appartiene a varietà sodalitiche. Fra i frammentini di minerali sparsi nel tufo predominano anche qui il *sanidino* ed i feldispati di *Ca* e *Na* appartenenti a miscele di labradorite-bitownite-anortite, poi l'augite che presenta i medesimi caratteri di quella del tufo precedente; assai scarsa appare la biotite bruna con 2E intorno a 40°, mentre non troviamo traccia, neppure mediante accurata separazione, di mica rossastra a grande angolo 2E. — Non manca nè la *magnetite titanifera*, nè l'*apatite.*

***

Infine, accosto al lato meridionale della medesima rupe della Caprara, a destra del sentiero, che sale serpeggiando dall'atrio verso la cresta dell'anfiteatro, si trova il giacimento dei tufi più compatti degli Astroni, formante una parete quasi strapiombante sul cratere, la quale mette una simpatica nota di giallo sul verde intenso della vegetazione circostante. Qui gli strati rigidi e forti dei tufi, zeppi di lapilli neri e di piccole pomici gialle cariolate, tinti di un delicato color giallo di paglia, rassomigliano così vivamente agli strati di tufo giallo di Posillipo, del Gauro, di Nisida etc, che a prima vista si può credere di aver da fare con un deposito estraneo ed anteriore al materiale eruttivo degli Astroni, il quale è quasi sempre grigio e incoerente; e solo l'esempio recente del Monte Nuovo, che offre dei casi simili, ci avverte, che in un vulcano di materiale frammentario non è impossibile una locale aberrazione dal tipo comune dei suoi depositi.

Questo tufo, ancor più di quello precedente della base dello sperone di Torre Nocera, è zeppo di frammenti feldispatici e augitici e di lapilli pumicei e trachitici, che dal diametro di frazioni di millimetro giungono alle dimensioni di una grossa noce. Fra i minerali predominano i feldispati, fra i quali accanto al sanidino, dai caratteri identici a quelli del feldispato alcalino dei tufi precedenti, sono assai abbondanti i feldispati di *Ca* e *Na*. Questi appartengono a miscele di labradorite-bitownite: e i maggiori cristalli, con marcata struttura zonale, sono costituiti da zone di labradorite e di bitownite con nucleo di anortite quasi pura (85-90 % *An*).

L'*augite* è assai abbondante, di colore verde bottiglia piuttosto chiaro, con $\widehat{c\mathfrak{c}} = 48° — 50°$ su (010). In alcune varietà assai chiare $\widehat{c\mathfrak{c}} = 43°$ su (010). La *biotite* è sensibilmente più scarsa che nei tufi del primo giacimento descritto. Va intieramente riferita alla varietà bruna con 2E = 40°-46°; sono rare le lamine con 2E = 50°-52°, mentre in altre, assai oscure, l'angolo è alquanto inferiore a 40°. Manca del tutto la mica rossastra a forte angolo degli assi ottici, e non ne trovammo traccia neppure isolando la mica contenuta in un grosso frammento di tufo. Si rinvengono invece, mediante la separazione dei componenti, alcuni granuli di *olivina*: minerale che è però eccezionale e raro in questi tufi e che con ogni probabilità proviene da qualche lapillo trachitico basico.

Tra i frammentini lapillosi predominano le pomici, mentre le ossidiane sono

meno frequentì, e in esse il vetro è bruno o gialliccio a rifrazione all'incirca eguale a 1.521, o poco diversa da questo valore, essendo sempre nettamente inferiore a 1.524 e superiore a 1.515. Altri lapilli sono costituiti da jalotrachiti e da trachiti ipocristalline con feldispati basici (vulsiniti ipocristalline); e non di rado appaiono aggregazioni di cristalli di augite con labradorite-bitownite, accompagnate da magnetite e da apatite, le quali costituiscono lapilli isolati, oppure sono immerse in un vetro bruniccio: essendo frammenti di segregazioni basiche delle ossidiane o delle vulsiniti dei blocchi impigliati nei tufi. Più frequenti sono i lapilli olocristallini (vulsiniti) a interclusi di sanidino, di labradorite-bitownite-anortite, di augite, talora con biotite e orneblenda bruna, e nei quali la massa è formata da liste di sanidino, con augite, talora con anfibolo e con predominio delle varietà sodalitiche. Non mancano lapilli di tipo trachidoleritico, fra i quali alcuni carichi di sodalite in piccoli cristalli idiomorfi.

Questi tufi compatti contengeno 51.80 % di SiO_2: acidità alquanto minore di quella dei lapilli pumicei, delle ossidiane, delle trachiti basiche e delle stesse trachidoleriti, che contengono, come vedremo in seguito, circa il 54 % di SiO_2.

Dopo che avremo descritte le pomici, le scorie, le ossidiane e i blocchi rigettati, che costituiscono tanta parte della grande cerchia del nostro cratere, apparirà con maggiore evidenza l'analogia fra la natura mineralogica di tale materiale frammentario e questa dei tufi compatti, i quali conservano quindi la caratteristica propria dei materiali di Astroni.

B.

Pomici

Il tipo di roccia predominante nel materiale eruttivo di Astroni è dato dalle pomici; le quali, a cominciare dai piccoli lapilli pumicei sparsi negli agglomerati e nei tufi, fino alle grandi bombe ovali o fusiformi, fragilissime, di più di mezzo metro di lunghezza, sono con tale varietà e abbondanza rappresentate, da poter quasi dire che tutta la grande cinta craterica non è che un gigantesco ammasso di pomici, le quali fanno valida testimonianza delle grandiose esplosioni, a cui questo cratere deve la sua origine.

Per tale ragione quindi le pomici di Astroni meritano uno speciale riguardo, e poi anche perchè esse hanno un aspetto caratteristico, per cui pure Scacchi nelle sue *Memorie geologiche sulla Campania* ne fece particolare menzione (pag. 55): « Di tal sorta di roccia (grossi pezzi di trachite bigiastra o cenerognola con singolare tessitura spongiosa, rimarchevole per i lunghi filamenti e per le sferiche bolle) non si incontra esempio in altri luoghi e però vuolsi considerare come particolare produzione degli incendî avvenuti negli Astroni ». In verità a noi pare, che non si tratti invece che di pomici, le quali hanno un particolare aspetto, corrispondente alla composizione chimica e alla struttura fisica del magma da cui provennero.

Nel nostro studio sul *Cratere di Vivara* noi abbiamo già fatto notare, come col variare della silice nel magma varii anche la struttura delle relative pomici, le

quali possono dare tutti i termini di passaggio, dalle pomici sericee riolitiche perfettamente fuse, come ci provengono da Lipari, fino alle scorie massicce basaltiche, appena rivestite d'una patina vetrosa. H. Abich nelle sue *Geologische Beobachtungen über die vulcanischen Erscheinungen* (Braunschweig 1841, pag. 62 e seg.) aveva cominciato a trattare ampiamente questo argomento. Egli aveva osservato, che ossidiane e pomici possono essere di natura e composizione diversissime: che se le terre e gli alcali determinano un miscuglio vetroso impuro e facilmente fusibile, si hanno pomici di colore sporco e spumose, mentre se la massa è ricca in silice e povera di basi, allora il vetro di forte fusione darà quelle ossidiane bianche, sericee, splendenti, finamente fibrose, che ricordano il vetro filato. A qualche cosa di simile aveva già accennato il nostro Ferrante Imperato nel suo libro *Dell' historia naturale* (Napoli 1599, pag. 589), scrivendo che: « l'esser la pomice più o meno spongiosa, segue la diversa operazione e possanza del calore, et il rassettamento che la materia nella diversità dell'operazioni piglia ». Se dunque già nel cinquecento si poteva attribuire la diversità delle pomici al diverso atto fisico, da cui eran prodotte, e al diverso assettamento della loro materia, non dobbiamo noi considerare queste rocce degli Astroni come qualche cosa *sui generis*, sull'esempio di Scacchi, bensì trovare il giusto posto, che per struttura fisica e composizione chimica ad esse spetta nella lunga serie delle pomici.

Le pomici di Astroni variano, come s'è detto, dalla piccolezza di poco meno di un pisello fino alla grossezza di bombe ovali o fusiformi di più di mezzo metro di lunghezza. Alla superficie hanno una patina più chiara e compatta, sovente anche imbiancata dalle ceneri, in cui sono immerse, o arrossata leggermente per ossidazione ferrica o per influenza di gas di fumarole. Tale patina esterna è talora formata da fibre vetrose soffici, bianche e a lucentezza sericea. Friabilissime e sgretolabilissime rivelano nell'interno una massa generalmente più scura, cenerognola fino a diventar bruna, quasi nera, largamente spongiosa per grosse bolle sferiche ed ovoidali, che si anastomizzano fra di loro mediante lunghi filamenti vetrosi. Le segregazoni cristalline in queste pomici sono piuttosto scarse, certamente più scarse che nelle scorie e nelle ossidiane, che descriveremo qui appresso, ma tuttavia più abbondanti di quelle, che generalmente si trovano nelle tipiche pomici acide liparitiche. — Tali cristalli, sparsi porfiricamente nel vetro bolloso, sono in gran parte da riferirsi ai feldispati e all'augite e in piccola parte alla biotite, alla magnetite ed all'apatite.

Il feldispato alcalino e quelli di *Ca* e *Na* hanno all'incirca eguale diffusione, e questi ultimi specialmente sono zeppi di inclusioni vetrose. Il *sanidino* è di tipo leggermente sodico, senza però presentare i caratteri dell'anortose ed è quindi della medesima natura del sanidino che descrivemmo quale componente dei tufi. I *feldispati* di *Ca* e *Na* appartengono a miscele comprese tra la labradorite e la bitownite basica; sopra (010) l'estinzione raggiunge 34° (75 % *An*). Predomina il tipo bitownite. L'*augite*, verde bottiglia, forma prismi generalmente piccoli con $\hat{cc} = 48°\text{-}50°$ su (010). Piuttosto scarsa la *biotite* bruna, come pure non abbondano i granuli di *magnetite titanifera* e i piccoli cristalli di *apatite*.

Il vetro, assai bolloso, è trasparente e incolore in lamine sottili; contiene scarsi microliti, costituiti da sottili listerelle di sanidino e da prismetti di augite

Il suo indice di rifrazione è all'incirca eguale a 1.515, talora anche leggermente superiore ma sempre nettamente inferiore a 1.521. — A volte si osservano porzioni di vetro, quasi Schlieren nella massa pumicea, a rifrazione alquanto superiore, che lascia supporre un leggiero aumento di basicità (n=1.521-1.524); ed è quasi sempre la patina esteriore sericea, che presenta questa leggiera divergenza dal tipo comune. Conviene qui notare, che l'indice di rifrazione del vetro delle pomici sericee liparitiche del Monte Pelato nell'isola di Lipari (con 73.7 °/₀ di SiO_2) è leggermente inferiore a 1.506. — Il vetro pumiceo di Astroni (58.35 °/₀ SiO_2) sembra della medesima natura di quello delle pomici di Vivara (n = 1.510-1.517), le quali tuttavia differiscono dalle pomici di Astroni e per la prevalenza dell'anortose, che è accompagnato da miscele acide oligoclasiche-andesiniche, e per l'assenza dei termini basici di *Ca* e *Na*.

Le pomici di Astroni mostrano il carattere chimico fondamentale dei prodotti magmatici di questo cratere: come risulta dall'analisi qui esposta e che confronteremo in seguito con quelle degli altri prodotti lavici.

SiO_2	58.35
TiO_2	0.30
Al_2O_3	19.83
Fe_2O_3	0.98
FeO	2.37
MgO	0.90
CaO	3.67
Na_2O	3.59
K_2O	9.10
H_2O	0.96
P_2O_5	tr.
Cl	tr.
	100.05

C.

Ossidiane

In confronto della ricchezza enorme di pomici si può dire che sia scarsissima negli Astroni la quantità delle ossidiane. Anche questa forma di vetro vulcanico presenta la caratteristica dei materiali del nostro cratere: esse sono di tipo trachitico basico (vulsinitico), che si distingue nettamente da quello delle forme vetrose delle lipariti e delle trachiti acide.

Nella sezione dell'ingresso, o in qualunque altro punto dell'anfiteatro craterico siano aperte delle sezioni negli strati, qua e là in mezzo ai tufi, alle pomici e alle ceneri si vedono rilucere, con splendore grasso e con colore nero o bruno fin quasi a giallo di miele, i frammenti di ossidiane, che dalla minutezza dei lapilli arrivano anche a volte a formare delle piccole bombe di trenta o quaranta centimetri di diametro. Queste bombe presentano anche qualche volta un accenno

a quella forma o segmentazione tetraedrica, che è classicamente sviluppata nelle colossali e magnifiche bombe di Vulcano e che, più vicino agli Astroni, è anche benissimo, quantunque in minori proporzioni, rappresentata nelle bombe dei Crateri di Campana.

Anche queste ossidiane degli Astroni, al pari delle pomici, hanno una patina esteriore bianchiccia o rosea, al disotto della quale immediatamente si rivela la pasta vitrea compatta, tutta consparsa di segregazioni piuttosto grandi di feldispati, e di altre meno frequenti e più piccole di augite. Qua e là si osserva qualche lamella di biotite.

I *feldispati*, come nelle pomici, vanno riferiti al sanidino e ai termini basici labradorite-bitownite-anortite. Il feldispato alcalino è del solito tipo con γ eguale o leggermente inferiore a 1. 527. Manca il tipico anortose. I feldispati di *Ca* e *Na*, in proporzioni di poco inferiori a quelle del sanidino, hanno rifrazione generalmente compresa tra 1.555 e 1.576. Nella maggior parte di essi γ' è uguale o leggermente inferiore a 1.576 (miscele con 60-70 % *An*) e non di raro anche alquanto superiore a detto valore (70-85 % *An*). È solo una stretta zona periferica che mostra $\alpha' = 1.555$ (labradorite Ab_1An_1). Molte volte anche la periferia è maggiormente basica. In una buona sezione secondo (010) misuriamo, riferendoci allo spigolo (010)(001):

periferia	$29\frac{1}{2}$	66 % *An*
stretta zona media	$31\frac{1}{2}$	70 % *An*
nucleo	$34\frac{1}{2}$	77 % *An*.

Ecco alcune estinzioni caratteristiche, dedotte da geminati doppi secondo le leggi di Carlsbad e dell'albite:

	I	II	
periferia	34	28	labradorite basica
nucleo	36	32	bitownite
periferia	$31\frac{1}{2}$	$28\frac{1}{2}$	labradorite
nucleo	$37\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{2}$	bitownite-anortite.
periferia	38	17	Ab_3An_4
nucleo	47	$22\frac{1}{2}$	bitownite

I feldispati, sopratutto i basici, sono zeppi di inclusioni vetrose.

L'*augite*, sparsa porfiricamente nel vetro delle ossidiane, ha gli stessi caratteri dell'augite delle pomici, con $\hat{cc} = 49$-50 su (010). — La *biotite* è piuttosto scarsa, le lamelle sono bruno-intenso e 2E poco si scosta da 40°. L'*apatite* e, sopratutto, la *magnetite* leggermente titanifera sono abbondanti.

Nel vetro sono sparsi finissimi microliti di augite e di feldispato alcalino in

quantità assai variabile; dai vetri neri, compatti, poco bollosi, quasi privi di segregazioni microlitiche, si passa a vetri assai ricchi in microliti. tra i quali talvolta predominano gli augitici, tal'altra i feldispatici. L'abbondanza di microliti nel vetro non è affatto in relazione colla frequenza degli interclusi. Vi sono ossidiane ricche in grosse segregazioni feldispatiche, a vetro compatto, uniforme, a rari microliti; altre poverissime in interclusi e a vetro piuttosto bolloso, che talora passa al tipo scoriaceo, sono ricche in microliti. I microliti feldispatici sono di tipo sanidinico; quelli pirossenici constano di augite verde alquanto più intensa di colore degli interclusi, in cui $\widehat{cc}$ raggiunge 54°. L'indice di rifrazione del vetro è eguale o insensibilmente superiore a 1.514-1.515; soltanto in alcune ossidiane a vetro molto oscuro e compatto detto valore è eguale a 1.520-1.521 (il vetro delle ossidiane di Vivara ha $n = 1.5105$). La rifrazione è in relazione col grado di acidità di questi vetri: una varietà compatta, povera d'interclusi, di ossidiana d'Astroni contiene:

$$57{,}98\ \%\ SiO_2$$
$$0{,}25\ \%\ TiO_2$$

Il vetro delle ossidiane liparitiche del Monte Pelato a Lipari, con 74-74.5 % di SiO_2, ha indice di rifrazione nettamente inferiore a 1.506 e alquanto superiore a 1.483.

Poco varî fra loro sono i tipi delle ossidiane di Astroni, essendo costante la loro composizione mineralogica e chimica. Si nota solo una variazione nella frequenza delle segregazioni cristalline sparse nel vetro e nel grado di compattezza di questo: dai vetri neri picei, quasi privi di bolle, sovente a struttura eutaxitica, si passa ai vetri bollosi, che si avvicinano ai tipi scoriacei e pumicei.

D.

Scorie

Alquanto più numerose e vistose delle ossidiane si riscontrano negli Astroni le scorie, le quali, pur essendo anch'esse abbastanza rare rispetto ad altri vicini crateri dei Campi Flegrei, si ritrovano a ogni modo sparse qua e là con una certa maggiore frequenza, costituiscono anche in alcuni punti dei piccoli banchi e raggiungono anche, e passano in qualche caso, il volume di un metro cubico.

Queste scorie di Astroni, ad eccezione di alcune scorie congiunte a lapilli manganesiferi, di color violaceo o rossiccio, che saranno qui appresso separatamente descritte, sono generalmente di color nero, compatte a volte e tenacissime sotto i colpi del martello, altre volte leggiere e d'una consistenza quasi tufacea, e in tal caso di color cenerognolo: come ad esempio se ne trovano lungo la Ngrogna (grugno), al disotto di Torre Lupara, nella parete interna settentrionale. Hanno di solito un nucleo più compatto, che passa gradatamente a una corteccia più scoriacea; non presentano strutture fluidali o pipernoidi e nulla offrono, all'aspetto esterno, di notevole o speciale rispetto alle comuni scorie vulcaniche.

La loro natura chimica e mineralogica è tuttavia in relazione con quella degli

altri materiali lavici di Astroni. Sono jalotrachiti basiche (vulsiniti) ricche in interclusi feldispatici, fra i quali abbondano tanto i grossi cristalli di feldispato alcalino, tabulari secondo (010) o allungati secondo lo spigolo (010 (001), quanto i più piccoli cristalli dei feldispati basici compresi tra la labradorite e la anortite, colla prevalenza di miscele bitownitiche. Su (010) le estinzioni più comuni sono comprese tra 33° e 36° (73-83 % di *An*). La periferia consta di miscele labradoritiche mentre il nucleo si avvicina grandemente all'anortite. Il feldispato alcalino è leggermente sodico e tale che ci sembra di poter escludere l'anortose tipico. Gl'interclusi di componenti colorati non sono frequenti, e tra essi predominano l'*augite* e la *biotite*. La prima è verdognola con $\widehat{c\mathfrak{c}}$ = 48°-50° su (010); manca l'egirina-augite e l'egirina, e soltanto il bordo di qualche piccolo intercluso augitico offre colorazione alquanto più intensa del nucleo, con lieve aumento di $\widehat{c\mathfrak{c}}$. Nelle jalotrachiti scoriacee della Ngrogna sezioni (010) di augite offrono $\widehat{c\mathfrak{c}}$ = 50°-52° alla periferia. La *biotite*, poco frequente, appartiene alla solita varietà bruno-intensa con 2E = 48°-52°: non riscontrammo la biotite rossastra a forte angolo degli assi ottici caratteristica delle lave del cratere centrale. Fra gli elementi accessori notiamo la *magnetite titanifera*, l'*apatite* ed in alcune scorie anche poca *leucite*. Più frequente, invece, fra i componenti la massa fondamentale trovasi la *sodalite*, la quale in talune scorie della Ngrogna e dell'Ingresso è notevolmente abbondante e appare anche in nette sezioni idiomorfe; generalmente tutte queste scorie presentano sensibile reazione del *Cl*, e per talune tale reazione è assai energica.

La massa fondamentale è essenzialmente vetrosa, e nel vetro bruniccio varia da scoria a scoria la quantità delle segregazioni microlitiche. In talune, nelle più compatte, i microliti sono maggiormente frequenti e si hanno tipi strutturali jalopilitici. Ai microliti di feldispato alcalino prevalenti si aggiungono pochi microliti augitici, di colore verdognolo, sovente più intenso dell'augite che forma gl'interclusi, e con $\widehat{c\mathfrak{c}}$ = 51°-57°. Nella massa poi è costante la *sodalite*, non sempre però bene individualizzabile al microscopio. — Strutturalmente e, fino a un certo punto, anche mineralogicamente, molte di queste scorie sono analoghe alle trachiti brune scoriacee di Pagliarone, delle quali diremo in seguito. Ne differisono tuttavia per l'assenza della mica rossastra a forte angolo degli assi ottici, per la mancanza di pirosseni gialli di tipo akmite nella massa, e per la maggiore abbondanza della sodalite.

a.

Scorie e lapilli violacei

Diverse in qualche modo nell'aspetto dalle scorie su descritte sono altre scorie di color rossiccio o purpureo, molto bollose e di consistenza alquanto vitrea, di cui un bel banco, di poco più d'un metro di spessore, si osserva nella parete destra della sezione dell'ingresso, dove col loro colore arrossato ed arso spiccano nettamente tra il bianco delle ceneri e delle pomici. Ivi, nel lato prospiciente l'interno del cratere, alcune fratture, con scorrimenti a gradinate, hanno messo a nudo una bella sezione, in cui è agevole osservare bene tale banco di scorie.

Esse a costituire il banco su accennato non sono sole, ma si trovano intimamente associate a pomici arrossate, frammenti di ossidiane e lapilli di una bella tinta violacea, che sono molto interessanti, perchè, dato il loro colore caratteristico e facilmente discernibile, si possono rintracciare in varî luoghi dei Campi Flegrei e danno così testimonianza dell'estensione occupata dai materiali eruttivi di Astroni. E infatti questi lapilli violacei si riscontrano anzitutto nella profonda e pittoresca cupa (ved. fig. 2 della tav. IV), che corre a oriente degli Astroni, tra le pendici esterne di questo cràtere e la cinta di Agnano: quivi i lapilli, portati a valle delle acque correnti e impastati quindi con altro materiale più chiaro, hanno una tinta più attenuata, ma in compenso costituiscono uno strato di 60-70 cm. di spessore, nettamente staccato dai tufi grigi e bianchi nei quali è incastonato (vedi fig. anzidetta). Gli stessi lapilli, più minuti, ridotti allo stato quasi di cenere e portati quindi lontano dai venti, hanno formato dei sottili straterelli, che si riscontrano in mezzo ai depositi vulcanici e sub-vulcanici della piana di Fuorigrotta, del lago di Agnano, dell'antico lago di Pianura, di quello di Soccavo, e perfino sulla sommità della collina dei Camaldoli, lungo le cupe che salgono da settentrione verso il convento, a più di 400 metri di altezza e a quattro chilometri di distanza dal loro luogo di origine.

La composizione e la struttura di queste scorie e lapilli rivelano una intima parentela con le rocce laviche della parte centrale del cratere, che noi esamineremo qui appresso: ed una conferma di questo fatto ci è fornita anche dal ritrovarsi inclusi in queste scorie dei frammenti di blocchi a humboldtilite, facellite e apatite, che noi troveremo largamente e abbondantemente inglobati nella lava scoriacea della bassa collina di Pagliarone.

Descriveremo qui brevemente le scorie pumicee rossastre, che costituiscono il banco che si osserva nella sezione presso l'ingresso, per parlare poi degli strati di lapilli violacei.

α. Scorie pumicee dell'ingresso

Queste scorie rappresentano un tipo di consolidazione vetrosa, che sta tra le tipiche pomici di Astroni e le ossidiane nere compatte già descritte. La massa vetrosa, nerastra o bruna, talora tendente al violaceo, spesso rossastra alla superficie, è assai bollosa, a fragili filamenti vetrosi raggruppati a fasci e anastomizzantisi fra loro, senza però formare quelle fibre delicate e sottili delle pomici e senza neppure raggiungere la relativa compattezza delle ossidiane bollose e alquanto scoriacee. Alla superficie di queste grosse scorie neppure si osserva la patina bianca o cenerognola, sovente costituita da soffici fibre vetrose, come avviene di riscontrare nelle pomici; essa conserva il carattere scoriaceo, oppure il vetro si fa più compatto e unito. — Queste scorie sono poi straordinariamente ricche in interclusi, sopratutto feldispatici. Molti fra i cristalli idiomorfi di sanidino misurano 1 cm. di lunghezza secondo l'asse [z] e sono tabulari secondo (010); alcuni misurano anche cm. 1.5-2, ma le dimensioni più comuni si aggirano intorno al $\frac{1}{2}$ cm., e fra i cristalli di queste dimensioni vanno annoverati anche i feldispati di *Ca* e *Na*. — Gl interclusi di augite e di biotite sono scarsi e poco appariscenti, confondendosi colla massa vetrosa nerastra.

Il *feldispato alcalino* ha i caratteri più volte ricordati, e così dicasi pei *feldispati* di *Ca* e *Na* che sono compresi tra la *labradorite* e l'*anortite*, con preponderanza delle *miscele bitownitiche*. La maggior parte dell'*augite* ha pure i medesimi caratteri dell'augite delle pomici e delle ossidiane con $\widehat{cc} = 48°$-$49°$ su (010). Vi sono tuttavia varietà alquanto più chiare con estinzione di poco inferiore ai valori citati, come pure si osservano piccoli cristalli prismatici allungati secondo [z], di colore verde giallognolo con $\widehat{cc} = 53°$-$54°$; e medesimo carattere ottico presentano i rari microliti augitici sparsi nella massa vetrosa.

Caratteristica è la *biotite* di queste scorie. Oltre all'essere alquanto più abbondante che nelle pomici e nelle ossidiane, è prevalentemente della varietà rosso bruna giallognola, a vivace colore rosso-giallognolo chiaro in sezioni sottili e coll'angolo apparente degli assi ottici compreso tra 76° e 86°. Il piano degli assi ottici è parallelo al piano di simmetria: è quindi una mica di seconda specie con $\rho < \upsilon$; $\mathfrak{c}$ = rosso bruno intenso, $\mathfrak{b}$ = giallo oro. Una biotite analoga a questa troveremo diffusa nelle lave scoriacee e compatte dei rilievi centrali di Pagliarone e della Rotondella: e ciò costituisce una conferma della parentela di questi banchi scoriacei con quelle rocce laviche. In minor copia si trova anche una biotite di color bruno più intenso con 2E = 70°, e in piccola quantità anche lamine con angolo minore che si aggira intorno a 50°-55°.

L'*olivina* è rarissima, sfugge generalmente all'esame delle sezioni sottili e soltanto se ne riscontrano pochi granuli fra quelli dei minerali pesanti, che si depongono dalla soluzione concentrata di Thoulet. La *magnetite titanifera* abbonda, mentre è piuttosto scarsa l'*apatite*. La *leucite* è anch'essa caratteristica per queste scorie, ma parimenti si trova in quantità assai piccola, rimanendo raramente compresa nel taglio delle sezioni sottili. Nella porzione che si separa dai liquidi pesanti subito dopo il sanidino, fra i frammentini vetrosi si ritrovano granuli di leucite colla tipica geminazione polisintetica (n. = 1.508). Il vetro, che essenzialmente costituisce queste scorie, è della medesima natura del vetro delle pomici e delle ossidiane di Astroni. Piuttosto bolloso, è di colore giallo paglia chiaro in lamine sottili, e il suo indice di rifrazione è eguale o leggermente superiore a 1.515, ma sempre nettamente inferiore a 1.521.

β. *Lapilli violacei*

I lapilli, che sottoponemmo all'analisi mineralogica, provengono da un sottile banco, compreso tra i tufi incoerenti della sezione dell'ingresso, che nettamente si distingue pel colore violaceo dai tufi grigi e cenerognoli che lo comprendono, e dal banco, più potente, della cupa, che corre tra le pendici esterne orientali di Astroni e la cinta di Agnano e che è raffigurato nella fig. 2 della tav. IV.

In questi lapilli conviene distinguere una parte finissima da una parte lapillosa propriamente detta. La prima è costituita da frammenti o da intieri piccoli cristalli isolati, frammisti a schegge vetrose di ossidiane, di scorie e di pomici, ed a frammentini costituiti da porzioni di massa fondamentale di trachite. I lapilli invece sono costituiti da frammenti di varia grossezza, ma che generalmente non sorpassano le dimensioni di un pisello, di rocce trachitiche, scoriacee e pumicee

diverse, i quali trovano i loro equivalenti fra i materiali di Astroni, sopratutto tra quelli dei rilievi centrali.

Fra i frammentini di minerali della parte fina predominano i *feldispati*, tanto l'*alcalino* quanto quella di *Ca* e *Na*. Il primo è *sanidino sodico* con $\gamma = 1.527$ (*Na*); in alcuni cristalli γ è lievemente inferiore a 1.527, in altri ne è invece di poco superiore, pur rimanendo però sempre minore del corrispondente indice di rifrazione dell'anortose delle trachiti anortoclasiche di Vivara, nelle quali $\gamma = 1.529$. Contiene sovente inclusioni vetrose. — I *feldispati* di *Ca* e *Na* appartengono a miscele basiche con esclusione dei termini acidi oligoclosio-andesina. Prevale la *bitownite*, avvicinandosi in taluni casi da un lato all'*anortite*, dall'altro alla *labradorite* $Ab_1 An_1$. Queste miscele più acide sono in questi lapilli meno frequenti delle più basiche. Gli indici di rifrazione sono infatti compresi generalmente tra i limiti seguenti:

$$1.577 > \gamma' > 1.556$$

e talora:

$$\gamma' > 1.577 > \alpha'$$

e con minor frequenza:

$$\gamma' < 1.566 \qquad \alpha' = 1.553.$$

Anche le misure dell'estinzione in sezioni orientate conducono ai medesimi risultati. Le inclusioni vetrose sono del pari abbondanti anche in questi feldispati basici.

Dopo i feldispati il minerale più frequente è il *pirosseno monoclino*, del quale si possono distinguere diverse varietà. Alcuni cristalli sono di tipo *diopside*, verde pallido anche in granuli grossetti, quasi incolore in frammentini ed in lamine sottili. Su (010) si ha $\widehat{cc} = 40°$. Questo pirosseno passa gradatamente, anche in un medesimo cristallo, ad *augite*, di color verde più intenso, che è il tipo predominante in questi lapilli come in tutti i materiali di Astroni, con $\widehat{cc} = 48°$-$49°$ su (010). Non mancano termini intermedi con $\widehat{cc} = 44°$-$45°$ pure su (010). In questi cristalli le facce del prisma {110} hanno generalmente maggior sviluppo delle facce dei pinacoidi {100} e {010}. Nel banco di lapilli violacei dell'ingresso oltre a questi pirosseni ve ne sono altri in prismi assai allungati e sottili, nei quali i pinacoidi {100} e {010} sono maggiormente sviluppati del prisma {110}. Questi cristalli presentano un color verde più intenso, sopratutto alla periferia, e su (010) si ha $\widehat{cc} = 56°$-$57°$. Rarissimi sono poi alcuni minutissimi prismi di color verde erba intenso, a forte birifrazione, nei quali l'estinzione nella zona prismatica raggiunge $\widehat{cc} = 70°$-$72°$. Coll'aumentare dell'angolo $\widehat{cc}$ aumenta anche il valore della rifrazione e la forza dalla doppia rifrazione, e inoltre il colore dal verde pallido diviene più intenso fino al verde erba cupo, e così dalle varietà di *diopside* si passa per la comune *augite* ai termini dell'*egirina-augite* vicini all'egirina tipica.

La *biotite* è frequente, ma assai meno dei pirosseni. Predomina la varietà bruna con $2E = 58°$-$62°$, ma non manca la biotite giallo rossastra a forte angolo degli assi ottici ($2E = 80°$-$86°$), eguale a quella che già trovammo nelle scorie nere pre-

cedenti e che con maggiore frequenza ritroveremo nelle lave di Pagliarone e della Rotondella. La *leucite* è pure presente tra i frammentini minerali della parte fina dei lapilli violacei, ed è più frequente nel banco dell' ingresso che in quello della cupa esterna. Si presenta in irregolari frammenti che mostrano la tipica geminazione. L'indice di rifrazione è eguale a 1.507. Più abbondante della leucite sono tuttavia la *magnetite titanifera* e l'*apatite* in tozzi prismetti. La *sodalite*, che abbonda fra i componenti dei piccoli lapilli trachitici, è invece scarsissima come elemento isolato nella parte fina di questi banchi violacei. Con maggiore frequenza si trova in quella della cupa esterna. Straordinariamente rara è invece l'*olivina*; l'*orneblenda bruna* manca nel banco dell' ingresso ed è rarissima in quello della cupa esterna.

I minerali ora descritti non rappresentano tuttavia la parte maggiore della porzione fina di questi lapilli violacei, ma questa è data essenzialmente da schegge vetrose di pomici, di ossidiane e di scorie, miste a frammentini di jalotrachiti e di trachiti ipocristalline. A questo materiale va anche essenzialmente riferita la parte grossetta lapillosa di questi banchi. Fra i componenti minerali di questi lapilli si notano in primo luogo i *feldispati*, l'alcalino ($\gamma = 1.527$, talora $\beta = 1.527 < \gamma$) e la bitownite (con piccole quantità di labradorite e di bitownite-anortite); infatti la maggior parte delle lamine di sfaldatura (001) di queste miscele basiche hanno estinzione compresa tra 22°-32°. Fra i minerali colorati predomina nei lapilli grossetti l'*augite* verdognola con $\widehat{c\mathfrak{c}} = 48°$ 49° su (010) che passa a varietà più chiare con $\widehat{c\mathfrak{c}} = 34°$-35° su lamine di sfaldatura (110). In alcuni minutissimi lapilli costituiti da porzioni di massa fondamentale di trachiti ipocristalline, talora di aspetto scoriaceo, si notano minutissimi prismetti di pirosseno giallo di tipo akmite, che troveremo rappresentata in alcune lave di Pagliarone. La *biotite* dei lapilli è del tipo bruno con $2E = 48°$-60°, con maggiore frequenza per $2E = 55°$ circa. La *magnetite* e l'*apatite* sono piuttosto abbondanti, mentre la *leucite* è assai più scarsa che nella parte fina; è invece frequente la *sodalite*. L'olivina e l'orneblenda bruna, che vedremo frequenti nei blocchi, mancano completamente nei lapilli di questi banchi violacei, come del pari mancano nelle lave delle colline centrali.

Il vetro, che forma certamente la parte maggiore della porzione fina e che costituisce buona parte anche dei lapilli grossetti, ha i medesimi caratteri del vetro delle ossidiane e delle pomici già descritte: si ritrovano quindi tutte le varietà dai vetri bruni picei, giallo brunicci in sezioni sottili, compatti, poveri di bolle, ai vetri più chiari, assai bollosi, e ai filamenti vetrosi delle pomici. L'indice di rifrazione di questi vetri è poco superiore a 1.515 e nettamente inferiore a 1.521; in minor copia si trova un vetro alquanto più oscuro a bolle fusiformi, disposte in fasci paralleli, e a rifrazione compresa tra 1.521 e 1.524, come osservammo anche nelle ossidiane. — Tra i lapilli di tipo trachitico ne notiamo alcuni con frequenti e piccoli cristalli di leucite, e molti son quelli ricchi in sodalite di tipo trachidoleritico. Nella maggior parte dei casi però il fitto pigmento ferruginoso impedisce una chiara determinazione di questi lapilli.

Un'analisi parziale dei lapilli violacei dell'ingresso ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	56.69
TiO_2	0.45
Fe_2O_3	3.03
FeO	2.08
MnO	0.53

ed anche da queste poche determinazioni si ha la conferma dell'identità tra la composizione di questi lapilli e quella degli altri materiali d'Astroni; e pel contenuto in SiO_2 e specialmente in MnO si ha la maggiore analogia colle lave scoriacee dei Pagliaroni.

E.

Blocchi rigettati

Fin qui, descrivendo i vari tipi di agglomerati e di materiali frammentarî costituenti la grande cinta esterna, cioè ceneri, lapilli, tufi, pomici, ossidiane e scorie, abbiamo esaminati gli elementi in cui si estrinsecò il magma eruttivo creatore del cratere di Astroni. Ma questo magma, o, meglio, il vapor d'acqua animatore di questo magma, nel fare esplosione ruppe e trascinò con sè buona parte dei terreni, traverso cui si aprì il passaggio, e di cui naturalmente i frammenti rigettati ricaddero e si confusero con i materiali autogeni, concorrendo con questi alla formazione del cono eruttivo.

Le forme più sminuzzate assunte da questi materiali allogeni rigettati, quali le ceneri e i lapilli, naturalmente si confusero con i consimili materiali autogeni, in modo che non è più possibile sceverarli da essi: quindi il nostro studio dei materiali estranei si restringe a quelli dei frammenti maggiori, o blocchi propriamente detti, che si trovano un po' dapertutto impigliati nel materiale eruttivo della cinta esterna e si ripetono poi in parte, come più appresso vedremo, nelle colline interne o centrali.

Le dimensioni di questi blocchi rigettati variano dalla grossezza di un pisello o d'una nocciuola, come, p. es., i frammenti di roccia a humboldtilite incastonati nelle scorie manganesifere dell'ingresso dianzi descritte, fino alle grandi masse di parecchi metri cubici di volume, come l'enorme blocco di trachite, incluso nei più bassi tufi della parete nord-est, a mezza strada tra la Vaccaria e la rupe della Caprara, lungo la sponda sinistra del Canalone.

La natura dei blocchi rigettati raramente, come ad es. nei blocchi a humboldtilite, rivela un'origine profonda, discendente fino al livello dei calcari mesozoici che costituiscono il fondo della conca campana; in generale provengono dai terreni eruttivi sottostanti immediatamente al vulcano; e buona parte di essi anzi con molta probabilità deriva da una superficiale grande cupola di trachite andesitica, di cui i maggiori avanzi *in situ* sarebbero rappresentati dalla rupe della Caprara, e la cui natura mineralogica e chimica è in tutto simile, come vedremo qui appresso, a quella dei materiali di consolidazione magmatica propria del nostro cratere.

a.

Blocchi metamorfici

Fra i blocchi rigettati che mostrano provenienza più profonda, che cioè rappresentano con ogni probabilità calcari della base sedimentaria metamorfosati dal magma, vanno ricordati alcuni piccoli noduli a humboldtilite, facellite e apatite, che trovammo inclusi nelle scorie violacce della sezione dell' ingresso, e di cui la composizione mineralogica corrisponde a quella dei blocchi analoghi a humboldtilite, che in copia maggiore troveremo inglobati nelle lave scoriacee di Pagliarone. Questi blocchi furono descritti da Lacroix nel suo ben noto libro *Les enclaves des roches volcaniques*; e noi riporteremo in seguito la sua esatta descrizione. Lo stesso Lacroix nei tufi incoerenti dell'ingresso trovò e descrisse un piccolo nodulo di 4 cm. di diametro, di composizione analoga a quella dei blocchi a forsterite del Monte Somma, formato cioè esclusivamente da grandi cristalli verdi di forsterite e da spinello violaceo e verdastro in sezioni sottili. La roccia porosa è impregnata da calcite secondaria. Un altro nodulo è formato da pirosseno intensamente verde, da anortite e da wollastonite in cristalli netti, accompagnata da molti prismetti di apatite. Tutti questi minerali giacciono nella calcite che sembra di origine secondaria. Questi noduli sono però assai rari.

b.

Blocchi di tipo vulsinitico e trachidoleritico

I blocchi rigettati di tipo trachitico basico, impigliati nella grande cerchia di Astroni, hanno una grande uniformità di tipo e presentano una composizione mineralogica e chimica, la quale è in relazione con quella dei prodotti lavici e incoerenti autogeni, che già abbiamo esaminati e che esamineremo qui appresso.

La maggior parte dei blocchi ha tinta chiara, cenerognola, grigiastra o leggermente gialliccia; talora, come in alcuni blocchi compresi nei tufi dello Sperone di Torre Nocera, con larghe Schlieren rossastre, come di mattone poco cotto. La loro struttura è nettamente porfirica; in taluni la massa è minutissima, afanitica, in altri invece si risolve nettamente già a debolissimo ingrandimento. Talvolta gl' interclusi appariscenti sono soltanto i feldispati, tanto quelli di sanidino quanto i plagioclasi; altre volte sono ben visibili anche gl' interclusi augitici e amfibolici, che pel loro colore nerastro spiccano come tanti punterelli neri sul fondo chiaro della roccia. Frequente è poi una netta struttura miarolitica, e nelle piccole cellette e nelle geodine i feldispati, l'augite, l'orneblenda, la sodalite presentano forme cristalline a terminazione netta e completa. Molte volte queste geodine sono tappezzate da piccoli cristalli di sodalite, raramente da analcime. Le segregazioni basiche, non molto frequenti invero, appaiono in questi blocchi come noduli grossetti, talora anche quanto un pugno, di colore notevolmente più oscuro di quello della roccia madre. I differenti aspetti esteriori di compattezza, di colore etc., che

questi blocchi chiari presentano, non implicano variazioni sensibili nella loro composizione nè nell'intima loro struttura. Essi, ripetiamo, sono i più diffusi e ne daremo una breve descrizione complessiva.

Meno frequenti, ma nettamente distinguibili dai primi sono i blocchi oscuri bruni, a massa generalmente afanitica compatta, nella quale sono sparse segregazioni feldispatiche (di sanidino e bitownite). minuti prismetti di augite verdognola e rare laminette micacee. È frequente in questi blocchi una struttura eutaxitica, analoga a quelle delle trachiti pipernoidi di Vivara. Litologicamente sono analoghi ai blocchi precedenti.

Finalmente un terzo gruppo di blocchi differisce dai precedenti per la straordinaria compattezza della loro massa, da ricordare all'aspetto alcune fine e compatte hornfelse o corneane. Questi blocchi di colore grigio bruno, qualche volta tendente al bruno-verdognolo, talora rossiccio alla superficie, non mostrano interclusi visibili ad occhio nudo, ed è invece frequente in essi una palese e fine struttura eutaxitica. Fra i blocchi rigettati questi sono i più vari e non raggiungono mai grandi dimensioni. La loro composizione mineralogica non è notevolmente diversa da quella degli altri blocchi a struttura porfirica; sono tuttavia alquanto più basici e di tipo trachidoleritico. Descriveremo ora brevemente questi tre diversi tipi di blocchi rigettati.

α. Blocchi chiari a struttura porfirica

Come in tutti i prodotti di Astroni così anche in questi blocchi accanto al *feldispato alcalino* si trovano abbondantemente rappresentati i *feldispati* di *Ca* e *Na* appartenenti alle miscele più basiche della serie. Essi sono più limitate agli interclusi. Fra gli elementi colorati l' *augite* e costante e prevalente; la *biotite* trovasi invece in piccola quantità. L' *amfibolo* è talora limitato alla massa fondamentale, oppure è anche frequente tra gl'interclusi, e si riscontra in alcuni blocchi l'*olivina*. La *sodalite*, l'*apatite*, la *magnetite titanifera* sono frequenti, mentre la *leucite* è piuttosto rara e scarsa. La massa fondamentale è essenzialmente oloristallina; una piccola quantità di vetro pare che raramente manchi, ma non è sufficiente a mutare la caratteristica struttura trachitica olocristallina. Tipi ipocristallini sono piuttosto rari e limitati a Schlieren acide.

Il *feldispato alcalino* è di tipo leggermente sodico con $\alpha = 1.522$; $\beta = 1.526$; $\gamma = 1.527\text{-}1.528$ (*Na*). L'angolo $\widehat{a\alpha} = 0$ su (001) e $= 6^\circ$ su (010). I cristalli, per lo più geminati secondo la legge di Carlsbad, sono tabulari secondo (010) e parallelamente all'asse a non superano per lo più 1 cm. Contengono raramente inclusioni vetrose. — Sottili laminette feldispatiche secondo (010), nettamente delimitate da (001) (110) ($\bar{2}01$) (201) appaiono sovente nelle cellette miarolitiche. Questo feldispato sembra avere rifrazione alquanto inferiore a quella dei cristalli interclusi, essendo α inferiore a 1.521 e β poco superiore a detto valore.

Gl'interclusi dei *feldispati* di *Ca* e *Na* sono di dimensioni generalmente minori di quelle del sanidino, non sorpassano il $\frac{1}{2}$ cm. Nella maggior parte dei casi presentano associate le geminazioni di Carlsbad e dell' albite e contengono con frequenza inclusi minerali colorati e vetro. Appartengono a miscele fortemente

basiche, comprese tra la *labradorite* $Ab_1\,An_1$, dalla quale sono formate le zone periferiche dei cristalli, e l'*anortite* quasi pura, che costituisce il nucleo e che forma anche talora per intero gli interclusi. Le miscele più diffuse appartengono alla *bitownite*. In lamine di sfaldatura (010) si osserva:

12°-18°	per la zona esterna	45-52 °/₀ *An*
20°-28°	per le zone medie	55-65 °/₀ *An*
30°-36°	pel nucleo	67-80 °/₀ *An*.

Talora miscele bitownitiche si ripetono a costituire il nucleo, mentre la parte più basica forma una zona intermedia. Dallo studio dei geminati doppî si arriva ai medesimi risultati. Ecco alcuni valori dell'estinzione, scelti tra quelli che con maggiore frequenza si ripetono:

I	II
21	21
35	26
32	32
32	24
38	32
37	16
49	27
48	23
$41\frac{1}{2}$-42	29-$29\frac{1}{2}$.

Anche esaminando, immerse in essenze a noti indici di rifrazione, le laminette feldispatiche quali si ottengono mediante la sistematica separazione dai liquidi pesanti, si ha la conferma della preponderanza delle miscele basiche e si può totalmente escludere la presenza di miscele oligoclasiche-andesiniche. Gli indici di rifrazione infatti sono compresi tra 1.555 e 1.578. In rarissime laminette α' è eguale o leggarmente inferiore a 1.555 ($Ab_1\,An_1$); con qualche frequenza invece si riscontra:

$$\alpha' > 1.555 \quad , \quad \gamma' < 1.567$$

ossia miscele con 50-60 °/₀ di *An*, mentre la maggior parte delle lamine offre:

$$1.568 \leqq \gamma' <= 1.577\text{-}1.578$$
$$\alpha' =< 1.568$$

(circa 75 °/₀ *An*), e talora anche:

$$\alpha' > 1.568$$
$$\gamma' > 1.578$$

ossia miscele con più dell'85 °/₀ di *An*.

Fra i piccoli interclusi di *pirosseno* di questi blocchi predominano le varietà

di augite chiara verdognola, di tipo analogo a quella che vedemmo diffusa nelle scorie, nelle pomici e nelle ossidiane. Nella maggior parte dei casi su (010) si ha $\widehat{cc} = 48°\text{-}50°$. In alcuni blocchi ricchi in sodalite e con egirina-augite nella massa gl' interclusi augitici presentano in sezioni sottili una chiara colorazione verde giallognola con $\widehat{cc} = 53°\text{-}54°$ su (010.) Sovente pel nucleo si ha $\widehat{cc} = 47°\text{-}48°$ e all'orlo $\widehat{cc} = 50°\text{-}54°$. In taluni blocchi è diffuso un pirosseno assai pallido di tipo diopside con $\widehat{cc} = 36°\text{-}37°$ su lamine di sfaldatura (110), e questo pirosseno chiaro ha rifrazione anche inferiore a quella dell'augite a colorazione più intensa, essendo in esso α di poco superiore a 1.65.

Associata all'augite, ed anche in cristalli isolati neri lucenti, si trova in numerosi blocchi un'*orneblenda*, che in lamine sottili diviene bruna olivastra. In alcuni blocchi questo anfibolo si osserva soltanto, e in piccola quantità, nella massa fondamentale; in altri appare in accrescimento parallelo coll'augite. Si trova sopratutto nei blocchi della sezione dell'ingresso e di Ngrogna, in cui costituisce frequenti cristalli idiomorfi. Con maggiore abbondanza si ritrova nelle segregazioni basiche, e in cristalli completi riveste anche sovente, colla sodalite, le cellette miarolitiche. Anche le superficie di fessurazione dei blocchi sono cosparse di piccoli, completi e brillanti cristalli del medesimo amfibolo. Il maggiore sviluppo è in essi dato dal prisma $\{110\}$ al quale si aggiungono le forme $\{100\}$ $\{010\}$ $\{001\}$ $\{011\}$ $\{\bar{1}11\}$. Da misure goniometriche si ha:

$$(110):(010) = 62°5' \qquad \left(\text{Calc. } 62°5'\tfrac{1}{2}\right)$$

Da buone lamine di sfaldatura (110) si ricava:

$$\widehat{cc} = 18°\tfrac{1}{2} - 19°$$

e da lamine (010):

$$\widehat{cc} = 24° - 25°.$$

Sovente questa orneblenda riveste in accrescimento parallelo tanto il pirosseno chiaro di tipo diopside quanto l'augite verde. Nel primo caso si ricava da (010):

$$\widehat{cc} = 40\text{-}41 \text{ nel pirosseno}$$
$$\widehat{cc} = 24\tfrac{1}{2}\text{-}25 \text{ nell'anfibolo;}$$

nel secondo:

$$cc = 48\text{-}50 \text{ nel pirosseno}$$
$$\widehat{cc} = 24\tfrac{1}{2}\text{-}25° \text{ nell'anfibolo.}$$

L'assorbimento è notevole:

$$\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$$

$\mathfrak{b}$ = bruno giallognolo,
$\mathfrak{c}$ = verde olivastro intenso,
$\mathfrak{a}$ = giallo-bruno chiaro.

Questo anfibolo non trova sicura corrispondenza fra quelli noti di tipo alcalino, barkevikite e catoforite: questi ultimi tanto diffusi nelle trachiti sodalitiche e anortoclasiche di Vivara. Non ci fu possibile isolarne quantità sufficiente da sottoporre a ricerche chimiche e dobbiamo provvisoriamente considerarlo come un'orneblenda bruna caratterizzata da $\widehat{cc} = 24 \frac{1}{2}$, con $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$. I caratteri ottici la avvicinano all'orneblenda di alcuni blocchi a sanidino e sodalite del M. Somma.

Già avvertimmo che la *biotite* si trova in tutti questi blocchi; essa è però generalmente scarsa e presenta notevoli fenomeni di corrosione e riassorbimento magmatico, essendo circondata da un fitto cumolo di granuletti di ossido di ferro; del nucleo biotitico non rimanendo talora che un sottile scheletro. Si tratta di mica bruna con $2E = 28°\text{-}38°$. Non rinvenimmo in questi blocchi la biotite giallo-rossastra a forte angolo degli assi ottici, caratteristica delle lave del cratere centrale.

L'*olivina* non è un componente costante di questi blocchi. Anche nelle varietà amfiboliche nelle quali si rinviene con maggiore frequenza è piuttosto scarsa. Essa è invece un componente prevalente di alcune segregazioni basiche. I cristalli di questo minerale hanno spigoli arrotondati ed appartengono ad una varietà povera di ferro, come si può supporre, oltre che per la mancanza di colorazione, anche per la poca attirabilità da un elettromagnete e per gli indici di rifrazione piuttosto bassi per l'olivina, essendo α all'incirca eguale a 1.65. — Con maggiore frequenza rinvenimmo blocchi a olivina nella sezione dell'ingresso e nei tufi sotto Torre Lupara, discendendo alla Vaccheria lungo la Ngrogna.

La *magnetite*, in copia non grande, è diffusa in tutte queste rocce ed è leggermente titanifera. L'*apatite* è anch'essa un componente costante, e i cristalli prismatici sono lunghi talora quasi $\frac{1}{2}$ mm. e sono zeppi delle caratteristiche inclusioni pulverulenti brune-azzurrognole, generalmente più fitte alla periferia dei cristalli.

La *sodalite*, che raramente manca nella massa fondamentale, è invece piuttosto rara in cristalli bene individualizzabili. È poi frequente in distinti rombododecaedri nelle cellette miarolitiche. Si distingue dall'*analcime*, che talora si trova ben cristallizzata in queste stesse cellette, per la forma cristallina, per la sensibile reazione del cloro, per non presentare anomalie ottiche, che raramente mancano in questo analcime, e per l'indice di rifrazione eguale a 1.483-1.484, mentre la rifrazione dell'analcime appare nettamente, sebbene non molto, superiore a questo valore.

La *leucite* è decisamente rara. La rinvenimmo soltanto in alcuni blocchi, ricchi in orneblenda e con olivina, della sezione dell'ingresso. Presenta le caratteristiche anomalie ottiche e ha l'indice di rifrazione corrispondente a quello della leucite del Vesuvio ($n = 1.507\text{-}1.508$).

La *massa fondamentale* è essenzialmente costituita da feldispato alcalino in cristalli listiformi, allungati secondo (001) (010), sovente a geminazione di Carlsbad, raggruppati a fasci e a disposizione fluidale. Presenta i medesimi caratteri del sanidino che costituisce gl'interclusi. Nei blocchi compatti a massa afanitica le listerelle divengono minutissime, tozze, e la massa assume un aspetto granulare. Raramente, e solo in qualche varietà minuta ricca in elementi colorati, la sanidino si accompagnano alcune listerelle di feldispato di *Ca* e *Na*. Il sani-

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I.

Fig. 1. — *Vulsinite.* Tipo compatto della Caprara; pag. 38 e seg.

Interclusi di sanidino, labradorite-bitownite-anortite, augite, biotite corrosa con bordo di magnetite. — Massa fondamentale olocristallina, costituita da sanidino, augite, orneblenda bruna, magnetite, sodalite.

» 2. — *Vulsinite ipocristallina.* Lava scoriacea dei Pagliaroni; p. 45 e seg.

Intercluso di labradorite-bitownite con sottile mantello sanidinico.

» 3. — *Segregazione basica olivinica* nei blocchi rigettati di tipo vulsinitico dell'ingresso; pag. 34.

Olivina, augite e orneblenda in accrescimento parallelo; piccoli prismi augitici e amfibolici in larghe plaghe feldspatiche.

» 4. — *Lapillo basico* nei tufi incoerenti dell'ingresso; pag. 34.

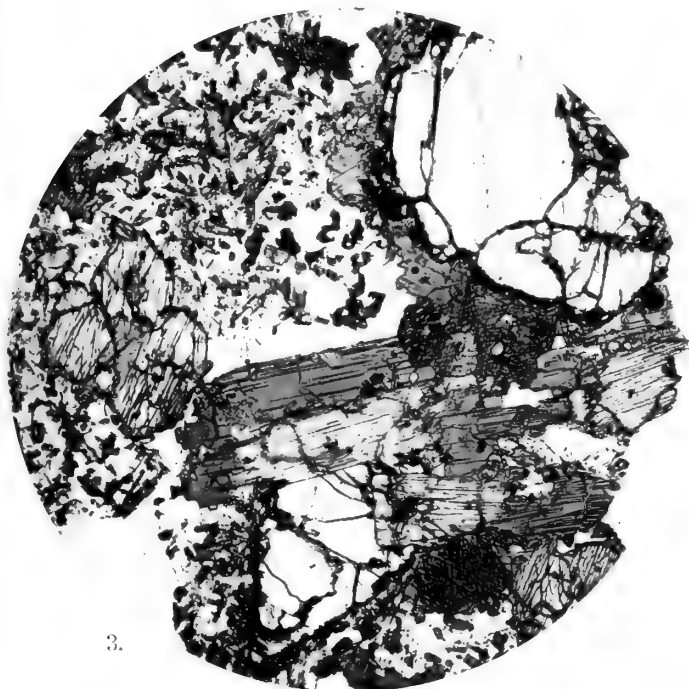
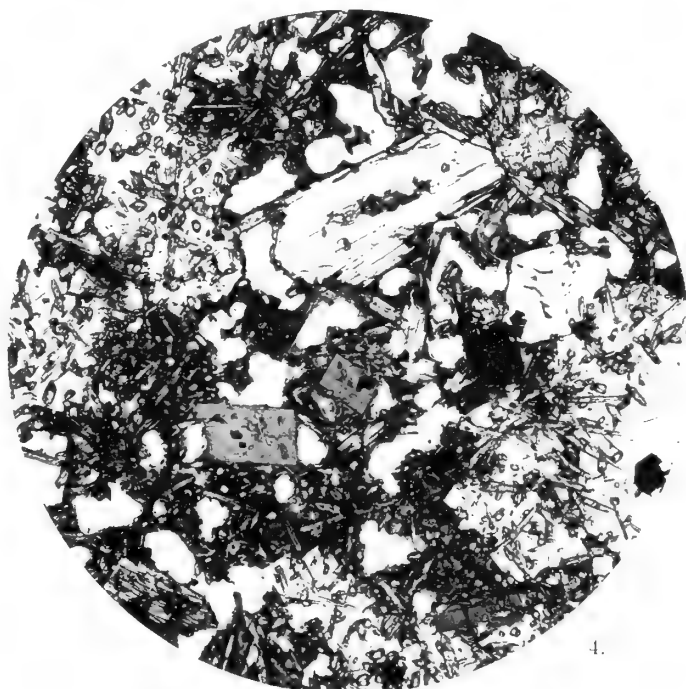
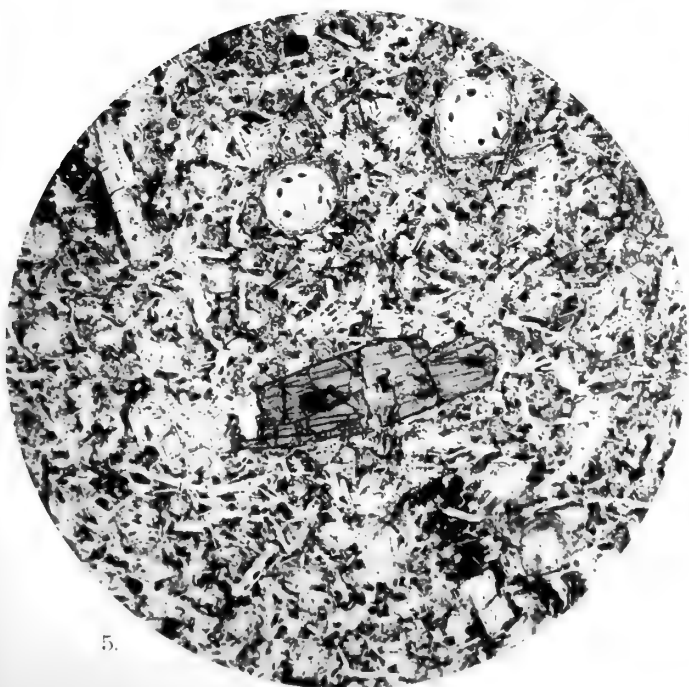
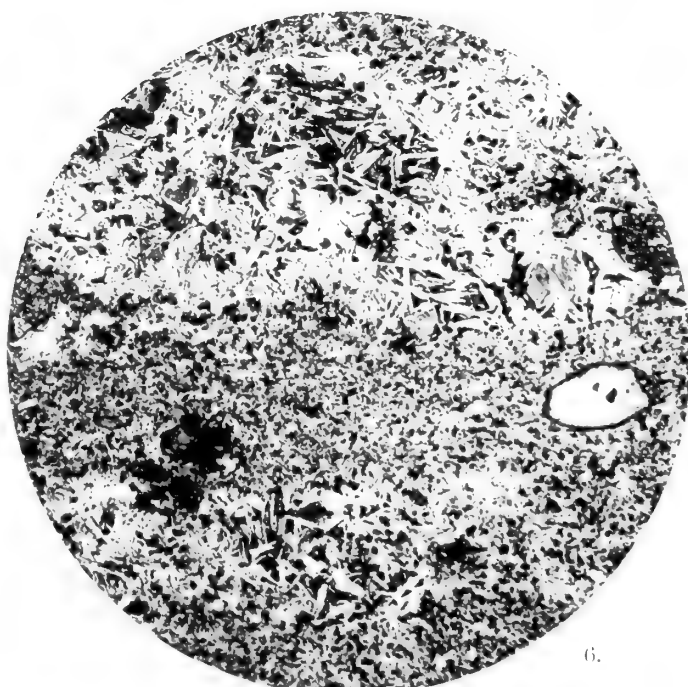
La massa bruna è costituita da vetro basico; la massa incolore è di labradorite-bitownite: in esse sono sparsi prismi di augite e lamine di biotite.

» 5. — *Trachidolerite sodalitica.* Blocco rigettato; pag. 36.

La massa è costituita da listerelle di sanidino e di feldspati di *Ca* e *Na*, con augite e numerose sezioni poligonali di sodalite.

» 6. — *Trachidolerite a struttura eutaxitica.* Blocco rigettato; pag. 37.

DE LORENZO E RIVA PHOT.

ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO MILANO

dino è accompagnato da augite e sovente da egirina-augite; questi pirosseni della massa hanno generalmente colorazione alquanto più intensa dei corrispondenti interclusi, con angolo $\widehat{cc}$ alquanto maggiore. Tipica egirina con $\widehat{ca} = 4^\circ$, tanto diffusa nei blocchi di Vivara, non riscontrammo nel materiale di Astroni da noi esaminato. In molti blocchi, compresi nei tufi sotto Torre Nocera e sotto Torre Lupara verso l'interno del cratere, trovammo nella massa minutissime squamette micacee brune a piccolissimi angoli degli assi ottici. Nella maggior parte dei casi è però maggiormente diffusa l'orneblenda bruna, che presenta i caratteri già ricordati e che in taluni blocchi, sopratutto negli olivinici, eguaglia la quantità dell'augite. La sodalite trovammo assai diffusa, talora anzi abbondante, intercalata tra le liste feldispatiche, precisamente come nelle tipiche trachiti sodalitiche d'Ischia, di Vivara e di Cuma. Altre volte forma piccoli cristalli idiomorfi, e i blocchi danno tutti energica reazione del cloro. La porzione più leggiera, che si separa dal Thoulet, è in gran parte costitutita da questo minerale. La leucite riscontrammo solo, e in piccola quantità, in qualche blocco nei tufi dell'ingresso. La magnetite è specialmente diffusa nei blocchi afanitici e ricchi in elementi colorati. Una piccola quantità di vetro leggermente bruniccio sembra manchi raramente. Sono rari i blocchi di questo tipo a struttura decisamente ipocristallina, ed essi sono limitati a poche varietà scoriacee biotitiche, prive di amfibolo.

Struttura ipocristallina è presentata dalle larghe Schlieren rossastre dei grossi blocchi grigio-cenerognoli, compresi nei tufi dello Sperone, che da Torre Nocera scende verso l'interno del cratere. Esse hanno costituzione più acida di quella della roccia che le comprende; fra gl'interclusi si fanno scarsissimi quelli dei feldispati basici, mentre predomina il sanidino; anche l'augite scarseggia, la biotite è al contrario più abbondante. Nella massa, tra le listerelle di sanidino, sottili e brevi, s'interpone notevole quantità di vetro bruno-rossiccio, povero di microliti augitici e di squamette biotitiche. Nelle cellette miarolitiche si annidano piccoli cristalli di analcime. Altre volte le Schlieren sono compatte, minute, più oscure, a massa maggiormente carica di minerali colorati e di magnetite e, per la forma del feldispato, assumono un'apparenza granulare anzichè listiforme.

Come *segregazioni basiche* dello stesso magma, che ha dato luogo a queste rocce, consideriamo alcuni piccoli inclusi oscuri, che si trovano con una certa frequenza nei blocchi chiari cenerognoli dell'ingresso e della parete interna del cratere sotto Torre Lupara. Esse hanno struttura granulare panidiomorfa, e i componenti mostrano sovente nette terminazioni cristalline nelle cellette miarolitiche, che a questi noduli impartiscono un aspetto cariolato. Fra tali segregazioni alcune sono essenzialmente *plagioclasiche-augitiche* senza olivina, e povere o prive di orneblenda; in altre prevale l'*orneblenda* e l'*olivina*. Nelle prime i plagioclasi appartengono prevalentemente a miscele di *labradorite basica-bitownite*, con zone periferiche di *labradorite* $Ab_1\,An_1$; vi si trova inoltre una piccola quantità di *sanidino*. L'*augite*, verde nerastra, appartiene per la maggior parte alla medesima varietà diffusa nei blocchi, con $\widehat{cc} = 48^\circ$-50° su (010). — Solo alcuni piccoli prismi allungati e sottili, fortemente colorati, appartengono all'*egirina-augite* con $\widehat{cc} = 60^\circ$-62°,

ed eccezionalmente con $\widehat{cc} = 71°$. Sono frequenti la *sodalite* e l'*apatite*; piuttosto scarsa invece la *magnetite titanifera*.

Le *segregazioni oliviniche amfiboliche* (tav. I, fig. 3) sono le più frequenti. La loro struttura è caratterizzata dal completo idiomorfismo dell'olivina, dell'augite, della biotite, e dell'orneblenda, sparse in larghe lamine di labradorite-anortite, anch'esse sovente a terminazioni idiomorfe e circondate da un largo mantello di feldispato alcalino. La magnetite, l'apatite, l'olivina e la biotite sono fra i primi minerali segregati dal magma, ai quali seguì la separazione dell'augite e dell'orneblenda (la cristallizzazione dell'augite durando più a lungo di quella dell'amfibolo); seguì inoltre la formazione della labradorite-bitownite e finalmente si segregò una piccola quantità di feldispato alcalino, che circonda sempre come largo mantello la labradorite. La sodalite è abbondante, specialmente nelle cellette miarolitiche. L'augite di queste segregazioni è una varietà chiara con $\widehat{cc} = 43°\text{-}44°$ su (010). L'orneblenda corrisponde alle già descritte, con $\widehat{cc} = 24\frac{1}{2}$ su (010): e i due minerali sono sovente associati in accrescimento parallelo. L'olivina forma i cristalli più grossi (talora lunghi 2 mm.); mentre l'augite e l'orneblenda dalle comuni dimensioni degli interclusi scendono a formare piccoli e sottili cristalli prismatici, di dimensioni microlitiche, sparsi nei feldispati.

Al medesimo tipo di inclusi basici olivinici appartengono alcuni lapilli grossi come una noce, che trovammo isolati nei tufi incoerenti dell'ingresso. Fra questi alcuni per la loro particolare struttura meritano speciale menzione e illustrazione (v. tav. I, fig. 4). Essi sono costituiti in parte da *vetro* intensamente bruno, anche in sezioni sottili, e di natura basica, e in parte da larghe plaghe di *labradorite-bitownite*. Tanto nel vetro quanto nel feldispato sono irregolarmente sparsi cristalli idiomorfi di *olivina*, di *augite* e di *biotite*. L'*augite* trovasi in cristalli di 1-2 mm., ed in tal caso è piuttosto chiara con $\widehat{cc} = 35°\text{-}36°$ su (110); ma essa è specialmente abbondante in piccoli e sottili prismi sparsi numerosi nel vetro e nel feldispato, ed in questo caso ha colorazione leggermente più intensa con $\widehat{cc} = 50°\text{-}51°$ su (010). La *biotite* è intensamente bruna con $2E = 40°\text{-}43°$. In alcuni di questi lapilli predomina la parte vetrosa fino quasi all'esclusione del feldispato, e pare che la presenza o la mancanza di questo minerale influisca sulla basicità del residuo vetroso. Nei lapilli privi di feldispato, costituiti cioè da minerali colorati e da vetro bruno, la basicità di questo è maggiore che nei lapilli ricchi in labradorite-bitownite: il che è in relazione colla regola generale, che il residuo magmatico durante la cristallizzazione di una roccia diviene sempre più acido. Il vetro di questi lapilli basici ricchi di labradorite-bitownite ha indice di rifrazione all'incirca eguale a 1.525, in ogni caso compreso tra 1.525 e 1.527; mentre il vetro degli analoghi lapilli, privi o poverissimi in feldispati basici, ha rifrazione superiore: maggiore di 1.529, ma nettamente inferiore a 1.538. Questa non raggiunge la forte rifrazione dei vetri basici basaltici, che riscontrammo nei lapilli neri dei tufi compatti di Vivara, il cui vetro piceo, resinoso, ha rifrazione compresa tra 1.55 e 1.58; è tuttavia nettamente superiore all'indice di rifrazione dei comuni vetri delle pomici e delle ossidiane di Astroni, che vedemmo superare di poco 1.514.

Riassumendo quanto abbiamo esposto riguardo ai blocchi rigettati predomi-

nanti nel cratere di Astroni, ci risulta che essi sono di tipo trachitico basico. Più innanzi vedremo, come essi trovino esatta corrispondenza colle *Vulsiniti* della regione di Bolsena.

β. Blocchi oscuri bruno-nerastri

Sono notevolmente più scarsi dei precedenti e si trovano un po' ovunque impigliati nei tufi della grande cerchia. Il tipo più comune è quello di rocce a massa intensamente bruna, compatta, uniforme, afanitica, nella quale sono sparsi, con variabile frequenza, interclusi feldispatici, allungati secondo a, e anche, più rari e meno appariscenti, cristalli di augite verdognola e lamelle di biotite. Tra i *feldispati* sono egualmente diffusi tanto l'*alcalino* quanto le miscele basiche *labradorite-bitownite*, precisamente come nei blocchi del tipo precedente e come, del resto, in tutti i materiali d'Astroni. L'*augite*, verdognola, è caratterizzata da $\widehat{cc} = 51°$ su (010), a zone periferiche con colorazione più intensa e con $\widehat{cc} = 56°$-$58°$, che s'avvicinano quindi all'egririna-augite. La *biotite*, l'*apatite* e la *magnetite* sono piuttosto scarse e presentano i caratteri più volte ricordati. Qua e là appare qualche cristallo nettamente idiomorfo di *sodalite* e di *leucite*, che meglio si determinano e si differenziano tra loro mediante la separazione dei componenti. La *leucite* mostra piccole sezioni ottagone colle tipiche e regolari inclusioni e con notevoli anomalie ottiche. Il suo indice di rifrazione è eguale a 1.507. La *sodalite* costituisce qualche cristallo idiomorfo con $n = 1.483$. La *massa fondamentale* è generalmente costituita da un finissimo feltro di listerelle microlitiche di sanidino, diversamente aggruppate o divergenti, e tra esse fa da mesostasi il vetro bruniccio, carico di granuletti di magnetite, frammisti a minuti granuletti augitici, discernibili solo a forte ingrandimento ed in sezioni di notevole sottigliezza. I microliti idiomorfi, meglio appariscenti, di augite sono poco frequenti. Si scorgono anche nella massa piccole sezioni leucitiche; e la sodalite non deve mancare, perchè è sempre energica la reazione del cloro, che si ottiene da queste rocce. E frequente la *struttura eutaxitica* a Schlieren più chiare, gialliccie: e tali blocchi ricordano all'aspetto esteriore le trachiti pipernoidi di Vivara. Tali Schlieren brune o giallognole, d'aspetto scoriaceo, sono meno compatte del resto della roccia; la loro massa è più povera in feldispato e più ricca in vetro, ed anche maggiormente ricca in microliti augitici, talora di color verde giallognolo carico con $\widehat{cc} = 63°$-$65°$, ed in alcuni $\widehat{cc} = 70°$-$71°$. Nei più grossetti si ha un'area centrale chiara con $\widehat{cc} = 65°$ (su (010)). Per la struttura scoriacea ipocristallina e per la presenza di pirosseni di tipo alcalino (egirina-augite) queste Schlieren ricordano alcune lave della collina centrale di Pagliarone.

Tra tali blocchi, specialmente tra quelli della sezione dell'ingresso, se ne riscontrano alcuni a struttura vitrofirica, costituiti da vetro oscuro, bruniccio, giallognolo se ridotto in lamine sottili, nel quale sono sparsi vari e sottili microliti di sanidino e di augite ($\widehat{cc} = 48°$-$50°$) e interclusi feldispatici (sanidino e labradorite-bitownite), nonchè di augite e di biotite. Nelle varietà più oscure la rifrazione del vetro è leggermente superiore a 1.526, in quelle più chiare è compresa tra 1.524 e 1.526: molte volte $n = 1.526$. È quindi un vetro presumibilmente alquanto più basico del vetro delle pomici e delle ossidiane del nostro cratere.

La *mica* di tutti questi blocchi è la solita *biotite bruna* con 2E intorno a 40°. Tuttavia nei tufi incoerenti dell'ingresso riscontrammo qualche piccolo lapillo compatto, bruno rossastro, che per la struttura ipocristallina, e per la presenza di mica rossastra a grande angolo degli assi ottici, assai ricorda le lave scoriacee di Pagliarone, che descriveremo più avanti.

Riassumendo: anche questi blocchi oscuri, al pari dei precedenti, sono di tipo trachitico basico (*vulsiniti*). Se ne differenziano tuttavia, oltre che per l'aspetto esteriore e per la struttura ipocristallina, per minore copia di minerali colorati, fra i quali mancano poi addirittura l'amfibolo e l'olivina. In questi blocchi oscuri si trova con maggior frequenza la leucite.

γ. Blocchi di tipo trachidoleritico, a grana minuta, compatta, senza interclusi appariscenti.

Questi blocchi sono i meno frequenti: hanno colore bruno, talora grigio verdognolo chiaro, o rossiccio alla superficie, e mostrano sovente struttura eutaxitica per irregolare alternanza di Schlieren chiare e oscure. Nella massa finissima si scorgono sparsi, soltanto all'osservazione microscopica (tav. I, fig. 5 e 6), piccoli interclusi feldispatici, i quali per lo più sono intieramente riferibili a miscele basiche *labradorite-bitownite-anortite*, e solo in pochi blocchi di questo tipo alcuni di essi sono di feldispato alcalino. Intorno ai feldispati basici vi è per lo più un sottile mantello di sanidino. Da sezioni secondo (010) si deduce:

mantello di sanidino	+ 4°	
zona esterna	— 20°	ossia 55 °/₀ *An*
nucleo	— 40°-41°	ossia 90 °/₀ *An*.

È rara l'*augite* verdognola, in cristalli di mm. 0.5-0.8 di lunghezza. Per lo più costituisce piccoli microliti nella massa. Negli interclusi si ha $\widehat{cc}$ = 45°-48°-50° al bordo, nei microliti $\widehat{cc}$ = 49°-51°, su (010). La finissima *massa* di questi blocchi è costituita da *feldispato alcalino* e da *feldispati* di *Ca* e *Na*, mescolati ad *augite*, a squamette *biotitiche*, a *orneblenda*, *apatite*, *sodalite* e *magnetite*. I feldispati di *Ca* e *Na* della massa hanno composizione variabile. Per lo più appartengono a miscele basiche, labradorite-bitownite-anortite; in alcuni piccoli geminati doppi si misura infatti:

I	II
38	35
53	18
39	31

e gli indici di rifrazione sono in tal caso compresi tra 1.56 e 1.76. Altre volte i plagioclasi della massa sono più acidi, appartenendo a miscele oligoclasio-andesina, a rifrazione compresa tra 1.541-1.555. Sovente essi occupano il centro delle listerelle di sanidino, e la proporzione tra la quantità di feldispato alcalino e quella di *Ca* e *Na* è oltremodo variabile.

Le squamettine micacee si insinuano a cuneo tra le listerelle feldispatiche: si tratta di biotite bruna a piccolissimo angolo degli assi ottici. L'orneblenda bruna non è abbondante, con $c\hat{c} = 25°\text{-}27°$ su (010) e notevole assorbimento:

$\mathfrak{b}$ = bruno giallognolo
$\mathfrak{c}$ = bruno verdognolo
$\mathfrak{a}$ = giallo pallido.

La *sodalite* non manca mai totalmente; piuttosto scarsa in alcuni blocchi, è abbondantissima in altri: così ad es. in un piccolo blocco, raccolto nei tufi dello sperone interno sotto Torre Nocera, questo minerale è eccezionalmente abbondante (vedi fig. 5 della tav. I) e forma numerosi e netti cristalli idiomorfi del diametro di mm. 0.08 a 0.3, a sezioni poligonali, sovente con inclusioni regolarmente disposte, che simulano sezioni leucitiche. Che si tratti tuttavia di sodalite venne provato mediante isolazione del minerale.

Nei blocchi a struttura eutaxitica (fig. 6 della tav. I), nelle Schlieren chiare si ha maggiormente sviluppata la struttura listiforme dei feldispati, con predominio di questi sui silicati colorati e con scarsità di magnetite e di ematite. Le Schlieren oscure, più minute, sono granulari, ricche in augite, la quale è in granelli piuttosto che in microliti allungati, accompagnata da magnetite, da ematite e spesso da orneblenda. L'apatite non manca in nessuno di questi blocchi.

L'analisi di una varietà, povera di sodalite e ricca in feldispati basici nella massa, ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	54.72
TiO_2	0.65
Al_2O_3	19.60
Fe_2O_3	2.45
FeO	3.09
MnO	tr.
MgO	1.90
CaO	5.00
Na_2O	3.52
K_2O	6.87
H_2O	2.08
P_2O_5	tr.
Cl	0.05
	99.93

Queste rocce sono quindi più basiche dei comuni materiali di Astroni, contengono quantità di ossido del tipo *RO*, e il potassio non è così prevalente sul sodio come nel tipo comune. Per la composizione mineralogica e chimica consideriamo questi blocchi quali trachidoleriti: come esporremo nel capitolo riassuntivo sulla natura dei materiali di Astroni.

F.

Massa della Caprara

Se dalla cresta della cinta craterica o dall'apice dei rilievi centrali si guarda in giro nelle interne sponde del grande anfiteatro, si rimane subito colpiti da una grande massa rocciosa, incastrata nel fianco orientale, che con le sue ripide rupi rompe l'uniforme armonica pendenza delle pareti, digradanti in cerchio verso il fondo del cratere (tav. II, fig. 1). Questa massa, che per la scabrosità e precipitevolezza delle sue balze è chiamata appunto La Caprara, è infatti di natura essenzialmente diversa da quella del resto della cinta craterica, giacchè mentre questa, come s'è visto, è costituita per intero da materiali frammentarî, quella invece è formata da una solida e compatta roccia lavica.

Esaminata più da vicino la Caprara si presenta come una grande rupe infissa nelle pareti orientali della cinta craterica, con le radici sprofondantisi sotterra e il sommo e i fianchi avvolti dagli agglomerati della grande cerchia (vedi fig. 2), ad eccezione del fianco occidentale di essa, che è libero e nudo e cade a picco nell'interno del cratere. Tale fianco ha una sagoma grossolanamente cuneiforme, con il grosso a sud e la parte assottigliata a nord, con una lunghezza di più di 200 e un'altezza massima di circa 80 metri. A nord e a sud i tufi e gli altri agglomerati della cerchia battono direttamente contro la rupe con le testate dei loro strati. nella parte superiore invece vi si appoggiano sopra immediatamente e concordantemente con uno spessore di circa una settantina di metri.

Guardata dal piede, dal grande viale circolare, tutta la massa della Caprara si presenta segmentata in numerose, grandi colonne verticali, grossolanamente poliedriche, a simiglianza di tutte le parti interne dei grandi ammassi e delle cupole di lava (v. fig. 2 della tav. II); in guisa che sembra tutta formata da una sola pasta omogenea e continua, uscita tutta d'un getto dalle viscere della terra. Ma che questa sia un'illusione è mostrato da un più attento esame, che si può fare arrampicandosi su per le anfrattuosità della roccia. Allora la grande massa lavica mostra tutte quelle interne variazioni di struttura e di composizione, che si possono riscontrare in tutte le cupole di simil genere e che sono un indice degli sbocchi successivi di lava, mediante l'accumulazione dei quali la grande massa si è formata e s'è consolidata.

Infatti nell'interno della Caprara avviene di riscontrare non raramente degli ampi letti di lava scoriacea, che segnano appunto le separazioni tra uno sbocco e l'altro di magma eruttivo, di cui le parti raffreddatesi più lentamente, coperte dalla crosta scoriacea, hanno dato luogo al tipo medio, compatto e solido. Oltre le scorie di superficie non mancano anche nell'interno delle parti più compatte anche le solite segregazioni o Schlieren di materiali più basici e più acidi: di modo che tutta la rupe della Caprara finisce a poco a poco per rivelarsi come una porzione, rotta e denudata a occidente, coperta e mascherata nel resto, di una grande cupola o massa lavica, formatasi liberamente alla superficie, per accumulazione graduale di sbocchi successivi di un magma eruttivo piuttosto denso.

Il tipo più comune, a cui ha dato luogo questo magma, è rappresentato da una roccia grigia, tenace, compatta, nella cui massa omogenea sono sparsi grandi cristalli di feldispato, per lo più tabulari secondo (010), che parallelamente ad a misurano fino a cm. 1.5. La maggior parte ha dimensioni inferiori al centimetro. I più grossi sono esclusivamente di *feldispato alcalino*; tra i più piccoli sono numerosi i *feldispati* di *Ca* e *Na*. Meno frequenti, ed in ogni caso meno appariscenti, sono i cristalli porfirici di *augite* e di *biotite*. Soltanto il microscopio svela poi la presenza di *orneblenda bruna*, di *leucite*, di *magnetite*, di *apatite* e di *sodalite*.

Il *feldispato alcalino* conserva i medesimi caratteri nelle diverse varietà di rocce, che costituiscono la massa della Caprara, tanto in quelle compatte, quanto nelle scoriacee, ricche in leucite. L'estinzione è di 5°-6° su (010) $\widehat{a:\mathfrak{a}}$, e di 0° su (001). Gli indici di rifrazione, dedotti mediante un accurato confronto con quelli noti di essenze, sono, per la luce del sodio, i seguenti:

$$\alpha = 1.521$$
$$\beta = 1.526$$
$$\gamma = 1.527;$$

le variazioni di questi valori non sorpassano ± 0.001, e corrispondono a quelli del feldispato alcalino delle trachiti augitiche di tipo Ponza, che si trovano in blocchi nella terza breccia dell'isola di Vivara. Si tratta di sanidino leggermente sodico. L'anortose propriamente detto sembra mancare.

I feldispati di *Ca* e *Na*, pure assai abbondanti, appartengono a miscele di *labradorite-bitownite, bitownite* e *bitownite-anortite*. Il nucleo di molti cristalli arriva all'anortite quasi pura e solo una stretta zona periferica è costituita da labradorite $Ab_1 An_1$. Pampaloni, che descrisse recentemente queste rocce, riferisce la maggior parte del feldispato basico in esse contenuto all'anortite e, in parte, alla labradorite ed all'oligoclasio, senza però confortare le sue affermazioni con sufficienti dati ottici; a lui spetta tuttavia l'aver accertata l'abbondanza, in queste rocce d'Astroni, di un feldispato notevolmente basico accanto al sanidino. Dall'esame del materiale da noi raccolto, proveniente da diversi punti della massa della Caprara, possiamo escludere la presenza dell'oligoclasio; i termini più acidi, appartenenti alle zone periferiche dei cristalli a struttura zonata, constano di labradorite $Ab_1 An_1$. La parte prevalente dei feldispati di *Ca* e *Na* ha rifrazione compresa tra i limiti seguenti:

$$1.566 < \gamma' < 1.576$$
$$1.555 \leqslant \alpha' < 1.566;$$

che rappresentano appunto miscele di labradorite-bitownite con 55 % a 68 % di *An*. Con una certa frequenza si osserva pure:

$$\gamma' = > 1.576$$
$$1.576 > \alpha' = > 1.566;$$

ossia miscele con più di 70 °/₀ di *An*. Nelle miscele più acide, limitate ad una stretta zona periferica dei cristalli zonati, si ha:

$$\gamma' < 1.566$$
$$\alpha' = > 1.555:$$

rifrazione caratteristica per la labradorite $Ab_1 An_1$. Riportiamo anche alcune estinzioni dedotte da geminati doppî secondo le leggi di Carlsbad e dell'albite:

I	II
40 $\frac{1}{2}$	31
50	24 $\frac{1}{2}$
42	30
49	24
45	28
41	30
50	22
37	24
43	29
36	27
35	21

I primi nove valori si riferiscono a tipi di massima basicità, vicini all'anortite; gli ultimi due a miscele basiche labradoritiche. I cristalli dei feldispati basici sono costantemente circondati da un sottile mantello di feldispato alcalino, che presenta estinzione simultanea tutt' intorno alla bitownite (la fig. 2 della tav. I rappresenta un analogo accrescimento nel feldispato basico della lava dei Pagliaroni). Il limite tra questa zona esterna alcalina e la massa fondamentale della roccia non è netto, ma incerto ed irregolare; il mantello di feldispato alcalino sfuma irregolarmente in essa, e mostra inoltre struttura poikilitica, contenendo minutissime inclusioni irregolari di augite e granuletti di magnetite. Tale zona, costante intorno agli interclusi basici, è frequente anche intorno ai grossi interclusi di sanidino; in tal caso non vi è nessuna differenza tra la rifrazione del nucleo e quella della periferia, e il fenomeno è reso palese soltanto dalle minute inclusioni del mantello. Questo accrescimento parallelo è un fatto abbastanza comune e si riscontra in modo del tutto simile nelle Vulsiniti di Bolsena descritte dal Washington, il quale lo attribuisce, e crediamo a ragione, all' influenza orientatrice esercitata dagli interclusi feldispatici durante la solidificazione del magma, che ha dato luogo alla massa fondamentale nel periodo effusivo. La formazione di tale mantello sarebbe quindi contemporanea alla formazione della massa fondamentale. I feldispati basici sono zeppi di inclusioni vetrose assai più del feldispato alcalino.

Tra gli elementi colorati prevale l'*augite*, i cui cristalli prismatici raramente raggiungono o superano 2 mm. secondo [z]. Il colore verdognolo, assai pallido in lamine sottili, è nettamente palese in lamine grossette, nelle quali appare con lieve

pleocroismo dal verde ($\mathfrak{c}$) al giallognolo ($\mathfrak{a}$). La periferia dei cristalli è di color verde alquanto più carico; trattasi però sempre di sottile zona periferica. La comune estinzione su (010) è di 45°, arrivandosi a 48°-50° ($\widehat{c\mathfrak{c}}$) alla periferia. Non mancano cristalli assai chiari di tipo diopside con $\widehat{c\mathfrak{c}} = 35°\text{-}37°$ su lamine di sfaldatura (110); come pure, e sopratutto nelle varietà scoriacee, si trovano fra gl' interclusi anche cristalli di color verde alquanto più carico, che in tutta la loro massa presentano $\widehat{c\mathfrak{c}} = 48°\text{-}49°$ su (010). I pirosseni alcalini di tipo egirina-augite sono diffusi nella massa fondamentale.

L'*amfibolo bruno* non costituisce generalmente interclusi isolati, ma entra soltanto nella massa fondamentale, oppure in accrescimento parallelo col pirosseno. Tale associazione è però poco frequente. Lamine (010), costituite da augite con mantello irregolare di amfibolo bruno, mostrano:

$$\widehat{c\mathfrak{c}} = 50° \text{ nel pirosseno}$$
$$\widehat{c\mathfrak{c}} = 28° \text{ nell'amfibolo}$$

$\mathfrak{b} \gg \mathfrak{c} > \mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$ = verde bruno olivastro cupo, $\mathfrak{c}$ = verde olivastro, $\mathfrak{a}$ = giallo verdognolo pallido. È un amfibolo assai vicino alla catoforite; ma non ci fu possibile precisarne con maggiore esattezza i caratteri. Pampaloni in una varietà grigia di questa roccia della Caprara espone di aver riscontrato alcuni cristalli di amfibolo *verde chiaro* pochissimo pleocroico con estinzione di 11° (non è precisata l' orientazione ottica). La presenza di un amfibolo chiaro, verdognolo, in queste rocce ci sembra poco probabile: l'unico amfibolo, che riscontrammo nei materiali d' Astroni, è l'orneblenda bruna, fortemente pleocroica, che s' avvicina alla catoforite e che vedemmo diffusa in molti blocchi rigettati.

La *biotite*, non molto abbondante, costituisce laminette esagonali, le quali hanno generalmente subìto una forte corrosione magmatica e sono circondate da un'aureola formata da granuletti di magnetite (vedi fig. 1 della tav. I). L'angolo apparente degli assi ottici è compreso tra 40° e 46°, talora alquanto inferiore a 40°.

La *magnetite* è abbondante, ma sopratutto nella massa fondamentale. È sensibilmente titanifera; e la quantità di TiO_2 contenuta in queste rocce (0.31 %) va quasi intieramente riferita alla magnetite. L'*apatite*, in tozzi prismetti, è piuttosto frequente (0.21 % di P_2O_5); è comunque sparsa nella roccia, oppure inclusa nei diversi componenti, sopratutto nell'augite e nella biotite. Contiene inclusioni pulverulenti brune azzurrognole, più fitte alla periferia dei cristalli.

Sovente gli elementi colorati ed i feldispati basici costituiscono plaghe granulari a struttura panidiomorfa, che consideriamo come *segregazioni basiche*: talora queste segregazioni sono prevalentemente costituite da bitownite; tal'altra prevalentemente da augite, con biotite, magnetite, e apatite; il più sovente da tutti questi minerali associati; e quando raggiungono il diametro di qualche centimetro si discernono nettamente nella roccia pel loro aspetto granulare e per la struttura miarolitica.

La *massa fondamentale* è olocristallina, a struttura trachitica (tav. I, fig. 1). Una piccola quantità di vetro bruniccio non muta l' aspetto strutturale, ed è li-

mitata ad alcune varietà, specialmente alle scoriacee. La massa è essenzialmente costituita da feldispato alcalino in listerelle assai allungate, o tozze, geminate secondo la legge di Carlsbad, e sovente disposte in fasci a disposizione fluidale. L'augite è del pari assai abbondante e nella maggior parte dei casi è del medesimo tipo dell'augite che costituisce gl'interclusi, cioè debolmente verdiccia con $\widehat{c\,c} = 45°\text{-}47°$. Tuttavia si osserva nella massa anche augite di color verde più intenso e nella quale l'angolo $\widehat{c\,c}$ raggiunge 60° (egirina-augite). Sono frequenti nella massa i piccoli cristalli idiomorfi a struttura a clepsidra; oppure si osserva un nucleo intensamente verde con $\widehat{c\,c} = 60°$, mentre una larga zona periferica è chiara, con $\widehat{c\,c} = 48°\text{-}50°$ (010). Queste varietà di egirina-augite sono sopratutto frequenti nei tipi scoriacei della massa della Caprara, i quali all'aspetto esteriore sono grigio-cenerognoli, alquanto più chiari del tipo compatto più comune. L'anfibolo bruno non è abbondante, e di preferenza appare nelle varietà compatte; è raro in quelle scoriacee ($\widehat{c\,c} = 25°$). Le minute squamette di biotite sono scarsissime nella massa e sovente mancano. In tutta la massa della Caprara è inoltre costante come componente della massa fondamentale la *leucite*, ma in proporzioni assai variabili. In generale questo minerale è piuttosto scarso; talora, come nelle varietà compatte del centro della rupe della Caprara, è raro, mentre abbonda nei tipi scoriacei. La leucite si presenta in sezioni nettamente idiomorfe, facilmente riconoscibili pei contorni ottagoni e per la tipica e regolare disposizione delle inclusioni, che constano di microliti di augite e di egirina-augite. Il diametro massimo dei cristalli di leucite è di mm. 0.3, ma per lo più i cristalli misurano mm. 0.15-0.2. La geminazione polisintetica è palese soltanto nei cristalli più grossi. L'indice di rifrazione, determinato in granuli isolati dalla roccia col confronto con quello noto di essenze, risulta eguale a 1.508. La *sodalite* è anch'essa un componente costante della massa fondamentale, e si insinua a cuneo tra le liste feldispatiche. È raramente fresca come nelle trachiti sodalitiche di Cuma, di Vivara e d'Ischia, nè è sempre sicuramente riconoscibile al microscopio. Anche la sua quantità è piuttosto piccola, ma varia da esemplare a esemplare. Il tipo analizzato è fra i più poveri in sodalite (0.17 % *Cl*). In minutissimi granuletti la magnetite titanifera è assai diffusa nella massa.

Nei banchi scoriacei, assai più che nella massa compatta, è palese la struttura eutaxitica, a Schlieren più minute e più oscure, per l'accumularsi degli elementi colorati della massa fondamentale alternate con Schlieren più chiare, prevalentemente sanidiniche.

La composizione chimica complessiva della varietà compatta più comune della Caprara è la seguente:

SiO_2	57.58
TiO_2	0.31
Al_2O_3	19.39
Fe_2O_3	3.22
FeO	1.62
MgO	1 17
CaO	4.08
Na_2O	3.12
K_2O	8.68
H_2O a 110°	0.44
H_2O sopra 110°	0.50
P_2O_5	0.21
Cl	0.17
	100.49

Qui appresso vedremo come, tanto mineralogicamente quanto chimicamente, queste rocce, che stanno tra le trachiti e le andesiti, corrispondono alle *vulsiniti.*

2

I rilievi interni

La grande cinta ad anfiteatro chiude nel suo interno una serie di dossi poco elevati, i quali stanno con essa nel medesimo rapporto che il Vesuvio con la Somma, e sono quindi separati parimenti dalla cerchia madre o amplectente per mezzo di un atrio; che però, invece di essere falcato o a ferro di cavallo, ha la forma di un anello circolare o ellittico, completo, a fondo pianeggiante, che a nord e a sud-est giunge appena a una cinquantina di metri di larghezza, mentre verso occidente si allarga in una valletta, il cui fondo giunge a un' ampiezza transversale di anche più di 400 metri (vedi carta geologica della tav. VII).

Quest' atrio cinge un gruppo di colline o di dossi tondeggianti, che formano la parte centrale del cratere (vedi fig. 6). I più larghi e bassi di questi dossi sono quelli della parte orientale, che si stendono da nord a sud per la lunghezza di poco più di 650 metri, con una larghezza massima di 400, arrivando a una quarantina di metri sul piano dell' atrio e a 55 m. sul livello del mare: essi si chiamano i Pagliaroni, perchè nei recessi ombrosi della fitta boscaglia, che li copre, si costruiscono appunto le grandi staccionate per prendere i cinghiali. A nord si innalza un piccolo colle roccioso, alto 60 m. sul mare, a forma di pan di zucchero tondeggiante, detto appunto perciò la Rotondella. Nella parte occidentale poi si eleva fino a 70 m. sul mare, più ampia e vistosa delle altre, e perciò appunto forse chiamata l' Imperatrice, la maggiore di queste tre alture del fondo del cratere.

Naturalmente queste elevazioni sono separate l' una dall' altra mediante insenature e vallette, che confluiscono tra di loro e s' innestano con l'anello circolare dell' atrio. Così tra le falde meridionali dell' Imperatrice e le ultime pendici dei Pagliaroni, poco lungi dall' attuale lago, vi è un piccolo incavo, lungo non

più di 200 e largo appena un 50 metri, a forma di imbuto. Un simile imbuto alquanto più grande e più profondo, si trova tra le falde orientali dell' Imperatrice e quelle occidentali dei Pagliaroni, e per la sua forma profondamente concava porta appunto il nome di Cofaniello (vedi carta geologica della tav. VII). La forma concava, craterica, di questo Cofaniello è così nettamente visibile, anche da lontano e specialmente quando, dopo mezzogiorno, la luce del sole vi cade tangenzialmente (vedi fig. 1 della tav. IV), che avendoci un giorno accompagnato agli Astroni Francesco Paolo Michetti; egli dal belvedere dell' ingresso col suo illuminato occhio d'artista notò immediatamente la forma del cratere e ci chiese che cosa fosse « quell'ombelico ». Altre insenature dividono poi la Rotondella dall' Imperatrice e dai Pagliaroni.

Queste diverse concavità accoglievano, e accolgono in parte tuttora, le riserve d'acqua piovana o sorgiva del fondo del cratere, e davano così origine ai diversi stagni temporanei o laghetti perenni, menzionati da tutti gli antichi autori, che ne celebrano le proprietà termo-minerali, ora quasi del tutto svanite. Uno di questi stagni si trovava nella depressione orientale dell'atrio, ai piedi della rupe della Caprara, ed era quindi chiamato Lago della Caprara, o anche Lago Sicco, perchè d'estate si prosciugava. Un altro empiva il Cofaniello; un terzo si trovava nel piccolo imbuto a sud del Cofaniello; e il quarto è quello, che ancora si trova nella depressione a sud-ovest dell' atrio e che con le sue acque calme, tutte sparse di floride ninfee, fa da specchio alla maestosa corona di querce, che sorgono superbamente all' intorno (vedi fig. 1 della tav. V). Nelle acque di questi laghi e nei bassifondi dell'atrio venivano e vengono tuttora a depositarsi i materiali, che le piogge trascinano giù dalle interne pareti, facilmente erodibili. Specialmente nelle pareti del fianco settentrionale, direttamente esposte ai venti acquiferi, che salgono dal mare, le acque hanno inciso profondi valloni, che convergono verso il fondo (vedi fig. 5), portandovi tali ingombranti coni di dejezione, che a derivarli è stato necessario incidere presso la Vaccaria un grande canalone di scarico.

Come si vede dunque, il fondo del cratere di Astroni non è così semplice, anche topograficamente, come lo hanno descritto quelli che lo immaginarono costituito da una sola grande cupola trachitica. Esso invece è formato da varî elementi, i quali, oltre che per forma, sono anche tra di loro diversi per struttura e per genesi. Per intendere quindi bene questa complessa parte centrale, fa d'uopo studiare singolarmente le diverse prominenze, da cui essa è composta.

A.

Prominenze dei Pagliaroni

Le prominenze dei Pagliaroni, comprese tra la collina dell' Imperatrice e la rupe della Caprara (vedi tav. VII), sono attualmente in modo così fitto ammantate dalla bassa e intricata vegetazione di felci, roveti ed edere, attorcigliantisi intorno ai grandi alberi, che non solo è quasi impossibile esaminare la natura del terreno, da cui sono formate, ma è anche difficile scorgerne la esteriore configurazione topografica. Pure, sfidando le spine e profittando dei tagli, fatti nelle piante e nel

terreno dagli uomini e dai cinghiali, si possono a poco a poco seguire tutte le insenature e i rialzi, in cui è modellata quella larga massa boscosa, e si possono anche intravedere le rocce predominanti, che la compongono.

Così, percorrendo il viale di caccia, che dal sentiero dell' ingresso va verso la Rotondella, passando lungo il cratere di Cofaniello, o scendendo in questo stesso cratere, oppure addentrandosi nella valletta, in cui è piantata la grande staccionata per i cinghiali, sempre e da per tutto si vede un grande ammassarsi di scorie, generalmente di colore violaceo o vinoso, come i lapilli descritti a pag. 24 e seg., oppure, più raramente, di color rosso di ruggine, o anche di una tinta gialliccia, come di terra d'ombra diluita nell'acqua. Alla superficie, e specialmente lungo il margine orientale del lago, si vedono anche degli accumuli di piccole pomici; così che a prima vista pare, che tutta la massa dei Pagliaroni non sia che un grande mucchio di scorie, qua e là coperto da un sottil velo di pomici.

Ma, con un esame più attento e più prolungato si scorge, che le scorie non sono addossate le une alle altre, ma che generalmente sono fuse tra di loro e formano come una specie di scorza sopra banchi di roccia più solida e compatta; così che in fine si comprende, che si ha da fare, non con scorie eruttate ed ammassatesi, ma con la parte superiore di un'ampia corrente di lava scoriacea, non molto diversa, nell'aspetto fisico esterno, dalla lava del Vesuvio del 1872, su cui si può camminare per ore e ore in mezzo ai grandi ammassi di scorie, che costituiscono la parte superficiale della corrente lavica.

Quelle che dunque prima sembravano scorie diverse, gialle, rosse o violacee, insieme accumulatesi, non sono che differenziazioni di una stessa corrente di lava che a cominciare dalla Rotondella si è espansa verso sud, addentrandosi da un lato sotto i fianchi orientali dell' Imperatrice, spingendosi dall' altro fin quasi ai piedi della Caprara, e girando poi verso sud-ovest, fino a formare la sponda orientale del lago (vedi la carta geologica della tav. VII).

Il tipo comune di tale corrente è quello d'una lava scoriacea di color purpureo o violaceo, quasi vinoso, sulla quale sono sparsi numerosi interclusi di feldispato, tabulari secondo (010) e di dimensioni eguali a quelle dei medesimi interclusi nella roccia della Caprara. Meno frequenti appajono i più piccoli interclusi di augite e le laminette micacee, che risplendono con riflessi rossastri. Il tipo scoriaceo, rossastro o giallognolo, eccetto che nell' apparenza esteriore del colore, non differisce da quello violaceo. Se ne stacca invece alquanto una varietà gialliccia, come di terra d'ombra diluita, che trovammo all' inizio del viale di caccia, che dal sentiero dell'ingresso va verso la Rotondella, precisamente presso gl'inclusi a humboldtilite che qui appresso descriveremo. Questa lava è assai più compatta della varietà scoriacea prevalente nei Pagliaroni e mostra una spiccata struttura eutaxitica, poichè nella massa gialliccia chiara sono diffuse Schlieren più oscure, che ricordano alcune facies della Caprara o, meglio, della Rotondella, e che se non fossero intimamente conglobate e diffuse nella trachite gialla si potrebbero quasi ritenere come inclusi di roccia estranea. Localmente anche queste varietà compatte passano ai tipi gialli scoriacei ed esse sono generalmente più ricche di interclusi feldispatici di quelle. Avvertiamo fin d'ora, che esiste una spiccata analogia tra questo tipo compatto gialliccio dei Pagliaroni e i blocchi, che

si trovano nel fondo del cratere centrale di Fossa Lupara o della Senga, nei limitrofi vulcani di Campana. Vedremo, che anche l'analisi mineralogica conferma questa somiglianza.

La maggior parte dei minerali, che costituiscono le lave dei Pagliaroni, presentano caratteri costanti, così che noi ne daremo qui un'unica descrizione, avvertendo di volta in volta le divergenze degne di nota. Gl'interclusi di feldispato appartengono al *sanidino sodico* ed a *miscele basiche* di *Ca* e *Na*. Il primo ha aspetto e caratteri come quelli già esposti nella descrizione della massa della Caprara ($\gamma = 1.527$). Anche i feldispati di *Ca* e *Na*, numerosi, appartengono alle medesime miscele basiche, costituite essenzialmente da *bitownite* con nucleo di *bitownite-anortite*. Le miscele più acide sono date da *labradorite*. I termini di maggiore basicità presentano i caratteri seguenti:

$$\text{su } (001) = 33^\circ$$
$$\text{su } (010) = 38^\circ \tfrac{1}{2}$$
$$\gamma' \gg 1.577$$
$$\alpha < 1.577$$

ossia con circa 90 % di *An*. Raramente γ' é alquanto inferiore a 1.566. Le estinzioni più comuni su (001) sono comprese tra 19° e 30°, con $1.556 < \gamma <= 1.577$ (60-80 % *An*). Crediamo di potere escludere la presenza di miscele acide sodifere, che difficilmente ci sarebbero sfuggite nella sistematica separazione dei componenti e all'esame degli indici di rifrazione. Dubitiamo quindi dell'affermazione di Pampaloni, che riferisce il 30 % del feldispato di *Ca* e *Na*, contenuto in queste rocce, all'oligoclasio. I feldispati basici sono zeppi di inclusioni vetrose assai più del feldispato alcalino: e anche qui appare evidentissimo intorno alla bitownite il sottile mantello di feldispato alcalino, che si presenta nel modo già precedentemente descritto a pag. 40 (tav. I, fig. 2).

Fra i pirosseni prevale l'*augite* verde intensa con estinzione di $\hat{cc} = 50°-52°$ su (010); e si notano inoltre prismi allungati e sottili di egirina-augite di colore verde erba cupo, con $\hat{cc} = 60°$ circa. È invece scarso il pirosseno chiaro di tipo diopside, con angolo di estinzione minore, come si osserva nelle rocce della Caprara. Inoltre nelle varietà giallognole compatte di Pagliaroni, a struttura entaxitica, è diffuso fra gl'interclusi un pirosseno verde giallognolo, alquanto pleocroico anche in sezioni sottilissime, con marcata struttura zonata. In sezioni (010) notiamo al centro $\hat{cc} = 50°$, e alla periferia $\hat{cc} = 57°-60°$. Pirosseni di spiccato carattere alcalino si ritrovano, come minutissimi prismi, nella massa fondamentale, ed appartengono a un pirosseno giallo intenso di tipo akmite, che, come è noto dalle descrizioni di Rosenbusch, è abbondante nella massa fondamentale di alcune varietà trachitiche di Cuma. L'estinzione nella zona verticale raggiunge in questo pirosseno $\hat{cc} = 70°-72°$; e i prismi, non tanto sottili, mostrano struttura zonata con bordo a colore più intenso del nucleo e con $\hat{cc}$ maggiore. Nelle varietà spiccatamente scoriacee tale pirosseno è piuttosto scarso; in quelle compatte gialle-

è invece assai più abbondante. La trachite gialla del fondo del cratere centrale di Fossa Lupara contiene pure, nella massa fondamentale, microliti di questo stesso pirosseno giallo di tipo akmite.

La *mica* fra gl'interclusi è meno frequente dell'augite ed è quasi unicamente rappresentata da una varietà a vivace colore giallo rossastro, con notevolissimo angolo degli assi ottici, che, pur variando da lamina a lamina, è compreso come limiti estremi tra 71° e 86° (2E); i valori più comuni si aggirano intorno a 78°-80°. È una mica di seconda specie; $\rho < \upsilon$; $\mathfrak{c} > \mathfrak{b} > \mathfrak{a}$; $\mathfrak{b}$ = giallo oro, $\mathfrak{c}$ = rosso bruno intenso; $1.65 < \beta, \gamma < 1.70$. È la medesima biotite, che già riscontrammo nelle scorie violacee dell'ingresso ed in minor copia anche negli strati di lapilli violacei; questa biotite manca invece nella massa della Caprara e nei blocchi rigettati e sembra limitata ai prodotti del cratere centrale.

Fra i componenti accessorii ricorderemo l'*apatite* colle caratteristiche inclusioni bruno-azzurrognole, la *magnetite* sensibilmente *titanifera*, e raramente la *sodalite* Si riscontra abbondante l *ematite*. Pampaloni cita fra gl'interclusi delle rocce del cratere scoriaceo centrale anche l'amfibolo di colore verde chiaro giallognolo, con estinzione di 15°, con marcato pleocroismo e con birifrazione maggiore di quella del pirosseno ( ). Non risulta chiaramente da questi dati a quale varietà d'amfibolo l'autore voglia alludere; negli esemplari di Pagliarone da noi esaminati non ne trovammo traccia, come pure non riscontrammo l hauyna.

La *massa fondamentale* è essenzialmente vetrosa nei tipi scoriacei, e nel vetro bruniccio bolloso sono sparse listerelle di sanidino e microliti di augite, in quantità assai variabili da scoria a scoria. La *leucite* è rarissima, molte volte non se ne osserva, e per lo più sfugge anche all'osservazione microscopica, non essendo poi sempre agevole differenziarla dalla sodalite. Tuttavia, operando una sistematica separazione dei componenti mediante i liquidi pesanti, si riesce sovente a rintracciarne una piccola quantità. Anche la *sodalite* è rara e per lo più sembra alterata. Nelle varietà compatte, giallognole, la massa è prevalentemente formata da sanidino con microliti di augite, egirina augite e magnetite; la quantità di vetro diminuisce notevolmente. Anche in tale varietà la leucite e la sodalite sono estremamente rare, talora anzi sembrano mancare. Le Schlieren più oscure hanno composizione identica a quella delle più chiare; la massa è più minuta e maggiormente ricca in componenti colorati, e forse con minore quantità di vetro. Ma in sezioni molto sottili questa apparenza a Schlieren scompare quasi interamente. Non mancano le segregazioni basiche costituite essenzialmente da bitownite e da augite verdognola. Manca in esse l'egirina-augite.

Nelle lave dei Pagliaroni abbondano quindi i tipi scoriacei a struttura porfirica, a massa prevalentemente vetrosa, i quali passano a varietà compatte ipocristalline. Queste lave sono mineralogicamente e chimicamente poco dissimili dagli altri materiali di Astroni; ne differiscono tuttavia per la presenza di una biotite a forte angolo degli assi ottici, e forse per una maggior copia di pirosseno alcalino giallo o verde (egirina-augite), sparso nella massa fondamentale. La natura chimica del tipo scoriaceo violaceo, il più comune, non differisce essenzialmente da quella della roccia della Caprara e degli altri materiali d'Astroni, come appare dall'analisi qui sotto esposta. La maggior quantità di Fe_2O_3 va in parte attribuita allo stato di al-

terazione della massa amorfa ed alla formazione di ematite. Anche queste lave sono trachiti andesitiche, e più precisamente vulsiniti ipocristalline, come dimostreremo in seguito.

Analisi

SiO_2	57.50
TiO_2	0.50
Al_2O_3	18.80
Fe_2O_3	4.37
FeO	0.62
MnO	0.57
MgO	1.20
CaO	3.84
Na_2O	3.16
K_2O	8.39
H_2O a 110°	0.38
H_2O sopra 110°.	0.61
P_2O_5	0.28
Cl	0.03
	100.21

Notammo l'analogia del tipo giallognolo compatto dei Pagliaroni colle rocce del fondo del cratere di Fossa Lupara. Anche queste rocce contengono minerali interclusi di bitownite-anortite, con orlo di labradorite, accanto al feldispato alcalino; e nella massa abbondano i microliti pirossenici gia li di tipo akmite. Tuttavia nelle rocce di Fossa Lupara manca la biotite rossa a forte angolo 2E, e vi si trova invece frequente la titanite, che mai riscontrammo nei prodotti di Astroni. La trachite gialla di Fossa Lupara è inoltre piuttosto ricca di sodalite.

Inclusi metamorfici

Percorrendo il viale di caccia, che traversa da sud-est a nord-ovest la boscaglia dei Pagliaroni, a poco più di un centinaio di metri dall'imbocco di esso sullo stradone circolare, di fronte al sentiero dell'ingresso, e propriamente là dove il viale stesso è inciso per qualche metro di profondità nel terreno, si osserva che questo, per l'estensione di alcuni metri quadrati, è costituito da una roccia, del tutto diversa dalla lava scoriacea qui innanzi descritta e molto simile invece ai frammenti di rocce metamorfiche, inclusi nelle scorie della grande cinta esterna, presso l'ingresso, indicati a pag. 28.

Questa plaga di roccia (alla quale simili forse ne esisteranno anche altre in altri punti dei Pagliaroni) non è dunque che un grande frammento di quello stesso materiale metamorfico, di origine sedimentaria calcarea, che la lava ha strappato alla sua area di contatto e ha trasportato nella sua eruzione fino alla superficie: essa dunque ci dà qualche indizio del punto di provenienza di questo magma eruttivo e delle condizioni fisiche della sua permanenza in profondità.

Di questi inclusi metamorfici il Lacroix ha data una chiara e completa de-

scrizione, che riportiamo integralmente (*Les enclaves des roches volcaniques*, pag. 326): « À l'oeil nu, en outre de la humboldtilite, on distingue de l'augite. Dans les nombreuses cavités de la roche, se trouvent de fines aiguilles transparentes d'apatite, et des prismes fibreux de phacélite. Par places, la humboldtilite est colorée en jaune rougeâtre. Les cristaux fort nets présentent les formes p (001), m (110), h^1 (100), h^2 (310), b^1 (112); ils sont aplatis suivant la base, leur coloration est souvent plus intense à leur périphérie qu'à leur centre. Quelques échantillons sont parcourus par des veines noires, à pâte fine et rugueuse, dans lesquelles se distinguent, à l'oeil nu, des aiguilles blanches d'apatite et de phacélite. Au microscope, la humboldtilite se montre en grands cristaux, à un axe négatif, présentant un clivage basique grossier, mais très répété. La biréfringence est plus grande sur les bords des cristaux qu' au centre; et d'autant plus grande que le minéral est plus coloré. J'aurai l'occasion de revenir dans un prochain travail sur les variations de biréfringence de ce minéral. Dans les varietés colorées, le minéral est en lames minces d'un beau jaune d'or et trés pléochroïque avec: n_g = jaune d'or; n_p = jaune pâle. Les inclusions vitreuses à bulles sont très abondantes: elles manquent au contraire dans le pyroxéne; celui-ci est une augite verte pléochroïque dans les teintes vertes et jaunes. Ce minéral semble être contemporain de la humboldtilite, il possède généralement des formes nettes. L'apatite en longues baguettes est englobée par les minéraux précédents et se trouve également dans les géodes. C'est dans ces conditions que se présente la phacélite en cristaux, renfermant des inclusions vitreuses en forme de longs canaux, ou des aiguilles d'augite orientées parallélement à l'axe vertical des prismes hexagonaux. Enfin, les interstices miarolitiques de la roche sont souvent comblés par de la leucite, sans formes distinctes, montrant très nettement les macles polysynthétiques. C'est ce même minéral qui va être caractéristique des veines noires dout j'ai parlé plus haut. Elles sont, en effet, essentiellement constituées par de la leucite, soit en grandes plages, soit en cristaux globuleux pressés les uns contre les autres et moulés par un mélange de haüyne et de humboldtilite, ou bien encore par de grandes plages de humboldtilite. La haüyne, avec ses longues inclusions noires, entrecroisées en forme de grillage, est incluse dans la leucite ou disséminée, comme nons venons de le dire, dans l'intervalle des cristaux de ce même minéral. Elle forme alors des cristallites, très allongés, souvent grêles et parfois contournant d'une façon étrange les mineraux plus anciens qu'elle; la humboldtilite qui se trouve dans ces assemblages est criblée d'inclusions ferrugineuses opaques parfois palmées, donnant au minéral un aspect scoriacé. Ces inclusions manquent généralement dans les grands cristaux de humboldtilite qui ne sont pas accompagnés d'haüyne. Le pyroxéne existe aussi dans ces agrégats soit en grand cristaux, soit en longues baguettes ressemblant a d'énormes microlites. Frequémment à sa périphérie, il se transforme en oegyrine. Enfin un peu de labrador s'observe, par places, en petites plages postérieures à la leucite. L'apatite, la phacélite généralement calcifiée sont assez abondantes. Cette roche noire est presque toujours imprégnée de calcite secondaire; elle présente des aspects très variés suivant que la leucite est plus ou moins abondante et que son ciment cristallin est lui-même plus ou moins developpé. Il

existe des passages insensibles entre ces veines noires et la roche à humboldtilite dominante. Cette dernière roche posséde les caractères extérieurs et la composition minéralogique (pyroxène et humboldtilite) des scories fréquentes dans les fours à chaux où l'on cuit des calcaires siliceux. Il est donc certain que les roches que je viens de décrire sont le résultat de la transformation de calcaires, sous l'action d'une roche volcanique dont les veinules noires leucitiques sont, sans doute, les témoins endomorphisés ». A questa descrizione ben poco abbiamo da aggiungere. Noteremo soltanto, che oltre la labradorite, scarsissima, citata dal Lacroix, trovammo, nella porzione che si separa tra 2.50 e 2.59, piccola quantità di feldispato alcalino, facilmente distinguibile dalla facellite, colla quale si trova mescolato. La facellite inoltre è identica a quella dei blocchi del Somma, dove venne per la prima volta rinvenuta e descritta da Eugenio Scacchi. Determinazioni approssimative della rifrazione di questo minerale ci hanno dato per ω un valore all'incirca eguale a 1.527 ($\pm$ 0.002). Il pirosseno di questi blocchi è egirina-augite, con $\widehat{cc} = 66°$ nel nucleo e $\widehat{cc} = 72°$ alla periferia, su (010). Il contenuto in TiO_2 di questo pirosseno non supera 1 %.

B.

Toppo della Rotondella

Nell'Italia meridionale si chiama *toppo* o *tuppo* (analogamente all'inglese *top*, al pâli *thûpo*, al sanscrito *stûpa*, al greco. più estensivo, τοπος, etc.) ogni prominenza di terra non molto elevata, di forma tondeggiante: tale nome hanno anche, e lo portano con pieno diritto, le due colline della Rotondella e dell'Imperatrice; anzi la prima, a maggiormente specificare la sua forma, porta anche il nome proprio di Rotondella. Infatti questa collina, lunga alla base appena un centinaio di metri e alta non più di una ventina sul suolo circostante, coperta com'è da folta vegetazione, a mala pena si distacca dal fondo del cratere sotto forma d'una piccola verruca tonda.

Quando la si ascende dal piano nord, dalla parte della Vaccaria, tra gli intrichi delle radici si scorgono delle sporgenze rocciose d'una trachite grigiastra e porosa, coperta alla superficie da una grossa crosta d'alterazione gialliccia: altrettanto si vede nei fianchi occidentali e orientali e nella breve spianata della sommità. Ma la parete meridionale invece è tutta rotta verticalmente e priva di bassa macchia spinosa, così che mette chiaramente a nudo la costituzione della collina, rappresentata da un ammasso cupolare di lava trachitica, che in quel punto è segmentata, per scomposizione propria, in grossi blocchi irregolari, i quali vengono poi vieppiù staccati l'uno dall'altro mediante le radici degli alberi, incuneantisi tra essi, e l'alterazione chimica, discendente con l'acqua lungo le numerose e ampie spaccature. La roccia essa stessa, molto porosa, e simile per composizione e struttura alla lava dei Pagliaroni, dà facile opera ai dissolventi agenti atmosferici.

Questa massa lavica della Rotondella topograficamente è molto limitata: a nord essa non giunge neanche ad urtare i fianchi interni della cinta, ma è subito ricoperta, al pari che a est e ad ovest, dai materiali di alluvione accumulatisi nell'atrio; a sud, appena al limite dell'insenatura che la divide dall'Imperatrice, è ammantata dalle pomici e dai tufi di questa: solamente a sud-est essa offre continuità con la corrente di lava scoriacea dei Pagliaroni. Siccome poi la composizione e la struttura delle due lave offre molta simiglianza, se ne può dedurre, che lo stesso magma, il quale dapprima, più soluto e fuso, si espanse nella fluida corrente scoriacea dei Pagliaroni, poi, col perdere di vapor d'acqua e di calore, ebbe sbocchi più densi e pastosi, che si restrinsero e si accumularono su sè stessi, a formare la cupoletta lavica della Rotondella.

La roccia della Rotondella ha, come s'è detto, colore grigiastro, anche violaceo nelle parti più fresche, gialliccio in quelle più alterate, e in essa, più che nelle lave della Caprara e di Pagliarone, sono abbondanti le segregazioni feldispatiche, accanto alle quali si scorgono appena l'augite e la biotite.

I cristalli di *feldispato alcalino* sono largamente tabulari secondo (010) e allungati secondo a; in essi è costante la geminazione secondo la legge di Carlsbad e la rifrazione corrisponde a quella del sanidino delle rocce della Caprara e di Pagliarone. Così dicasi per i *feldispati* di *Ca* e *Na*, che in cristalli più piccoli sono anch'essi numerosi e presentano il solito e sottile mantello di sanidino. Essi vanno riferiti a miscele di *bitownite* e *bitownite-anortite*, e soltanto la stretta zona periferica è costituita da *labradorite* Ab_1An_1. Raramente α' si avvicina a 1.556, ma ne resta quasi sempre nettamente superiore, con $\gamma' = 1.568$ e talora $\gamma' = > 1.578$. Gl'interclusi di *augite*-verdognola mostrano su (010) $\hat{c\mathfrak{c}} = 49°\text{-}50°$, ma non mancano varietà di colorazione intensa con $\hat{c\mathfrak{c}} = 57°$. Tipi alcalini si ritrovano nella massa fondamentale, dove i microliti intensamente verdi, o più spesso d'un giallo vivo, presentano un massimo di estinzione, nella zona verticale, di $\hat{c\mathfrak{c}} = 77°$.

La maggior parte della *biotite* che costituisce gl'interclusi appartiene alla varietà a forte angolo 2E (circa 80°). Tuttavia accanto a questa mica si trova anche la comune varietà bruna, simile a quella delle rocce della Caprara e dei blocchi. Fra i componenti accessori notiamo l'*apatite* e la *magnetite titanifera*: la *leucite* è rara, sfugge generalmente all'osservazione microscopica delle lamine sottili e si ritrova all'esame della porzione leggera, che si separa dalle soluzioni pesanti.

La *massa fondamentale* è *ipocristallina*, e sul vetro bruniccio sono numerosi i microliti di sanidino e di egirina-augite, accompagnati da magnetite. La sodalite è piuttosto rara.

Chimicamente la lava della Rotondella è analoga a quella della Caprara e di Pagliarone; e con quest'ultima l'identità è anche mineralogica, trovandosi in entrambe frequenti l'egirina-augite nella massa e la biotite a forte angolo 2E.

È quindi anch'essa una trachite-andesitica ipocristallina, e precisamente una *vulsinite*. Ecco i risultati dell'analisi:

SiO_2	57.60
TiO_2	0.46
Al_2O_3	19.43
Fe_2O_3	2.49
FeO	1.92
MnO	0.23
MgO	1.06
CaO	4.17
Na_2O	3.55
K_2O	8.71
H_2O a 100°.	0.32
H_2O sopra 110°	0.32
P_2O_5	0.20
Cl	0.04
	100.50

C.

Toppo dell'Imperatrice

Il toppo dell'Imperatrice, che è il colle più alto e più grande tra gli interni rilievi degli Astroni, è quello che, per tale ragione, ha dato il nome a tutto quanto il prominente gruppo centrale e che è stato così spesso falsamente descritto, perchè gli si è attribuita quella costituzione lavica massiccia, che presenta solo la Rotondella; e si è quindi detto, che la parte centrale di Astroni è rappresentata dalla grande cupola lavica dell'Imperatrice, la quale nell'erompere alla superficie avrebbe, secondo i sostenitori della teoria del sollevamento, rialzato ai suoi margini la cinta ad anfiteatro e formato così il grande recinto craterico.

Ma invece questo toppo dell'Imperatrice, tutto formato da materiale frammentario, al pari di ogni altro cono eruttivo originatosi per esplosioni, con la sua stessa costituzione toglie ogni sostegno a quella, già per sè stessa insostenibile, ipotesi, che spesso, come in questo caso appunto, è partita da false premesse.

Topograficamente l'Imperatrice è rappresentata da una collina oblunga, diretta da nord-ovest a sud-est (v. carta geologica della tav. VII), lunga circa 700 e non più larga di 400 metri, alta circa 60 m. sul livello del lago e poco più di 70 su quello del mare. Essa è nettamente limitata: a nord dall'insenatura, che la separa dalla Rotondella, a ovest dal piano ondulato dall'atrio, a sud dall'attuale lago, a est dal disseccato piccolo bacino lacustre di Cofaniello e dalla limitrofa valletta. Guardandola dal lago, si vede bene il suo distacco dalle finitime basse prominenze dei Pagliaroni (v. fig. 1 della tav. V). Il dorso è egualmente tondeggiante nella parte superiore e nei fianchi settentrionali, occidentali e meridionali :

invece è concavo e ripido ad oriente, quasi ad indicare la parete interna di un cratere, rappresentato probabilmente dal profondo imbuto di Cofaniello.

Tutta la collina è splendidamente rivestita di alta vegetazione arborea e di intricata macchia bassa, ad eccezione della estrema falda sud-est, prospiciente il lago e l'ingresso, la quale è alquanto erosa e denudata, al pari di tutte le plaghe dei Campi Flegrei rivolte a sud ed esposte all'azione devastatrice dei venti piovosi salienti dal mare.

In qualunque punto dell'Imperatrice si ponga il piede, per poco che si guardi con attenzione si finisce con scorgere, sotto la coperta fitta di humus e tra l'intrico delle radici, che il materiale costitutivo prevalente è di natura frammentaria; ma dove poi tale costituzione si rivela in modo irrefragabile è nella suddetta estrema pendice sud-est, la quale fin dal belvedere dell'ingresso permette di scorgere la sua parete denudata, che col caratteristico color bianco rivela già da lungi la sua formazione di tufi e di ceneri: la quale poi da basso è così evidente, che reca meraviglia, come molti osservatori, ed esperti e coscienziosi, abbiano potuto immaginare tutta la collina come formata da solida trachite.

Salendo dal sentiero, che va lungo il margine settentrionale dell'attuale lago, si può esaminare benissimo questa parete meridionale dell'Imperatrice, lungo una sezione di circa quarantina di metri d'altezza. In basso, verso oriente, si hanno dei banchi di scorie o di lava scoriacea, che rappresentano la continuazione dei Pagliaroni, dianzi descritti: su queste scorie si elevano dei distintissimi strati di tufi, pomici, pozzolane (v. fig. 2 della tav. V) e altri materiali frammentarî, contenenti inglobate scorie nerastre e blocchi rigettati: strati che rassomigliano molto a quelli dal grande recinto e che costituiscono tutta l'Imperatrice. Noi indicheremo brevemente le varie sorta dei materiali componenti, così come abbiamo fatto anche per quelli della cinta esteriore.

a.

Agglomerati e Tufi

Gli agglomerati e i tufi dell'Imperatrice rassomigliano molto, come s'è detto, nella loro apparenza esteriore a quelli del grande recinto, giacchè si presentano identicamente stratificati in banchi sottili di color gialliccio o grigio molto chiaro, con simili inclusioni di scorie e di blocchi rigettati (v. fig. 2 della tav. V); ma, esaminandoli più da presso, si vede, che la simiglianza è solo parziale ed apparente, perchè qui non avvien mai di trovare dei tufi così compatti, come quelli che abbiamo descritto per la cinta esteriore, a pag. 12 e seg., ma piuttosto si riscontrano generalmente delle pozzolane alquanto coerenti e dei lapilli diversamente stratificati e insieme ammassati, a formare dei banchi, che però molto facilmente franano e facilmente si sgretolano sotto i colpi del martello, in guisa che riesce difficile poter raccogliere un vero campione di tufo: ciò che certo non si può dire pel materiale del grande anfiteatro. Inoltre qui tra i materiali costituenti gli agglomerati spesseggiano le ceneri e i lapilli, quantunque neanche scarseggino le pomici, che tanta parte assumono nella costituzione della grande cerchia esterna.

Quando le ceneri, le pozzolane e i lapilli sono in certa guisa cementati, formano degli straterelli di rocce grigie o giallicce, che per la loro composizione mineralogica complessiva in nulla diversificano dai tufi compatti della grande cerchia. Constano cioè di frammentini di minerali diversi e di minuti lapilli di pomici, di ossidiane e di varie trachiti, insieme cementati da ceneri pumicee. Fra i frammentini minerali stanno in primo luogo i *feldispati*: tanto l'*alcalino* ($\gamma = 1.527$; $\alpha = 1.521$), quanto le miscele basiche *labradorite-bitownite-anortite*. Anche qui soltanto il bordo dei cristalli è costituito da labradorite Ab_1An_1 ($\alpha' => 1.555$, ma generalmente $\alpha' > 1.566$ e $\gamma' < 1.576$, e talora $\gamma' => 1.576$). Fra i minerali colorati predomina l'augite verdognola con $\widehat{cc} = 48°-50°$ su (010). Meno frequente vi si trova un *pirosseno* a colorazione più intensa, con $\widehat{cc} = 47°$ su lamine di sfaldatura (110). La *biotite* appartiene alla varietà bruna con $2E = 40°-46°$. Manca la biotite rossa a forte angolo 2E, caratteristica delle lave di Pagliarone e della Rotondella. L'*olivina* e la *sodalite* sono eccezionalmente rare; più frequenti sono l'*apatite* e la *magnetite titanifera*. Non trovammo leucite. Tra i frammentini lapillosi predominano le pomici; meno frequenti sono le ossidiane più o meno ricche di microliti e le ossidiane a vetro bruno con segregazioni di feldispati basici. La natura del vetro tanto delle pomici quanto delle ossidiane corrisponde a quella più volte ricordata parlando dei tufi della grande cerchia. Fra i frammentini lapillosi trachitici predominano le varietà sodalitiche e quelle di tipo trachidoleritico.

b.

Pomici ossidiane e scorie

Come sotto forma di lapilli, a costituire i tufi, così anche sotto forma più vistosa non scarseggiano nella collina dell'Imperatrice le pomici, che abbiamo viste così abbondanti nella grande cerchia esterna. Esse non mancano mai del tutto, ma a volte qui sono meno appariscenti, entrano come un componente più esiguo nella composizione degli agglomerati, e formano dei banchi molto più limitati, per estensione e spessore, e anche per grandezza degli elementi. Alquanto più scarse invece sono le ossidiane, di cui però qualche frammento pur si ritrova, caratterizzato a volte da quella forma poliedrica, e più specialmente tetraedrica, che, come abbiamo innanzi detto, si trova poi bene sviluppata nelle bombe dei vicini crateri di Campana, riproducendo quivi le note forme delle classiche bombe di Vulcano. A differenza delle ossidiane sono abbondanti invece le scorie, nere e spugnose, che da per tutto si trovano impigliate nella massa degli agglomerati dell'Imperatrice.

Questi diversi prodotti in nulla differiscono dalle pomici, dalle ossidiane e dalle scorie, che entrano nella compagine della grande cerchia, tanto che crediamo inutile il ripeterne qui una minuziosa descrizione. Vi si ritrovano i medesimi interclusi di *feldispato alcalino* e basico (*labradorite-bitownite-anortite*). Meno frequenti appajono gl'interclusi di *augite* verde [$\widehat{cc} = 48°-50°$ su (010)], e di *biotite bruna*, accompagnate da *magnetite* e da *apatite*. Nella massa vetrosa delle pomici sono piuttosto scarsi i microliti di sanidino e di augite, mentre questi abbondano

in alcune ossidiane, fra cui avvene alcune assai ricche in microliti di sanidino, intorno ai quali il vetro è più oscuro, le quali passano gradatamente a jalotrachiti. Talora il vetro maggiormente carico di microliti e di magnetite forma Schlieren nelle varietà eutaxitiche. Il vetro di queste ossidiane e delle pomici ha rifrazione all'incirca eguale a 1.515, talora compreso tra 1.515 e 1.521. Quindi anche per questo carattere si ha perfetta analogia coi medesimi prodotti della grande cerchia. Così dicasi per le *scorie*, che constano di trachiti andesitiche (vulsiniti) bollose, nerastre, ipocristalline, piuttosto ricche in sodalite e a interclusi di sanidino, bitownite, augite, biotite bruna, con apatite, magnetite, sodalite, e forse in qualche varietà anche leucite.

c.

Blocchi rigettati

I frammenti di rocce inclusi negli agglomerati dell'Imperatrice si trovano qui allo stesso modo che nella grande cerchia esterna, con la sola differenza che i blocchi non raggiungono le dimensioni molto grandi, che a volte si riscontrano là: ciò che è naturale, data la minore potenza delle esplosioni.

Essi appartengono quasi esclusivamente alle varietà chiare, cenerognole, che abbiamo visto essere tanto frequenti fra i blocchi della grande cerchia. La composizione mineralogica e la struttura in nulla differiscono da quelle già descritte. Predominano i blocchi con *orneblenda bruna*, frequente tanto nella massa fondamentale quanto fra gl' interclusi. Rara è l'*olivina*, piuttosto scarsa la *biotite* e fortemente corrosa dal magma. L'*augite*, che è il minerale colorato prevalente, appartiene alla varietà verde chiara o verde giallognola con $c\hat{c} = 48^\circ$-53°, talora con zone periferiche di *egirina-augite*, la quale si trova diffusa nella massa fondamentale di alcuni blocchi. Fra i feldispati interclusi abbondano, oltre al sanidino, le miscele basiche di *labradorite-bitownite-anortite*, e questi interclusi basici sono circondati da sottile mantello di sanidino. La *massa olocristallina*, a struttura listiforme fluidale del sanidino, è per lo più ricca in sodalite. Riscontrammo le solite *segregazioni basiche*, come le già descritte a pag. 41; e nelle cellette miarolitiche si annidano sovente cristalli limpidi di sodalite }110{, allungati secondo un asse trigonale e geminati nel modo caratteristico.

Sono rarissimi i blocchi di trachiti nerastre; e non riscontrammo, probabilmente a causa delle loro rarità, i blocchi compatti afanitici di tipo trachidoleritico. Si trovano invece alcuni blocchi grigio-giallicci a struttura porfirica olocristallina, con rari interclusi di sanidino e, più frequenti, piccoli interclusi basici di bitownite, e con pochi interclusi di biotite e di augite chiara ($c\hat{c} = 44^\circ$-47°). La massa di questi blocchi è costituita da liste tozze di feldispato alcalino, accompagnate da una piccola quantità di feldispato di *Ca* e *Na*, con numerosi cristalli idiomorfi di augite e di biotite: quest' ultima qui assai più abbondante che nei comuni blocchi di Astroni. È certo che anche questi blocchi rappresentano un tipo alquanto più basico di quello prevalente nel nostro cratere.

3.

Riassunto della natura e distribuzione dei materiali

Nelle pagine precedenti abbiamo a mano a mano visto, che il magma eruttato dagli Astroni ha assunto quasi tutte le forme di consolidazione offerte dalle rocce eruttive: cioè dalle minutissime ceneri sciolte, passando per le pozzolane, i lapilli, i tufi teneri, i tufi compatti, le pomici, le ossidiane, le scorie, fino alle lave scoriacee e alle lave massicce. Prevalente di gran lunga in queste forme sono quelle frammentarie e agglomeratiche, che costituiscono tutto il grande recinto esterno e l'interna maggiore collina dell'Imperatrice; la lava scoriacea in corrente forma soltanto le limitate prominenze dei Pagliaroni, e la lava massiccia costituisce solo la piccolissima cupola della Rotondella. A ciò bisogna aggiungere la massa lavica della Caprara, incastonata negli agglomerati del recinto esteriore, la quale però secondo ogni probabilità è di formazione anteriore a quella delle eruzioni di Astroni propriamente dette.

Queste varie forme di materiali hanno composizione chimica e mineralogica fra loro molto simili, e ci presentano un tipo litologico ben definito e costante, sommamente caratteristico pel nostro cratere, che sta tra le comuni trachiti acide, sanidiniche-biotitiche, e le andesiti; con alcune varietà, che per la maggiore basicità e pei speciali caratteri mineralogici stanno piuttosto tra le trachiti e le tefriti.

In tutte le rocce di Astroni sono infatti abbondantemente rappresentate le miscele basiche labradorite-bitownite-anortite accanto al sanidino sodico. In alcuni blocchi, che abbiamo ascritti al tipo trachidoleritico, tali feldispati basici sostituiscono, tra gl' interclusi, quasi completamente il sanidino ed entrano anche nella composizione della massa fondamentale. Inoltre la sodalite è un componente quasi costante, talora abbondante; e frequente trovasi pure l'olivina e la leucite, sebbene in quantità piccole.

Chimicamente le rocce di Astroni sono caratterizzate pel medio contenuto in SiO_2, inferiore a quello delle tipiche trachiti, notevole quantità di Al_2O_3, medio contenuto in ferro, poco MgO, mentre è sensibile il contenuto in CaO e notevole la proporzione degli alcali, fra i quali il potassio è fortemente prevalente sul sodio.

Nelle seguenti tabelle sono riassunte le composizioni mineralogiche e chimiche delle rocce del nostro cratere (tabella A a pag. 57), descritte nelle pagine precedenti, e vi è inoltre riportata la composizione chimica di rocce analoghe di varie località, che ci serviranno per opportuni confronti (tabella B a pag. 59).

QUADRO RIASSUNTIVO DELLA COMPOSIZIONE MINERALOGICA DELLE ROCCE DI ASTRONI

ROCCE ESAMINATE	Interclusi												Massa fondamentale						
	Feldispato alcalino	Labradorite-bitownite-anortite	Diopside-augite	Egirina-augite	Orneblenda	Biotite (2E=40°)	Biotite (2E=80°)	Olivina	Apatite	Magnetite	Leucite	Sodalite	Sanidino	Feld. di *Ca* e *Na*	Augite	Egirina-augite	Orneblenda	Biotite	Vetro
Massa della Caprara																			
tipo compatto	+	+	+		•	—			—	—	•	—	+		+	—	—	•	•
tipo scoriaceo	+	+	+	—		—			—	—	—	—	+		+	+	•	•	—
segregazioni basiche	•	+	+	—	•	—			—	—									
Pagliarone																			
tipo scoriaceo	+	+	+	—		•	—		—	—	•	•	+		—	—			+
tipo giallo, compatto	+	+	+	—		•	—		—	—	•	•	+		•	+			—
Rotondella	+	+	+	—		—	—		—	—	—	•	+		•	+			±
Pomici	+	+	+			—			—	—			—		—				+
Ossidiane	+	+	+			—			—	—			•		—				+
Scorie	+	+	+			—			—	—	•	—	—		—	•			+
Scorie violacee (ingresso)	+	+	+	—		—	+	•	—	—	—		—		—	•			+
Blocchi rigettati																			
Vulsiniti olocristalline chiare senza olivina	+	+	+		—	—			—	—		—	+	•	+	—	—	—	•
Id. con olivina	+	+	+		+	—		—	—	—	•	—	+		+	—	+	•	•
Segregazioni acide	+	—	—			—			—	—			—		—			—	+
Id. basiche senza olivina	—	+	+	—	•	—			—	—		—							
Id. id. con olivina	—	+	+	•	+	+		+	—	—		—							
Id. id. vetrose		±	+	•		+		—	—	—		—							+
Vulsiniti brune ipocristalline	+	+	—	•		—			—	—	—	—	—		—	—			+
Trachidoleriti	—	+	+			—			—	—		∓	+	+	+	—	—	—	
	lapilli di minerali isolati												lapilli di: pomici	ossidiane	scorie	vulsiniti sodalitiche	trachidoleriti sodalitiche	vetro	
Tufi compatti																			
Sperone di Torre Nocera	+	+	+			—	•		—	—		•	+	+	—	+	+	+	
A nord della Caprara	+	+	—			—			—	—		•	+	—	—	—	—	+	
A sud della Caprara	+	+	+			—		—	—	—		•	+	—	+	+	+	+	
Imperatrice	+	+	+			—		—	—	—		—	+	—	+	+	+	+	
Strato dei lapilli violacei dell'Ingresso	+	+	+	—		—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	?	?	+	
Id. id. della Cupa esterna	+	+	+	•	•	—	—	—	—	—	—	—	+	+	+	?	?	+	

N.B. I componenti prevalenti sono indicati col segno +; se la loro diffusione è limitata è usato il segno —; la presenza occasionale e di quantità piccolissime di un componente è indicata col segno •.

Per questi caratteri mineralogici e chimici le rocce del nostro cratere trovano esatta corrispondenza con alcune della regione di Bolsena, che recentemente vennero con precisione distinte dal Washington col nome di *Vulsiniti* (Italian Petrological Sketches, 1, 2 e 5; Journal of Geology, vol. IV, pag. 552 e 849, e vol. V, pag. 356-360). Le vulsiniti di Bolsena, come le rocce di Astroni, contengono in quantità notevole un feldispato basico, labradorite-anortite, accanto al sanidino, e fra gli elementi colorati vi predomina l'augite; con minor frequenza vi si trova la biotite, l'orneblenda bruna ed eccezionalmente l'olivina. La massa fondamentale olocristallina, a struttura trachitica, precisamente come nelle rocce di Astroni, è essenzialmente composta da liste di sanidino sodico, con alquanta augite, magnetite ed apatite. Nelle vulsiniti di Bolsena vi è anche la titanite, che manca completamente in quelle di Astroni; sembra invece che in quelle manchino la leucite e la sodalite. Come appare dal confronto delle analisi, anche la composizione chimica corrisponde esattamente a quella delle rocce di Astroni.

Col progredire degli studi petrografici si sono stabiliti in questi ultimi anni dei tipi intermediari di rocce fra quelli delle classiche famiglie litologiche, proponendo dei nomi speciali per quei tipi intermedii, che, tanto mineralogicamente e chimicamente quanto geologicamente, sono meglio definiti e rappresentati. Nè vi sarebbe a temere troppo di creare confusione nella nomenclatura petrografica, qualora si usasse con giusto criterio e discernimento di questa facoltà. Il Loewinson-Lessing, che è fra i maggiori oppositori all'eccessiva introduzione di nuovi nomi, a pag. 297 dei suoi interessanti *Studien über die Eruptivgesteine*, pubblicati nel Compte Rendu del VII Congresso Geologico Internazionale, tenuto a Pietroburgo nel 1897, combatte l'adozione del nome *Vulsinite*, proponendo di chiamare semplicemente queste rocce col nome di Trachiti andesitiche.

Tuttavia parecchi altri tipi litologici, caratteristici di altri vulcani, presentano tipi intermedi tra le trachiti e le andesiti, pur differenziandosi con sufficiente nettezza, tanto mineralogicamente quanto chimicamente, dalle rocce di Bolsena e di Astroni: come ad esempio alcune trachiti basiche dell' Alvernia, del Siebengebirge, degli Euganei e degli stessi Campi Flegrei. E inoltre il cratere di Astroni ci presenta così bene sviluppato, definito e costante questo tipo litologico, che crediamo opportuno conservare per esso il nome di *Vulsinite*, come venne proposto dal Washington per le analoghe rocce di Bolsena.

Allo scopo ora di stabilire il posto, che nelle recenti classificazioni chimiche occupano le rocce di Astroni, e di confrontarle colle rocce analoghe di altre località, coll'ajuto di opportune formule e diagrammi, preparando così i dati per più estesi confronti coi materiali degli altri crateri flegrei, quando le successive ricerche ce lo permetteranno, esponiamo nella tabella seguente (tabella C a pag. 61) i rapporti molecolari (colonne *b*), dedotti dalle analisi centesimali delle nostre rocce, ridotte a 100 previa deduzione di H_2O, *Cl* e P_2O_5. Il biossido di titanio è unito a SiO_2, e *MnO* è unito a *FeO* (colonne *a*). Nelle colonne *c* sono esposti i rapporti molecolari ridotti a 100, col ferro intieramente calcolato come *FeO*.

Le formule esposte nel successivo quadro (tabella D a pag. 61) sono quelle del Loewinson-Lessing (*Studien über die Eruptivgesteine*) e dell'Osann [*Versuc einer chemischen Classification der Eruptivgesteine*: 1.° *Die Tiefengesteine*; 2.° *Die Ergussgesteine* (Tschermak's Mineral. u. Petrogr. Mitth., Bd. XIX, p. 352, e Bd. XX, p. 399, 1901-1902)]. Le prime sono dedotte direttamente dalle proporzioni molecolari delle colonne *b*, le seconde dalle stesse ridotte a 100 (colonne *c*), in cui il ferro è calcolato intieramente come *FeO*.

B

	Astroni							*a*	*b*	*c*	*d*	Regione Flegrea					
												e	*f*	*g*	*h*	*k*	*i*
	Caprara	Pagliarone	Rotondella	Pomice	Ossidiana	Lapilli violacei	Blocco rigettato Trachidolerite	Vulsinite Bolsena	Vulsinite Vetralla	Banakite	Ganteite	Lava dell'Arso Ischia	Jalotrachite Concola Cratere di Fondo Riccio	Idem	Idem	Le Cremate Ischia	Trachite soda-litica Monte Santo Napoli
SiO_2	57,58	57,50	57,60	58,35	57,90	56,69	54,72	58,21	57,32	57,29	54,15	56,75	56,74	57,25	56,27	54,83	57,91
TiO_2	0,31	0,50	0,46	0,30	0,25	0,45	0,65	tr.	—	0,72	tr.	1,24	—	—	—	—	0,65
Al_2O_3 . . .	19,39	18,80	19,43	19,83			19,60	19,90	19,85	18,45	18,25	18,37	18,74	19,93	18,67	20,17	15,79
Fe_2O_3 . . .	3,22	4,37	2,49	0,98		3,03	2,45	4,07	2,21	4,48	3,62	2,22	3,84	4,83	5,74	4,7[illegible]	6,[illegible]1
FeO	1,62	0,62	1,92	2,37		2,08	3,09	0,87	2,35	1,20	2,09	3,04	2,87	2,27	1,58	3,86	0,01
MnO	tr.	0,57	0,23	—		0,53	tr.	—	—	tr.	—	tr.	tr.	0,09	—	—	0,23
MgO	1,17	1,20	1,06	0,90			1,90	0,98	1,60	2,08	2,56	2,02	2,00	1,78	1,44	1,93	1,66
CaO	4,08	3,84	4,17	3,67			5,00	3,58	3,82	3,57	4,89	4,68	4,63	3,40	4,47	4,12	2,99
Na_2O	3,12	3,16	3,55	3,59			3,52	2,57	3,22	4,43	4,43	4,85	4,36	4,43	4,65	3,04	6,01
K_2O	8,68	8,39	8,71	9,10			6,87	9,17	9,15	5,43	6,56	5,92	7,18	6,69	5,03	7,38	7,27
H_2O a 110°. .	0,44	0,38	0,32	0,96			2,08	0,74	0,57	2,18	3,69	0,18	0,14	0,25	0,19	0,46	0,34
H_2O sopra 110°	0,50	0,61	0,32										0,30	0,24	1,58		
P_2O_5	0,21	0,28	0,20	tr.			tr.			0,46	0,41	—	tr.	tr.	tr.		0,01
Cl.	0,17	0,03	0,04	tr.			0,05			NiO 0,12	—	0,11	0,22	0,29	tr.		0,60
	100,49	100,25	100,50	100,05			99,93	100,09	100,09	100,31	100,65	99,38	101,02	101,72	99,62	100,56	100,27

a. H. S. Washington, *Italian Petrological Sketches, I The Bolsena Region.* The Journal of Geology, vol. IV, p. 552.

b. Ibid., *II The Viterbo Region.* Vol. IV, pag. 849; *V, Summary and Conclusion.* Vol. V, pag. 356-360.

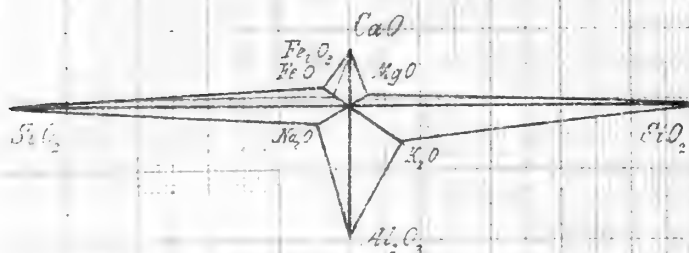
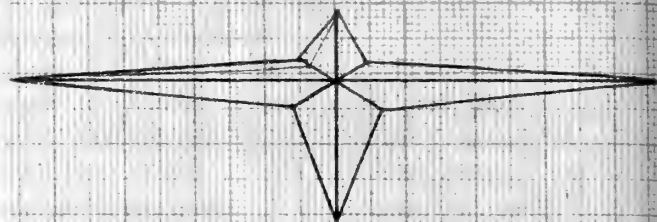
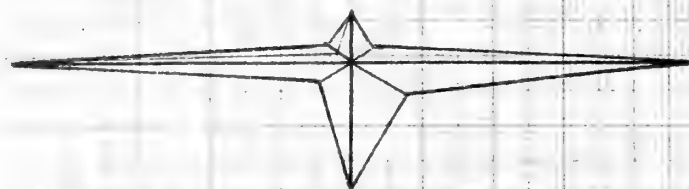
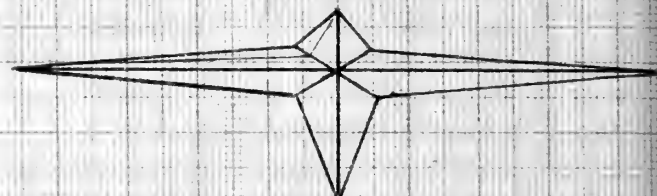
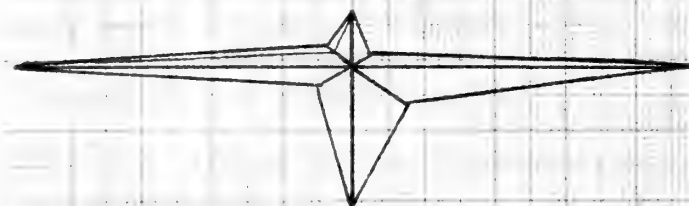
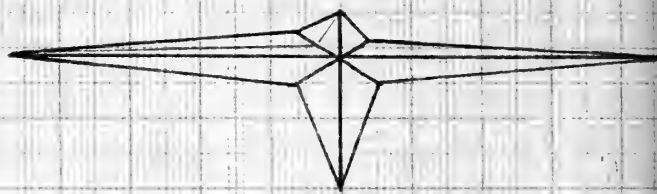
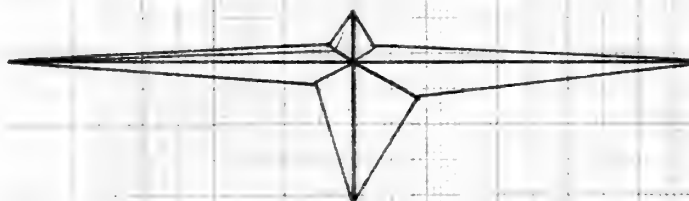
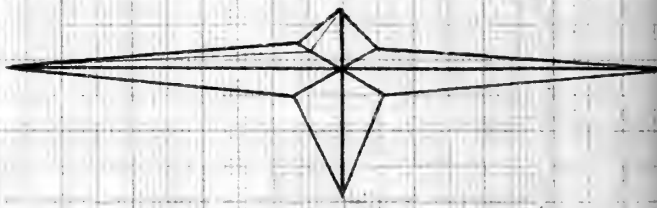
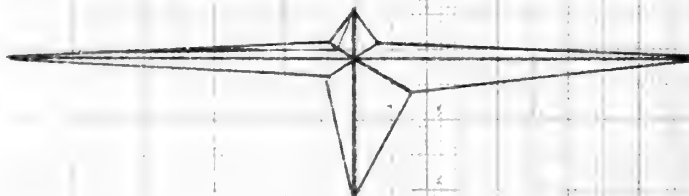
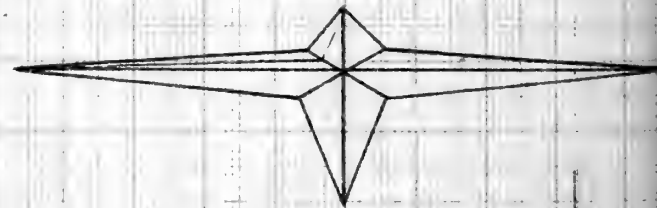
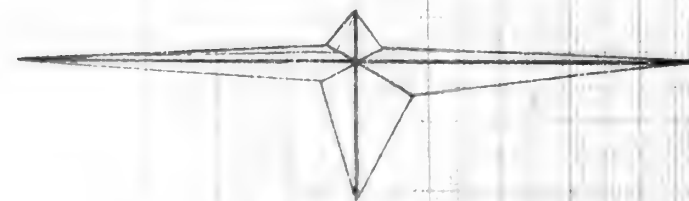
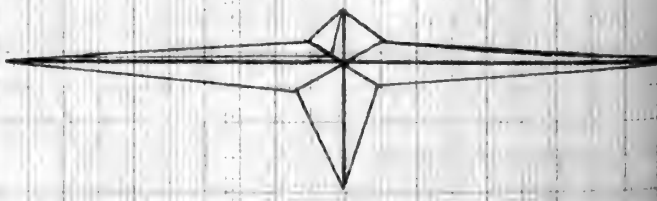
d. Hibsch, *Erläuterung zur geologischen Karte des Böhmischen Mittelgebirge.* Tschermak's Mineral. Petrograph. Mitth. Bd. 17, 1898, p. 84.

c. Iddings, *Absarokit-Shonshonite-Banakite Series. Geology of the Yellowstone National Park.* United States Geological Survey. Monograph 23, II part., p. 326.

c, [illegible]. H. S. Washington, *Some analyses of Italian Rocks.* American Journal of Sc. Vol. VIII, IV serie, 1899, p. 290.

f, *g*, *h*. E. Manasse, *Rocce trachitiche del Cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* Note I e II. Rendic. r. Accad. dei Lincei, vol. XI, 1° sem. Roma 1902, pag. 88 e 126-127.

i. Johnston-Lavis, Geol. Mag. (III) VI, pag. 77, 1889.

Fig. 1.
Diagrammi secondo il metodo di Brögger delle composizioni chimiche comparate dei materiali del cratere di Astroni

C

	Caprara			Pagliarone			Rotondella			Pomice			Blocco rigettato di tipo trachidoleritico		
	a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
SiO_2	58,07	96.78	66,0	58,18	96,97	66,2	57.82	96.37	65,9	58,90	98.17	66,9	55,95	93,25	63,5
TiO_2	0,31	0.39	—	0,50	0,62	—	0.46	0 57	—	0.30	0.37	—	0,67	0,84	—
Al_2O_3	19,56	19,18	13,0	18,98	18,61	12,6	19,52	19,14	12,9	20,00	19 60	13,3	20,04	19,65	13,2
Fe_2O_3	3,24	2,03	—	4,41	2,75	—	2,50	1.60	—	0.99	0.62	—	2,51	1,57	—
FeO	1,64	2,28	4,4	1,19	1 65	4,9	2,15	3,00	4.1	2,39	3,32	3,1	3.16	4,39	4,9
MgO	1,18	2,95	2,0	1,21	3,02	2.0	1,06	2,65	1,8	0,91	2,27	1,6	1,94	4,85	3,2
CaO	4,11	7,34	4,9	3,87	6,91	4,7	4,18	7.46	5,1	3.70	6,60	4,5	5,11	9,12	6,1
Na_2O	3,14	5.06	3,4	3.19	5.14	3,5	3,56	5.74	3.9	3 62	5 84	3.9	3,60	5,81	3,9
K_2O .	8,75	9,31	6,3	8,47	9,01	6.1	8,75	9,31	6,3	9,19	9,79	6,7	7.02	7,47	5,2
	100,00	145,32	100,00	100,00	144,68	100,00	100,00	145,84	100,00	100,00	146.58	100,00	100,00	146,95	100,00

Formule secondo Osann

Caprara	S_{66}	$A_{9,5}$	C_3	$F_{7,5}$	$N_{3,5}$
Pagliarone	$S_{66,2}$	A_9	C_3	F_8	$N_{3,5}$
Rotondella	$S_{65,9}$	$A_{9,5}$	$C_{2,5}$	F_8	N_4
Pomice	$S_{66,9}$	$A_{10,5}$	C_3	$F_{6,5}$	$N_{3,5}$
Blocco rigettato di tipo trachidoleritico . .	$S_{63,5}$	A_8	$C_{3,5}$	$F_{8,5}$	$N_{4,2}$

D

Formule magmatiche Loewinson-Lessing

		RO	R_2O_3	SiO_2	RO	R_2O_3	SiO_2	α	β	$R_2O:RO$
ASTRONI	Caprara	2,7	2,1	9,7	1,29	1	4,62	2,14	50	1 : 0,88
	Pagliarone	2,6	2,1	9,7	1,24	1	4,62	2,18	49	1 : 0.88
	Rotondella	2,8	2,1	9,7	1,33	1	4,62	2,15	50	1 : 0,87
	Pomice	2,8	2,0	9,9	1,40	1	4,95	2,23	49	1 : 0.78
	Blocco trachidoleritico .	3,2	2,1	9,4	1,52	1	4,48	1,97	56	1 : 1,38
Vulsinite, Bolsena . . .		2,4	2,2	9 8	1.09	1	4,46	2,17		
Vulsinite, Vetralla . . .		2,9	2,1	9,6	1,38	1	4,57	2,08		
Jalotrachite, Concola . . .		3,2	2,1	9,4	1,5	1	4,5	2,00	56	1 : 1,2
» » . . .		2,8	2,2	9.4	1,3	1	4,3	1,98	54	1 : 1
» » . . .		2,7	2,2	9,5	1,2	1	4.3	2.02	52	1 : 1,1
Arso, Ischia (Ciminite) . .		3,3	2,0	9,6	1,65	1	4,8	2,08	55	1 : 1,3
Ganteite		3,3	2,1	9 4	1,57	1	4.48	1,95	57	1 : 1,3
Banakite		2,7	2,3	9,9	1,20	1	4,37	2.08	50	1 : 1

Fra i diversi metodi grafici, recentemente proposti per rappresentare la composizione chimica delle rocce, abbiamo scelto (vedi fig. 1 a pag. 60) i diagrammi del Brögger, per la loro evidenza, unita alla rapidità nel costruirli e al fatto che non sono basati sopra ipotesi teoriche, riguardo all'aggruppamento dei componenti (Brögger, *Das Ganggefolge des Laurdalits*, Kristiania 1898, pag. 255).

Esaminando le formule ed i diagrammi esposti, appare con evidenza l'identità tra le rocce di Astroni e le vulsiniti di Bolsena e di Vetralla. Questa identità, oltre che pei tipi analizzati della Caprara, di Pagliarone, della Rotondella, delle pomici e delle ossidiane, possiamo per analogia estenderla alla maggior parte dei blocchi rigettati, la cui composizione mineralogica vedemmo essere analoga a quella dei materiali autogeni del nostro cratere e in tutto simile a quella delle note vulsiniti. Tra le poche rocce di altri vulcani flegrei, delle quali ci sono note buone analisi chimiche e mineralogiche, nessuna si avvicina al tipo Astroni al pari delle vulsiniti di Bolsena e Vetralla, descritte dal Washington.

Maggiore corrispondenza sembrano invece trovare, nella stessa regione flegrea, le rocce di tipo alquanto più basico, che costituiscono i pochi blocchi compatti, afanitici, senza apparente struttura porfirica, che abbiamo distinti come trachidoleriti. Chimicamente differiscono dalle vulsiniti pel rapporto $Na_2O:K_2O$ ($n=3.5$ nelle vulsiniti di Astroni, $n=4.4$ nel blocco trachidoleritico), per la maggiore quantità degli ossidi di tipo RO e per la minore acidità, avvicinandosi notevolmente alle *ciminiti* di Washington, che l'Osann, e ci sembra a ragione, ha posto tra le trachidoleriti nel suo recente sistema di classificazione chimica.

Nella regione flegrea queste rocce trovano le corrispondenti nelle jalotrachiti scoriacee, che costituiscono il piccolo cratere scoriaceo di Fondo Riccio e che vennero recentemente descritte da E. Manasse (Rend. r. Accad. dei Lincei, vol. XI, 1902 1° sem.). Anche queste rocce appartengono piuttosto al tipo ciminite di Washington, al quale si può riferire anche la nota lava dell'Arso nell'isola di Ischia (che è anch'essa una trachidolerite), la cui composizione chimica abbiamo pure messa a confronto con quella dei materiali del nostro cratere (tabella B a pag. 59, colonna *e*). Notiamo anche una corrispondenza mineralogica e chimica colle lave scoriacee delle Cremate a Ischia (Fuchs, *Die Insel Ischia*, Tschermak's Min. Mitth., 1872, p. 231) e colla trachite sodalitica di Monte Santo, descritta da Johnston Lavis (Geol. Mag. III, 1889, p. 77).

I blocchi trachidoleritici di Astroni trovano inoltre notevole corrispondenza colle *ganteiti*, rocce di color grigio chiaro o grigio verdognolo, di aspetto trachitico che in filoni attraversano principalmente i basalti ed i tufi compatti del Böhmischen Mittelgebirge e che dalla località Gant l'Hibsch denominò ganteiti (Tschermak's Mineral. Petrogr. Mitth., vol. XVII, 1898, pag. 84). E sensibile analogia chimica notiamo anche colle *banakiti a quarzo*, che, associate alle shonshoniti ed alle absorokiti, costituiscono filoni nel Yellowstone National Park e vennero recentemente descritte dall'Iddings (U. S. G. S., Monographs, 23, II parte, pag. 326). I materiali lavici di altri crateri flegrei, dei quali ci sono note buone diagnosi, come quelli del Monte Nuovo, di Cuma e della maggior parte dei crateri d'Ischia, differiscono sensibilmente dai prodotti del nostro cratere; ed anche il carattere mineralogico è alquanto diverso. Forse maggiore corrispondenza con le rocce di Astroni si troverebbe in quelle dei crateri limitrofi: come ad esempio nei materiali dei crateri di Campana o di Fossa Lupara, ma ci mancano ancora elementi sufficienti per potere entrare in tale esame, e ciò ci sarà solo possibile quando avremo completato lo studio della regione flegrea.

II.

LA TETTONICA

Ora che abbiamo con accuratezza esaminato la natura e la distribuzione topografica dei materiali di Astroni, possiamo vedere anche in quale modo essi sono insieme compaginati e intendere così l'architettura loro, la quale ci guiderà anche a immaginare la via e la maniera di genesi di questo mirabile edificio vulcanico. Naturalmente, prima d'avere il colpo d'occhio d'insieme di tutta quanta la mole del vulcano, è necessario esaminare anche qui singolarmente la costruzione di ciascuna delle parti componenti: vedere che posto occupa tra esse la rupe della Caprara, considerare bene tutta quanta la grande cerchia craterica e osservare anche con attenzione la compagine delle minori protuberanze della parte centrale del cratere.

1.

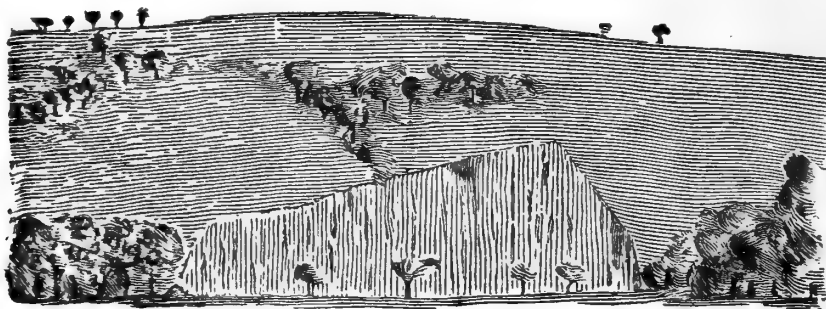
Tettonica della Caprara

La rupe della Caprara è stata in generale sempre considerata come un filone o dicco di lava, infisso nella parete orientale del cratere di Astroni, che l'avrebbe eruttata. In realtà però la sua larga massa appiattita, lunga più di 200 e alta appena un'ottantina di metri, avvolta ai fianchi e al disopra dai tufi, niente offre del caratteristico aspetto filoniano (vedi la fig. 2 a pag. 64); al più si potrebbe considerare come una grande colata di lava molto densa, sboccata dall'un dei fianchi del cratere e ivi accumulatasi prima dell'eruzione dei tufi, se altre ragioni non inducessero a ritenerla non solo anteriore, ma anche indipendente dalle eruzioni del cratere di Astroni.

Infatti, non solo la massa lavica è concordantemente coperta dai tufi (che le si addossano anche ai fianchi senza mostrare alcun indizio di essere stati in qualsiasi modo mossi dalla loro posizione originaria), ma essa è verso occidente, nell'unico suo lato scoperto, rivolto all'interno del cratere, tagliata bruscamente e verticalmente da una parete nettissima, quale potrebbe essere solo prodotta da scoscendimento o da esplosioni (vedi fig. 1 e 2 della tav. II). Ma di scoscendimenti non è il caso di parlare, perchè non se ne vede alcuna traccia nè ne esiste residuo a piede della rupe; e d'altronde agli Astroni, quantunque vi siano alcune piccole faglie nel recinto tufaceo, di tali grandi fratture con dislocazioni non ne esistono, nè possono sussisterne. Resta l'ipotesi, più conforme alla natura del luogo, di esplosioni vulcaniche, che abbiano reciso e lanciato in aria la parte occidentale della massa lavica. In tal caso si potrebbe ritenere, come dianzi s'è detto, che il cratere di Astroni, dopo avere eruttato dall'un dei fianchi la massa di lava, l'abbia poi esso stesso spezzata con ulteriori esplosioni: come vediamo, ad esempio, essere avvenuto nell'Atrio del Cavallo o nella Valle del Bove, dove le masse laviche, accumulatesi sulle spalle del vulcano originario, sono state poi infrante dalle esplosioni posteriori.

Ma Astroni non è un vulcano composito, di materiale lavico e frammentario,

come il Vesuvio e l'Etna, bensì è un vulcano di tufo, formatosi per esplosioni, per quanto grandiose e violenti, altrettanto rapide e brevi, al pari di quelle, che diedero origine al Monte Nuovo: quindi, a simiglianza del Monte Nuovo, il cratere di Astroni si presenta ora così come in principio si formò, nè si può per esso immaginare, come a torto ha fatto il Judd, un cratere secondario di esplosione, che avrebbe troncato e squarciato il primitivo cono di accumulazione. Con ciò cade anche la supposizione, che la rupe della Caprara possa essere una massa lavica prima prodotta e poi rimangiata dal cratere di Astroni.

2.

Rupe trachiandesitica della Caprara, coperta dai tufi di Astroni.

A ogni modo non è a dubitare, che la parte occidentale della Caprara sia stata spezzata da esplosioni, le quali hanno dato origine alla pittoresca rupe che di essa oggi ne resta (fig. 2 della tav. II); ed è del pari indubitabile, che le esplosioni, le quali hanno prodotto tale squarciatura, siano quelle, che hanno dato origine al vulcano di Astroni. L'interno cratere di questo infatti viene proprio ad essere tangente alla rupe della Caprara, ed i suoi materiali tufacei sono gremiti di blocchi rigettati, piccoli e grandissimi, di una trachite-andesitica (vulsinite), molto simile a quella della Caprara; dalla quale quindi con molta probabilità essi furono staccati e sparsi tutto all'intorno mediante le grandiose esplosioni del nostro vulcano.

Ciò premesso, bisogna concludere, che la massa della Caprara sia di formazione anteriore al vulcano di Astroni e rappresenti il diruto avanzo di una cupola trachitica (faciente parte, come qui appresso vedremo, dell'anteriore vulcano di Agnano), la quale, al pari di tutta la parte nord-ovest della cinta di Agnano, sarebbe stata spezzata e lanciata in aria dalle esplosioni di Astroni.

2.

Tettonica della grande cerchia esterna

Astroni da qualunque parte lo si guardi, e specialmente dallo sperone dei Camaldoli o delle colline del Vomero o di Posillipo, appare anzitutto come una profonda e cupa conca ombrosa, perchè in esso quel che è decisamente e grandiosamente formato è appunto il concavo cratere, molto simile, anche a causa delle protuberanze centrali, ai crateri della luna. Invece il cono eruttivo esteriore, es-

1.

STRATI PENDENTI ALL'INTERNO DEL CRATERE

(LA 'NGROGNA, SOTTO TORRE LUPARA)

2.

DE LORENZO E RIVA PHOT. ELIOT. CALZOLARI & FERRARIO, MILANO

STRATI PENDENTI ALL'ESTERNO DEL CONO

(INGRESSO ORIENTALE AL CRATERE)

sendo piuttosto basso e piatto e anastomizzandosi variamente con i limitrofi crateri dei Campi Flegrei, è molto meno appariscente e grandioso.

Dove esso è più libero, come sul fondo del lago di Agnano (in cui le sue pendici orientali discendono fino a meno di 20 metri sul mare), quivi è anche più basso, raggiungendo il suo orlo appena 150 metri sul mare; e dove invece la cresta del cono craterico raggiunge, come a Torre Nocera, la massima altezza di 251 metri sul mare, là essa è congiunta con due lunghi dorsi ai contigui crateri della Solfatara e di Cigliano, da cui resta quasi ecclissata: in guisa che quasi da nessun punto si può ottenere una visione completa della magnificenza esteriore di questo classico vulcano.

Se però la sua morfologia esteriore resta per tale ragione in certo modo offuscata e guasta, la tettonica invece risulta evidente e semplicissima. da qualunque punto si osservino le pendici esteriori della grande cinta ad anfiteatro.

Anzitutto questa grande cerchia stessa, al pari di quasi tutte le cerchie crateriche costituite da prevalente materiale frammentario, ha la forma di un tronco di cono, di cui la faccia superiore non è orizzontale, ma obliqua, inclinata da occidente ad oriente, in guisa che tutta la parte occidentale della cresta è più elevata della orientale, verso la quale con varie ondulazioni va degradando. Questa posizione obliqua dell'orlo del cratere non è dovuta a una prevalente degradazione atmosferica del lato orientale più basso, ma, come abbiamo visto essere avvenuto del Monte Nuovo, è di formazione originaria, dovuta: o una vera inclinazione del camino eruttivo, o a uno spirare prevalente di venti in una certa direzione, o alle masse sottogiacenti dell'antico cratere di Agnano, o a tutt'e tre o a un paio delle cause insieme riunite: tendendo tutte ad accumulare di preferenza in una direzione il materiale eruttato. Che tale forma obliqua di Astroni sia realmente originaria è dimostrato poi a sufficienza. come qui appresso vedremo, dal fatto, che prevalentemente nel lato occidentale più alto, e specialmente verso nord-ovest, dove forse cadeva la maggiore quantità di materiale, si sono deposti gli strati pendenti verso l'interno, analoghi a quelli che nel Monte Nuovo formano la parete nord-est dell'interno del cratere.

Prima di passare però a questi strati pendenti verso l'interno, è necessario esaminare gli strati esterni, che costituiscono la parte fondamentale del cono. Da questo lato il vulcano di Astroni non presenta niente di anormale rispetto alla tettonica dei comuni coni eruttivi; giacchè le sue esterne falde coniche non sono che la superficie esteriore dei numerosi strati di materiale frammentario, i quali distesi l'uno sull'altro formano con uniforme disposizione quaquaversale tuttoquanto il cono. L'inclinazione degli strati varia di qualche grado in più o in meno, secondo il luogo in cui si sono depositati, i rilievi precedenti a cui si sono addossati, i materiali di cui sono costituiti etc., ma in generale, e specialmente là dove non vi furono azioni perturbatrici, si mantiene intorno ai 20°, e piuttosto al disotto che al di sopra di 20°.

Tale inclinazione può osservarsi dovunque lungo le falde esterne del cono, e meglio che altrove là, dove le acque correnti hanno inciso in esse i soliti valloni radiali, che in questi vulcani tufacei assumono sempre l'aspetto di pittoresche *cupe*, a fondo strettissimo, chiuse da pareti quasi verticali, incorniciate di

verdura, che tagliano una stretta zona di cielo azzurro (v. fig. 2 della tav. IV). Di tali cupe discendenti dagli Astroni ve ne ha sui fianchi situati a nord-ovest dell'alveo del lago di Agnano, come anche in quelli al disotto di Torre Nocera, sia nelle pendici che guardano la Solfatara che in quelle che scendono verso il vulcanetto di Cigliano. Sempre in esse si scorgono gli strati di pozzolane, di pomici e di tufi degli Astroni pendere quaquaversalmente verso l'esterno, con una inclinazione che si fa sempre minore, a misura che si scende verso le falde del cono; giunti alle quali gli strati assumono le quasi orizzontalità dei piani intercorrenti tra i varî crateri dei Campi Flegrei. Dove però l' inclinazione verso l'esterno degli strati componenti il cono di Astroni si osserva con la massima evidenza è nella sezione in cui è praticato l' ingresso all' interno del cratere. Questa sezione per la sua magnificenza ha sempre attratto l' attenzione di tutti gli studiosi di Astroni e fu perciò anche fatta figurare da Hamilton in una delle tavole della sua opera. In essa, come si può scorgere dalla nostra fotografia (v. fig. 2 della tav. III), si vedono con una precisione straordinaria gli straterelli sottilissimi di ceneri, lapilli, pomici e tufi, contenenti qua e là sparsi blocchi rigettati, inclinare di circa 20° verso l'esterno del cono vulcanico, rappresentandoci così la posizione originaria, in cui quei materiali si accumularono, quando furono eruttati dalla bocca ignivoma.

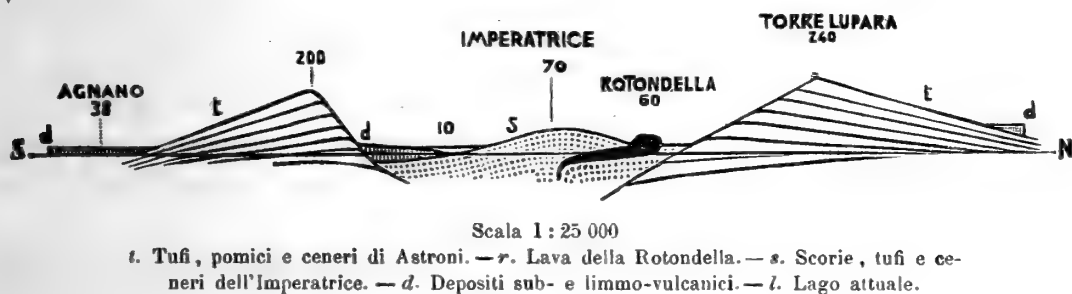
La bocca stessa, silenziosa ora, ma pur sempre minacciante, apre ancora quasi intatte le sue fauci agli sguardi di chi dalle esterne pendici sale verso la cresta sinuosa e, giunto a questa, vede con emozione sotto i suoi piedi spalancarsi d' improvviso l'ampia e cupa voragine dell'estinto cratere (v. fig. 1 e 2 della tav. VI). La parete interna di questo non ha composizione e tettonica così uniforme come le esterne pendici del cono, ma presenta parecchie variazioni. Infatti, a parte la dianzi descritta rupe della Caprara, incastonata nei fianchi orientali, questi fianchi orientali stessi sono molto deficienti di materiali rispetto alla parete interna occidentale, in cui i prodotti di eruzione si sono prevalentemente accumulati, per le cause qui sopra esposte.

In tutta la parete interna orientale affiorano le testate degli strati inclinanti all'esterno del cono; ma a misura che di là si procede da un lato e dall'altro verso occidente, si comincia a osservare nella parte più alta degli strati stessi una leggiera inflessione verso l' interno del cratere, finchè, giungendo da una parte allo Sperone di Torre Nocera e dall' altra alla Ngrogna di Torre Lupara, si vedono chiaramente degli strati di tufo pendenti verso il centro del cratere. Tale pendenza centripeta si fa sempre più frequente e diffusa, finchè raggiunge il suo massimo nell'angolo nord-ovest del cratere, sopra la Vaccaria, dove le potenti masse dei tufi pendenti verso l'interno sono rese visibili anche da lungi per i profondi valloni che hanno inciso in quel punto la parete (fig. 7 a pag. 73). Nelle sponde di tali valloni, come può osservarsi dalla nostra fotografia (v. fig. 1 della tav. III), si vedono nettamente gli strati di tufi, ceneri, pomici, etc. inclinare all'interno con una pendenza di circa 20°, corrispondente all' inclinazione centrifuga esteriore.

Alcuni geologi oggi a torto suppongono, che questi strati di Astroni e di altri vulcani, inclinanti verso l' interno del cratere, non siano prodotti di deposizione eruttiva originaria, ma rappresentino dei talus di disfacimento, formati

dalle acque di lavaggio discendenti nell'interno delle conche crateriche. Ma contro tale ipotesi c'è da opporre, che anzitutto questi strati interni non hanno mai forma di talus, ma sono sempre disposti a guisa di coperte uniformi e continue, discendenti regolarmente dalla cresta al fondo del cratere. Inoltre, per il caso speciale di Astroni, come per quello del Monte Nuovo, bisogna considerare il grande spessore di questi depositi, del tutto sproporzionato alla poca quantità di lavoro fin qui esercitata su questi vulcani dalla denudazione atmosferica. Infatti i prodotti di denudazione sono agli Astroni rappresentati appunto da piccolissimi talus, effetti di lavine, disposti tutti in giro, intorno all'atrio, e da caratteristici coni di dejezione, anch'essi di limitate dimensioni, situati agli sbocchi dei pochi valloni

3.

Scala 1 : 25 000
t. Tufi, pomici e ceneri di Astroni. — *r.* Lava della Rotondella. — *s.* Scorie, tufi e ceneri dell'Imperatrice. — *d.* Depositi sub- e limmo-vulcanici. — *l.* Lago attuale.

radiali d'erosione. Inoltre ancora, parla a favore della deposizione eruttiva originaria di questi strati la loro uniformità, che resta eguale e costante per lungo e per largo, dall'alto al basso: cosa non possibile se si trattasse di prodotti di denudazione, i quali si accumulano disordinatamente di qua e di là, seguendo i corsi labirintici dei rivoli, rivoletti e rigagnoli, che li portano al basso. Infine la totalità dei depositi ha uno spessore eguale, sia alla sommità che alla base delle pendici crateriche interne (v. fig. 1 della tav. III), il che è stato solamente possibile a causa della deposizione per caduta diretta di questi materiali eruttivi.

Concludendo: i materiali eruttivi frammentarî della grande cerchia esterna di Astroni si sono accumulati intorno alla loro bocca d'eruzione a formare un tronco di cono depresso, vuoto all'interno, un vero anello craterico, costituito da una successione uniforme e continua di strati (fig. 3), che da un lato inclinano centrifugalmente secondo le falde esterne del cono, e dall'altra pendono in parte centripetalmente verso l'interno del cratere. Siccome poi tali strati si sono prevalentemente accumulati verso il lato occidentale del vulcano, sopratutto a causa dei sottogiacenti materiali dell'anteriore cinta di Agnano, si può anche con un certo fondamento di ragione supporre, che forse verso quel lato appunto fosse leggermente inclinato il camino eruttivo, o che verso quella direzione spirassero i venti dominanti durante le forti e rapide eruzioni, che diedero origine a questo cratere.

3.

Tettonica dei coni eruttivi interni

L'azione eruttiva di Astroni non si esaurì con la formazione del grande anfiteatro craterico, ma, al pari di quello che avviene in ogni vulcano a recinto, ebbe una fase successiva, più limitata di estensione e meno forte nella sua esplicazione, la quale chiuse definitivamente il ciclo d'attività del vulcano.

Tale fase secondaria è rappresentata dai rilievi che s'innalzano dal fondo del cratere e che nelle pagine precedenti abbiamo visto essere costituiti da materiali frammentari e continui di varia natura, e più particolarmente dalla corrente di lava scoriacea dei Pagliaroni, dalla cupoletta di lava massiccia della Rotondella e dal cono tufaceo dell'Imperatrice (v. fig. 4 qui di fronte).

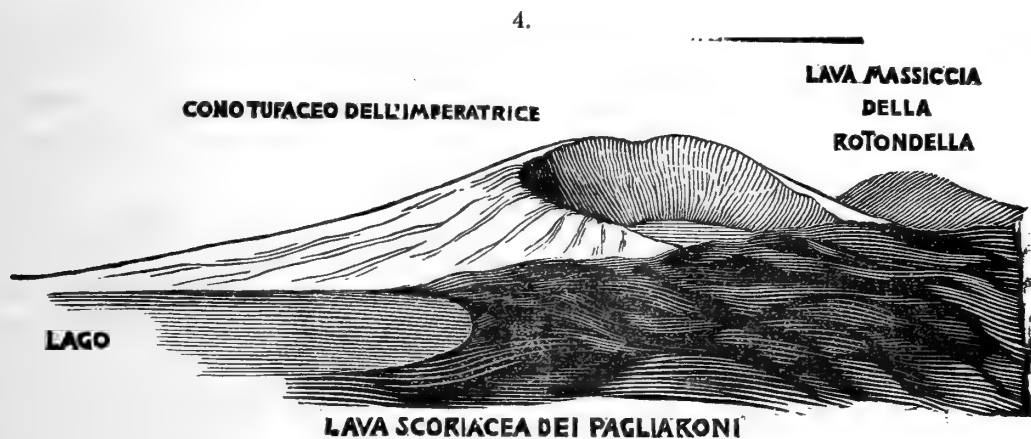
Trovare l'ordine di successione di queste tre masse principali non è agevole, date le loro confuse relazioni, che sono anche più offuscate dalla tropicale vegetazione del fondo del cratere. Pare a ogni modo, che la Rotondella rappresenti l'ultimo stadio di consolidazione di quegli sbocchi di lava, che da principio si riversarono con più fluidità e scorrevolezza, sotto forma di corrente scoriacea, nei Pagliaroni: quindi questi e quella costituirebbero un'estrinsecazione prevalentemente lavica, rispetto all'estrinsecazione tufacea e frammentaria dell'Imperatrice.

Siccome poi all'estremità meridionale dell'Imperatrice si vedono le scorie dei Pagliaroni sottostare quasi agli strati di tufo del cono maggiore, se ne potrebbe forse dedurre, che l'Imperatrice rappresenti l'atto finale dell'attività di Astroni, che avrebbe seguito l'emissione della lava. Ma se anche ciò è realmente avvenuto, il che è poco probabile, tale successione deve essersi verificata a brevissimo intervallo, in guisa che il cono tufaceo dell'Imperatrice, la lava scoriacea dei Pagliaroni e la lava massiccia della Rotondella rappresenterebbero in realtà diverse esplicazioni quasi contemporanee di una stessa azione eruttiva, che da un lato avrebbe rigettato ceneri, lapilli, pomici e scorie, a costituire un cono tufaceo, e dall'altro avrebbe dato luogo a efflussi di lava: analogamente a quanto vediamo essere avvenuto in molti *puys* dell'Alvernia e in altri vulcani di simile tipo.

Tale spiegazione ci svela anche quale può essere stata l'origine più probabile delle varie concavità intercorrenti tra i rilievi interni degli Astroni. Essendo infatti l'Imperatrice un cono tufaceo (i suoi strati inclinano quaquaversalmente all'intorno come in tutti i consimili coni), infranto da un lato per dar passaggio a uno sgorgo di lava, corrispondente quindi a quelli che Scrope per l'Alvernia chiama *breached cones*, è chiaro che la sua apertura craterica deve ricercarsi dalla parte da cui è effluita la lava: e infatti a oriente dell'Imperatrice, tra questa e le prominenze dei Pagliaroni, noi troviamo appunto la profonda concavità di Cofaniello (v. fig. 4), che fin da lontano, guardandola da qualche punto del lato orientale della cerchia esterna, rivela la sua origine craterica; come può anche osservarsi nella nostra fotografia, riprodotta nella fig. 1 della tav. IV.

A sud di Cofaniello, tra questo e l'attuale lago, vi è un'altra piccola concavità, anch'essa prima occupata da un laghetto, che a prima vista sembra un mi-

nuscolo cratere d'esplosione, ma che può essere stato anche prodotto da uno sbarramento operato dalla corrente di lava dei Pagliaroni intorno a un dei fianchi del cono eruttivo tufaceo. Similmente può essersi prodotta l'insenatura, aperta a occidente, che si trova tra le falde settentrionali dell'Imperatrice e la cupola lavica della Rotondella. Nella stessa guisa s'è formata anche la conca, in cui è raccolto l'attuale lago, come può bene scorgersi dalla nostra carta geologica e dalla qui annessa fig. 4. Infatti le falde meridionali del cono tufaceo dell'Imperatrice a nord, i lembi estremi della lava scoriacea dei Pagliaroni a est e i coni di deje-

4.

Veduta schematica dei coni eruttivi interni di Astroni.

zione, scendenti dalla grande cerchia nell'atrio, a ovest e sud, hanno finito col concludere una conca, larga un 150 e profonda al più un paio di metri, in cui attualmente si accolgono le acque scaturienti dalla parte interna dell'anfiteatro e dal grembo dei coni centrali. Così, dove prima ferveva più intensa la possa dei fuochi sotterranei, ora sullo specchio immobile dell'acqua si espandono al sole le foglie delle placide ninfee.

4.

Tettonica di tutto il vulcano

Riassumendo ora quello che innanzi si è detto sulla tettonica delle singole parti componenti questo vulcano, si può concludere, che Astroni è un tipico vulcano a recinto, quasi per intero costituito da materiale frammentario di origine esplosiva.

Il recinto esterno, ad eccezione d'una massa trachitica anteriore, rimasta incastonata nella parete orientale, è tuttoquanto uniformemente costituito da letti di tufi, pozzolane, lapilli e pomici, contenenti inglobati scorie e blocchi rigettati. Questi materiali sono distintamente divisi in strati, che all'esterno inclinano tutti all'intorno, seguendo le falde del cono, e all'interno rivestono prevalentemente la parete occidentale, pendendo verso l'interno del cratere. Le falde esterne del cono nelle loro periferie sono sfrangiate in varia guisa, per l'adattamento subìto nel modellarsi contro masse anteriori o nell'essere ricoperte da coni eruttivi posteriori.

Invece la conca dell' interno cratere è nettamente disegnata ed è solo per poco alterata dalla inglobata anteriore massa della Caprara nel lato orientale.

Questo recinto esterno abbraccia un grande e spazioso atrio ad anello, a fondo pianeggiante, che rappresenta il piano del fondo craterico primitivo e che separa l' anfiteatro esterno dalle prominenze centrali.

Infatti nel piano dell'atrio sorgono le prominenze eruttive interne, le quali geneticamente si possono ridurre a un solo vulcanetto centrale, rappresentato da un cono di tufi e di altri materiali frammentarî, detto l'Imperatrice, dal cui cratere, infranto ad oriente, è sgorgato un efflusso di lava, che dapprima si è espanso sul piano dell' atrio, a formare la corrente scoriacea dei Pagliaroni, e da ultimo s'è raggrumato nella piccola verruca massiccia della Rotondella.

Questa architettura semplice e armonica fa supporre, che del pari semplice sia stata l'azione a cui il vulcano deve la sua origine, e che quindi le esplosioni di Astroni, per quanto spettacolose e violenti, siano state altrettanto rapide e continue, in modo da non turbare in modo troppo palese l' uniforme ed armonica costruzione del grandioso edificio.

III.

LE RELAZIONI CON I VULCANI LIMITROFI

Il cratere di Astroni si apre come una vasta voragine proprio nel centro dei Campi Flegrei, a formare quasi come il gigantesco ombelico di tutta questa ignita regione. Facendo di esso centro si può descrivere infatti con un raggio di circa 10 chilometri un cerchio, che include rigorosamente tutti i colli vulcanici pertinenti ai Campi Flegrei propriamente detti, a cominciare da Nisida, Posillipo e la Gajola, passando per Poggioreale, per le ultime falde dei Camaldoli e pel Piano di Quarto, fino alla rupe di Cuma sul mare, a Miseno e alle Secche, di probabile origine vulcanica, cosidette di Mezzogiorno e di Penta Palumma: in tutto abbracciando un' area di poco più di 300 km. q., l'area dei veri Campi Flegrei. Il Monte di Procida fa geologicamente quasi più parte del sistema Procida-Vivara, il quale a sua volta rappresenta come un ponte di passaggio tra il sistema vulcanico d' Ischia e quello Flegreo.

Trovandosi dunque Astroni nel centro dei Campi Flegrei, è naturale, che numerose e complesse relazioni intercorrano tra esso e gli altri crateri sparsi in quest' area, dei quali alcuni hanno origine anteriore e altri posteriore alla sua formazione. È quindi necessario esaminarne bene i rapporti con i vulcani adiacenti, prima con i più antichi e poi con i più moderni: ricordando in proposito quel che da uno di noi nei suoi *Studî di geologia nell'Appennino meridionale* (Atti di quest' Accademia, 1896) e da entrambi poi nello studio sul *Cratere di Vivara* (id. id., 1900) si è scritto sul succedersi dei varî periodi eruttivi nei Campi Flegrei.— Le prime eruzioni di questa regione sono rappresentate dai tufi grigi sabbiosi, dai tufi pipernoidi, dalle colate laviche di piperno e dalle potenti brecce (Brecce-Museum), che si trovano alla base dello sperone dei Camaldoli, a Cuma e alla base del Monte di Procida e fors' anche al Rione Amedeo. Questo periodo

eruttivo è probabilmente contemporaneo alla maggiore manifestazione vulcanica di Procida e Vivara e posteriore a quella dell' Epomeo. Succedono le grandi eruzioni di ceneri, lapilli e pomici, che han dato origine al caratteristico tufo giallo, che ora forma Nisida, Posillipo, il Vomero, la parte superiore dei Camaldoli, il Gauro, parte dei colli di Cuma e del Monte di Procida, Miseno, Porto di Miseno e molti scogli semimascherati, che affiorano lungo la spiaggia da Baja a Bagnoli e intorno al piano di Quarto. A queste eruzioni o soffiazioni esplosive seguì lunga pausa di riposo, rivelataci dai numerosi canali e valloni di erosione, in cui si sono venuti a deporre i prodotti eruttivi posteriori: i tufi grigi incoerenti, le pozzolane e i lapilli, adagiantisi in strati, or discordanti or concordanti, su quelli del tufo giallo e chiamati nel loro complesso dai cavapietre *mappamonte*, appunto perchè costantemente coprono come un mantello il *monte*, com'essi chiamano il tufo giallo. La maniera di stratificazione di queste pozzolane e tufi grigi incoerenti, il fatto che essi si trovano egualmente e in egual modo disposti così nelle valli come sulle cime delle più alte colline di tufo giallo (Camaldoli, Vomero, Gauro, etc.), e la circostanza caratteristica, che in essi si trovano anche intercalati i lapilli violacei eruttati da Astroni (v. pag. 22 e 23) e lanciati fin sulla sommità dei Camaldoli, dimostra a sufficienza, che questi depositi, generalmente e uniformemente diffusi sul tufo giallo, non sono un prodotto di lavamento di questo, ma rappresentano veri prodotti eruttivi di altri posteriori vulcani. Nè con questi depositi son da confondersi le variazioni bianchicce o grige, che a volte per disfacimento presenta il tufo giallo, il quale ne appare qua e là irregolarmente macchiato.

I depositi grigi incoerenti, formatisi direttamente per eruzione e che sono sempre sovrapposti al tufo giallo, hanno natura del tutto simile a quelli che si riscontrano nei vulcani centrali di Agnano, Solfatara, Astroni, Cigliano, Crateri di Campana, Monte Nuovo, etc. senza che sia possibile (eccetto nel su mentovato caso dei lapilli manganesiferi violacei) riferirli all'uno piuttosto che all'altro di questi crateri, data la uniformità dei loro materiali. Sono però proprio questi crateri centrali, che formano stretta corona intorno ad Astroni e che stabiliscono e intrecciano con esso quei rapporti, che è nostro scopo studiare. Dopo aver quindi accennato rapidamente alle relazioni del nostro vulcano con i vulcani di tufo giallo, vedremo più particolarmente quali relazioni, nel tempo e nello spazio, esistono tra esso e i crateri limitrofi di Agnano, della Solfatara, di Cigliano e di Campana e Fossa Lupara.

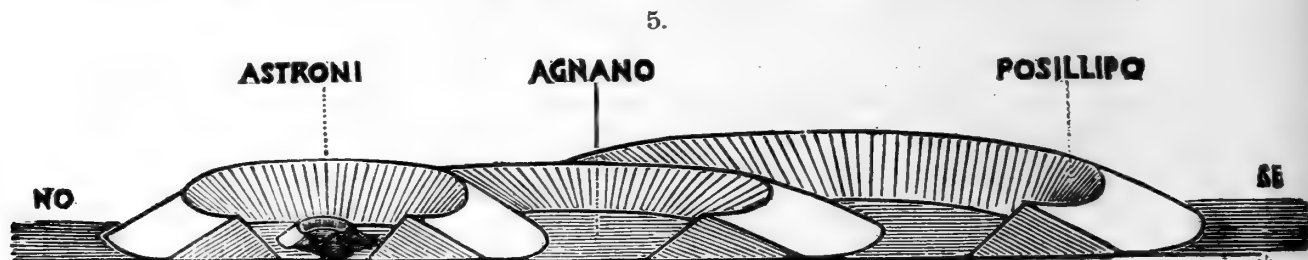
1.

Relazioni coi crateri di tufo giallo e col cratere di Agnano

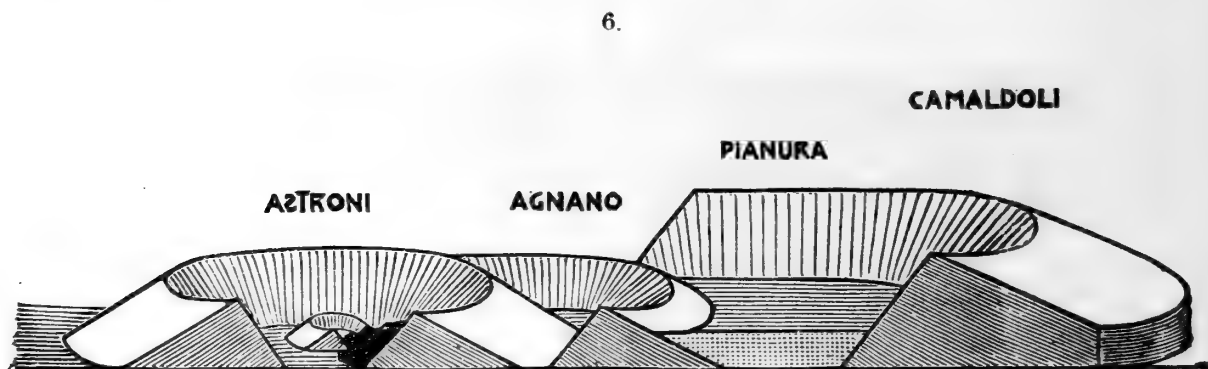
Gli avanzi dei vulcani formati dal tufo giallo si trovano ora sparsi quasi tutti alla periferia dell'area circolare occupata dai Campi Flegrei; giacchè quelli della parte centrale furono in parte sventrati e polverizzati e in parte mascherati dalle posteriori eruzioni; così che non esistono ora relazioni dirette e contatti immediati tra essi crateri di tufo giallo e il cratere di Astroni, che occupa proprio il centro della regione vulcanica. Noi quindi ci contenteremo solo di accennare quale posizione occupano rispetto al nostro cratere le più prossime cerchie

di Posillipo, dei Camaldoli e del Gauro, che ne sono separate mediante la circonvallazione dei crateri di Campana, Cigliano, Solfatara e Agnano.

La cinta craterica di Agnano ab antiquo è stata considerata come la grande cerchia anteriore, che abbraccia e include in sè il posteriore cratere di Astroni: essa a sua volta rappresenta il maggiore degli interni crateri, che è rimasto incluso nelle grandi cerchie periferiche di tufo giallo; come si può scorgere dalle qui annesse figure 5 e 6. Da qualunque punto infatti dell' esterna periferia si

5.

Schema delle relazioni dei crateri di Posillipo, Agnano e Astroni.

guardi sui Campi Flegrei, si vede sempre la medesima successione delle cerchie maggiori e più antiche, che abbracciano le minori più recenti, come succede in ogni vulcano a recinto. Dalla cresta di Posillipo, sia da quella pertinente al vulcano di S. Strato (che va da Capo Coroglio a Villanova), che dall'altra spettante al vulcano di Posillipo propriamente detto (compreso tra Villanova e la sinclinale Rione Amedeo-Soccavo), si vedono le pareti di tufo giallo scendere ripidamente al piano di Bagnoli-Fuorigrotta, come nell' interno di ogni cratere, e

6.

Schema della circonvallazione dei crateri di Camaldoli, Agnano e Astroni.

dall'estremo margine di questo piano sollevarsi poi la esterna cinta dei tufi grigi di Agnano. Giunti sulla cresta di questa si ripete il medesimo spettacolo: le pareti interne cadono ripidamente sul piano dell'alveo dell'antico cratere-lago, e dall'opposito orlo di questo si vede innalzarsi il cono tufaceo di Astroni. Progredendo a questo si vedono di nuovo le interne pareti precipitare sull'atrio, dal quale si sollevano infine gli interni coni eruttivi, gli ultimi di questa successiva circonvallazione: il tutto così come è rappresentato dalla fig. 5.

Similmente, se dall'alto del monastero Camaldolese si guarda in giù, verso Astroni, si vedono anzitutto sotto i piedi aprirsi le profonde voragini dei due cra-

1.

CONO CRATERICO CENTRALE

(DALL'ORLO ORIENTALE DEL GRANDE ANFITEATRO ESTERNO)

2

DE LORENZO E RIVA PHOT.

STRATO DI LAPILLI VIOLACEI MANGANESIFERI TRA' BANCHI DI POMICI E DI TUFI

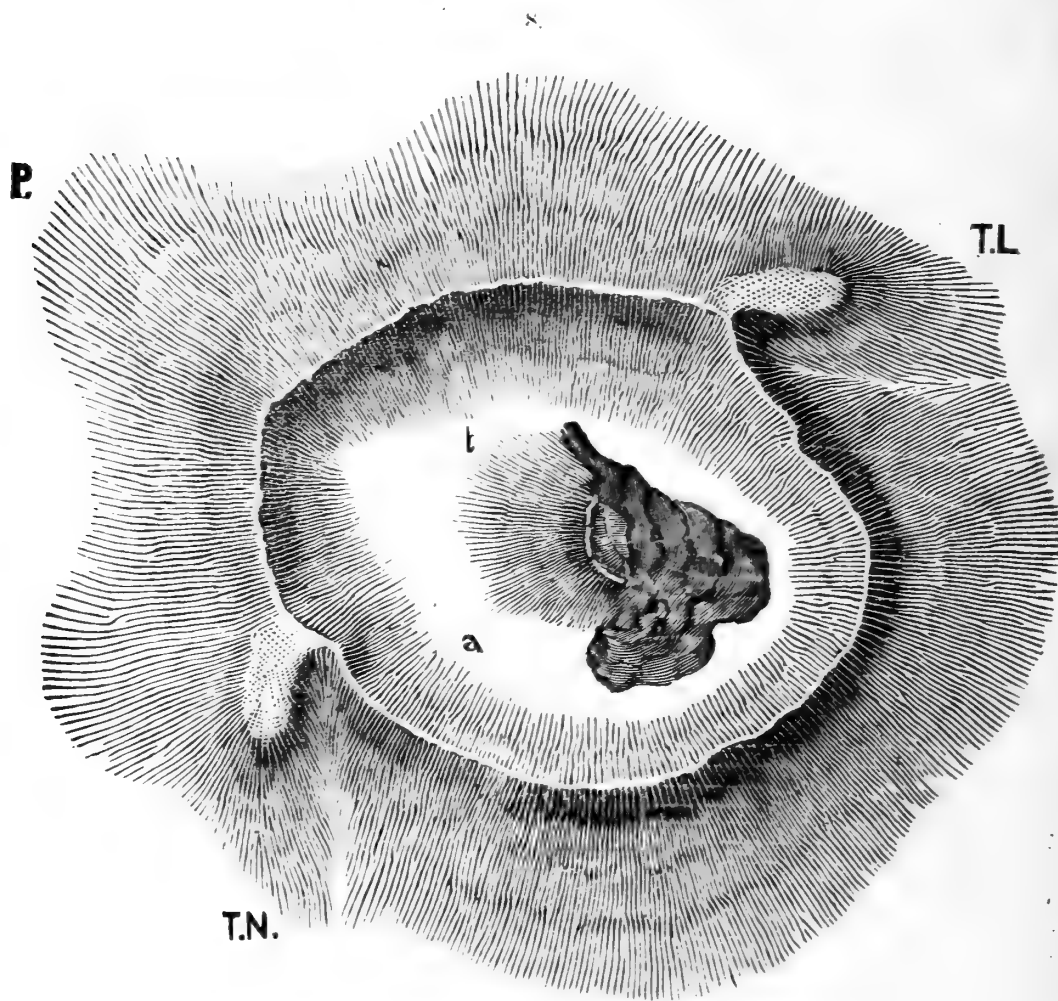
(CUPA NELLE PENDICI ORIENTALI ESTERNE DEL GRAN CONO)

teri di Pianura e di Soccavo, e dal fondo di questi, mediante piani formati da depositi lacustri sub-vulcanici, sollevarsi di poco l'anello basso della cinta d'Agnano, dal quale a sua volta estubera il cono di Astroni (v. fig. 6), nel cui profondo cratere finalmente si appiatta l'ultimo cono tufaceo dell'Imperatrice, col suo efflusso di lava. Viceversa, se dall'alta cresta di Astroni, a Torre Nocera, si guarda verso oriente, si vede prima, così come è qui sotto indicato nella fig. 7, ricavata da fotografia, l'ampia e profonda voragine del cratere di Astroni, la cui cerchia ad anfiteatro è cinta dalla cerchia di Agnano, mentre questa a sua volta è chiusa dalla circonvallazione dei crateri di Camaldoli e Posillipo: il tutto essendo coronato nel fondo dalla cresta fumante del bipartito Vesuvio.

7.

Veduta dall'alto di Torre Nocera, mostrante la inclusione del posteriore cratere di Astroni in quelli anteriori e più grandi di Agnano e di Camaldoli-Posillipo, col Vesuvio nel fondo.

Agnano rappresenta dunque la grande cerchia craterica madre, nel cui grembo si è sviluppato il cono craterico figlio di Astroni, e come tale fin da tempo era stata riconosciuta. Chi però ne ha inteso il significato e ne ha scorto le vestigia è stato R. T. Günther che nel citato eccellente lavoro geografico *The Phlegraean Fields* (The Geographical Journal, London, October and November 1897) ha descritto bene per il primo questi rapporti dei due vulcani e ha dato il nome di Arciagnano a quella parte della cinta craterica anteriore, che non altri prima di lui aveva indovinato. Infatti la cerchia craterica di Agnano non si arresta ad ovest nel Monte Spina, ma si prosegue verso la Solfatara e al di là di questa, dando indizio di sè nella lunga ed alta cresta, che congiunge il ciglio del Forum Vulcani alla Torre Nocera dell'orlo craterico di Astroni. Questa cresta però realmente non appartiene ad Agnano, perchè è quasi tutta formata dai materiali eruttivi di Astroni, che si sono posati e modellati sull'orlo craterico sottostante di Agnano. Parimenti l'altra cresta (v. fig. 8 nella pagina seguente), che congiunge l'orlo settentrionale di Astroni col fondo dell antico lago di Pianura, scendendo da Torre Lupara verso nord-est, rappresenta il modellamento del prosieguo della medesima sottogiacente cerchia di Agnano; nel cui giro verrebbe quindi a capitare anche la massa trachitica della Caprara, preesistente, come s'è detto, alle eruzioni di Astroni. Ma di questo rilievo mascherato della parte occidentale di Agnano vedremo qui appresso, parlando delle relazioni tra Astroni e la Solfatara.

Per ora osserviamo, che i materiali eruttivi di Astroni hanno completamente coperto quella parte della cinta occidentale di Agnano, che non era stata lanciata in aria delle esplosioni di Astroni stesso, di guisa che le due creste, scendenti rispettivamente da Torre Nocera e da Torre Lupara, danno solamente indizio della forma sottogiacente, ma in realtà non la rivelano. Basta infatti scendere lungo i profondi canali d'erosione, che solcano quelle pendici, per vedere come le falde

1 : 25.000

Pianta del cratere di Astroni, mostrante le due creste di Torre Nocera (TN) e Torre Lupara (TL), prodotte dall'intersezione con l'anteriore cratere di Agnano.

sono per intero costituite dalle pomici e dai tufi leggieri bianchicci di Astroni, senza lasciar scorgere alcun saggio del materiale di Agnano, quale si rivela nel suo aspetto caratteristico nella bella sezione presso l'emissario. A nord est, sotto Torre Lupara, gli strati tufacei di Astroni scendono prima col pendio delle falde esterne del cono, poi, giunti nella valle, che topograficamente marca il limite tra l'antica cinta d'Agnano e le pendici di Astroni, s'inflettono e risalgono lungo l'opposto pendio, appoggiandosi al preesistente materiale di Agnano, che doveva

già essere modellato ampiamente dalla denudazione (e forse anche da uno spostamente dall'asse eruttivo, come suppone Günther), quando scoppiarono le esplosioni di Astroni, che lo mascherarono in parte. Verso il fondo del cratere di Agnano invece, non essendovi alcun ostacolo, le falde esterne del cono di Astroni si poterono espandere liberamente, adeguandosi al suolo circostante con una curva circolare continua (vedi carta geologica), che rappresenta la parte più regolare delle falde periferiche del nostro cratere. Non così a sud-ovest, dove, l'intersezione di Astroni con la cinta di Agnano è resa di più difficile interpretazione dall'intervento del cratere della Solfatara, che ora qui esamineremo.

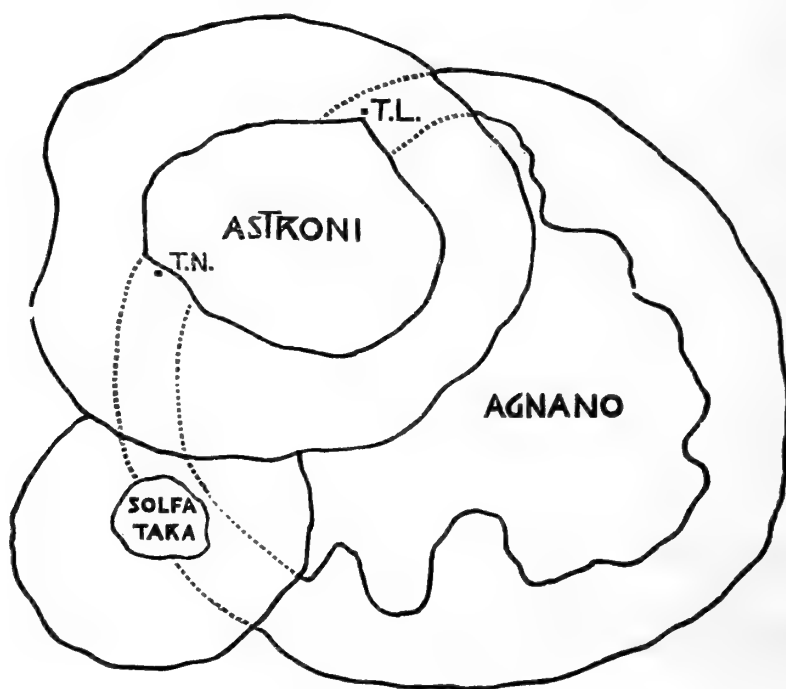
2.

Relazioni con la Solfatara

Dopo Agnano il cratere più notevole di quelli che circondano Astroni è rappresentato dalla Solfatara; ma le relazioni del nostro vulcano con questo non sono così semplici nè così facili a decifrarsi come sono state quelle con Agnano. Infatti, essendo la Solfatara un vulcano piuttosto piccolo, che è stato fortemente attivo in tempi storici, fino al 1300 (v. pag. 3), e che si trova alla periferia d'un grande vulcano estinto, come Astroni, a priori si direbbe, che questo è il vulcano più antico, a cui posteriormente si è addossato quello della Solfatara. Viceversa, quando si fa l'esame sul terreno, sia lungo i valloni che scendono ad Agnano (tra i Leucògei ed Astroni) che in quelli che si protendono verso Pozzuoli, si trova che costantemente i materiali caratteristici della Solfatara, cioè i tufi alterati dall'azione delle fumarole e variegati in bei colori gialli, rossi e paonazzi, sono sottoposti agli strati di pomici e di tufi incoerenti di Astroni. Dal che si dovrebbe dedurre senz'altro, che il cratere della Solfatara ha un'origine anteriore a quello di Astroni. Ed a questa conclusione mena anche l'esame delle pendici esterne del cono della Solfatara, le quali sono in uno stato di denudazione e di degradazione atmosferica maggiore di quelle del limitrofo Astroni e presentano, specialmente nel lato orientale, dei canali di erosione molto più numerosi e accentuati. Nè si può dire, che questa maggiore degradazione sia dovuta allo stato d'alterazione dei materiali della Solfatara, chè anzi questi, cotti e cementati come sono dalle influenze delle fumarole, sono, rispetto agli agenti atmosferici, molto più tenaci e resistenti dei friabilissimi banchi di pomici e degli incoerenti strati di tufo e di pozzolane degli Astroni. Solo si potrebbe osservare, che la mancanza di vegetazione, dovuta alle fumarole della Solfatara, ha permesso sui fianchi di questa all'acqua e all'aria quell'opera di demolizione, che sulle pendici di Astroni fu impedita dalla folta vegetazione boschiva; ma contro questa secondaria obiezione sta sempre il fatto principale, che i materiali caratteristici della Solfatara stanno al disotto di quelli di Astroni: il che, come s'è detto dianzi, mena a concludere, che la Solfatara abbia un'origine anteriore a quella di Astroni.

Però, prima di accettare questa conclusione, bisogna notare, che, come s'è detto nel precedente paragrafo, tanto la Solfatara quanto gli Astroni si sono formati al margine occidentale del cratere di Agnano, squarciandone e ingombran-

done con i loro prodotti eruttivi la cinta periferica, di cui però il mascherato modellamento ci è ancora indicato: dalla cresta che congiunge Torre Nocera alla Solfatara, e dall'altro dorso, che scende da Torre Lupara all'attuale cinta di Agnano; quali sono indicate dalle due linee punteggiate della fig. 9. Stando così le cose, noi possiamo anche supporre, che i materiali variegati sottostanti a quelli di Astroni, non appartengano in realtà alla Solfatara propriamente detta, ma facciano parte dell'anteriore e sepellita cinta di Agnano (Arciagnano di Günther) e siano stati ridotti in quello stato dalla prossimità dei fuochi della Solfatara, la cui origine quindi potrebbe essere anche posteriore a quella di Astroni e la cui area eruttiva sarebbe perciò molto più limitata di quella, che i materiali alte-

9.

1 : 50.000

Schema dei rapporti Agnano-Astroni-Solfatara.

rati dalle sue fumarole facciano supporre. In tal modo, supponendo cioè che questi materiali alterati sottoposti ai tufi di Astroni facciano parte dell' antica cerchia craterica di Agnano, si spiega anche la loro direzione ed inclinazione, la quale, nel fondo dei valloni a nord dei Leucogei, armonizza più con tale ipotesi che con quella che essi appartengano realmente alla Solfatara.

Non bisogna però neanche dimenticare, che la Solfatara non è vulcano tufaceo come Astroni, ma è composita di materiale frammentario e di materiale lavico; quindi essa, malgrado la sua piccolezza ed apparente perifericità, potrebbe avere avuto in sè una maggiore energia di durabilità, che quella del limitrofo gigante, e potrebbe quindi anche essersi formata prima di questo. Inoltre bisogna notare, che l' area del materiale alterato della Solfatara più che andare a

poco a poco sfumando sembra nettamente delineata; il che farebbe supporre, che trattisi di una proprietà specifica originaria, piuttosto che di un'alterazione esercitatasi su materiali preesistenti, e quindi menerebbe anche a credere, che la Solfatara sia realmente più antica di quel che pare.

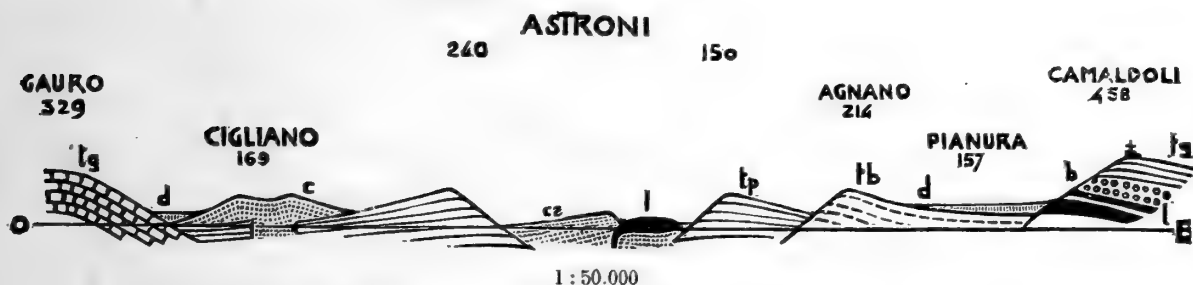
Tutto ciò noi cercheremo di assodare, se potremo, quando, nei nostri successivi studî degli altri vulcani centrali e periferici dei Campi Flegrei, arriveremo a fare lo studio speciale di Agnano e della Solfatara: per ora, occupandoci solamente di Astroni, ci contentiamo di indicare questa duplice interpretazione e provvisoriamente nella carta e nelle figure segniamo le cose così come realmente si vedono: cioè i materiali alterati *dalla* Solfatara (siano o non da essa eruttati) sottoposti a quelli di Astroni.

3.

Relazioni con i crateri di Cigliano e di Campana

Sulle declivi falde occidentali di Astroni si eleva il grazioso piccolo cono eruttivo di Cigliano, il quale per la sua semplice e regolare forma conica, per il pendio piuttosto sensibile delle sue falde e per l'elevazione della cresta, che supera di circa 140 metri il piano della Starza circostante, è sensibile fin da lungi e forma una delle caratteristiche del paesaggio flegreo, insieme al Monte Nuovo

10.

1 : 50.000

l. Colate laviche (di piperno sotto i Camaldoli e di trachiandesite scoriacea negli Astroni).— *b.* Breccia-Museum di Soccavo. — *tg.* Tufo giallo del Gauro e dei Camaldoli. — *tb.* Tufi bigi del cratere di Agnano.—*tp.* Tufi e pomici della grande cerchia di Astroni.—*cs.* Ceneri e scorie del cono centrale dell'Imperatrice.—*c.* Ceneri del vulcanetto di Cigliano.—*d.* Depositi subvulcanici.

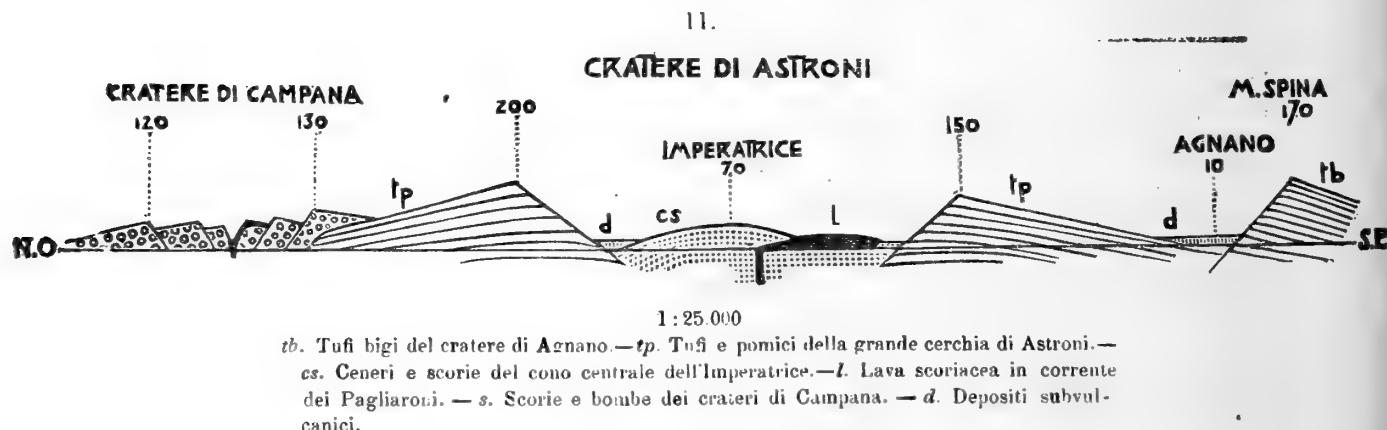
col quale ha molta simiglianza per grandezza e forma esteriore, solo distinguendolo da esso la mancanza di un profondo cratere e la costituzione prevalentemente cinerea (v. fig. 10). Infatti il cratere di Cigliano, quantunque evidentissimo, non è rappresentato che dalla sola cerchia settentrionale, alta una cinquantina di metri sul piano interno e 217 sul mare, mentre la cinta meridionale è completamente svanita, in modo da lasciare del tutto nudo il fondo del cratere da quella parte. Ciò può esser dipeso dalla degradazione atmosferica, che, operando con i piovosi venti marini, salienti immediatamente da sud, ha facilmente demolito quel friabile baluardo, costituito. come tutto il cono di Cigliano, da ceneri, pozzolane e banchi

di piccole incoerentissime pomici, facilmente lavabili e asportabili dalle violenti raffiche del libeccio. Questi materiali si vedono chiaramente risalire anche l'opposto pendio e appoggiarsi direttamente sui tufi e gli altri aggregati di Astroni, in modo da non lasciare alcun dubbio sulla posteriorità di formazione di Cigliano; il quale d'altronde con la sua costituzione così incoerente ha una certa rassomiglianza col grande vulcano, sulle cui spalle si è formato.

A nord-ovest poi di Astroni si trova il celebre triplice vallo concentrico dei crateri di Campana, altrimenti chiamati di Fossa Schiarana, o Maranisi, o Fossa Lupara o della Senga, secondo che si assume a nome l uno o l'altro dei modellamenti o delle caratteristiche del gruppo. Questo graziosissimo vulcano a recinto, illustrato da Deecke, ha le sue varie cerchie molto depresse, in modo che non si stacca decisamente dal profilo di Astroni e solo diviene chiaramente visibile guardandolo dall'alto, di dove si vedono i suoi successivi atrii concentrici, e l'ultimo vacuo cratere centrale (v. fig. 11), fatto a guisa d' imbuto regolarissimo, strettissimo e profondo, sul cui orlo occidentale s'apre il pericoloso orifizio della

11.

1 : 25.000

tb. Tufi bigi del cratere di Agnano.—*tp*. Tufi e pomici della grande cerchia di Astroni.—*cs*. Ceneri e scorie del cono centrale dell'Imperatrice.—*l*. Lava scoriacea in corrente dei Pagliaroni. — *s*. Scorie e bombe dei crateri di Campana. — *d*. Depositi subvulcanici.

tenebrosa Senga. Questi crateri di Campana hanno dato prevalentemente scorie rossastre e nere, e bombe spugnose tetraedriche, simili per forma a quelle a crosta di pane dell'isola di Vulcano, nonchè (nel cratere più interno) una lava gialliccia simile per aspetto e per costituzione a quella già descritta (v. pag. 44 e seg.) dei Pagliaroni. Tutti questi materiali dei crateri di Campana si vedono anch'essi chiaramente sovrapposti a quelli di Astroni, in modo che ne risulta evidente la posteriorità.

Il Günther nel su citato lavoro nota, che una cresta congiunge il cono di Cigliano a quello di Astroni, e un'altra che egli chiama *Pacifico Ridge* (P. della fig. 8 a pag. 74), riunisce parimenti Astroni con la parte sud ovest dei crateri di Campana (v. carta geologica della tav. VII. La prima che d'altronde è poco pronunziata, evidentemente risulta dall'accumularsi e sovrapporsi dei materiali dei due crateri; ma la seconda è così decisamente staccata dai circostanti rilievi, che deve necessariamente tradire un qualche sottostante avanzo di cratere anteriore, facente forse parte della cerchia craterica situata a est-nord-est dei crateri di Campana, i quali sarebbero quindi sorti nel centro di quest altro antico vulcano a recinto.

4.

Sguardo generale sui contatti di Astroni

Riassumendo quel che nei precedenti paragrafi s'è scritto sulle relazioni di Astroni con i vulcani limitrofi, si può concludere col dire, che il modellamento del nostro cono craterico, dovuto nelle sue linee fondamentali alla forza eruttiva originaria, è stato poi, specialmente nelle sue falde esteriori, variamente modificato dai contatti con i vulcani anteriori e posteriori, nel cui mezzo esso si trova.

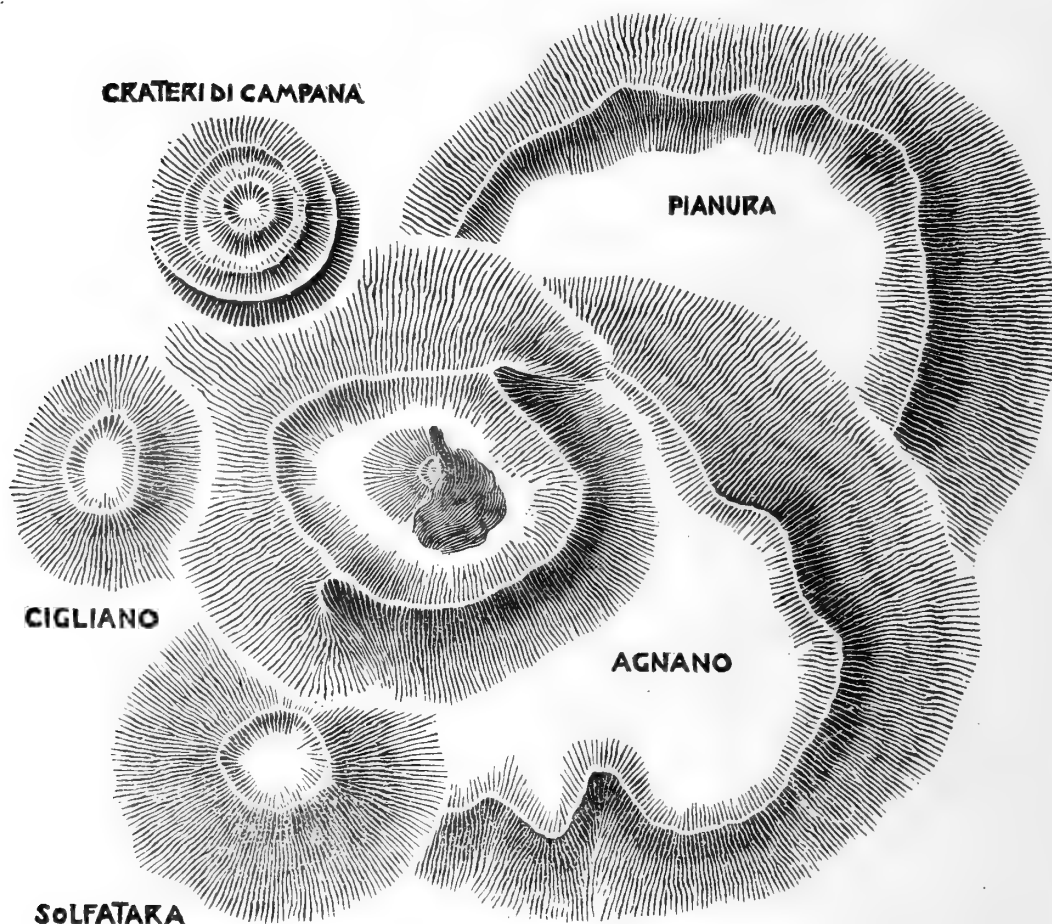
Là dove pochi ostacoli si contrapponevano alla libera espansione e deposizione del materiale eruttivo, come nell'angolo sud-est, nell'antico cratere di Agnano, quivi le falde del cono si sono regolarmente depositate, conforme alla legge di caduta dei varî frammenti eruttivi, dando origine a una superficie conica normale; dove invece esistevano modellamenti anteriori o dove sono intervenute sovrapposizioni posteriori, come in tutto il resto del perimetro, là le falde hanno subìto delle ondulazioni e delle variazioni, che hanno completamente alterato l'andamento primitivo delle esterne pendici: come può rilevarsi dallo schema espresso nella figura 12 della pagina seguente.

Anzitutto la parte occidentale del perimetro dell'antica cerchia di Agnano, passando al disotto dei materiali di Astroni, li fa apparire sollevati in due creste, che scendono da Torre Nocera e da Torre Lupara rispettivamente verso sud e verso nord-est. Una cresta analoga, la cresta Pacifico (vedi le carta geologica della tavola VI.) che scende dall'orlo del cratere di Astroni verso nord-ovest, fino ai crateri di Campana, è forse similmente dovuta a un avanzo mascherato dell'antica cerchia craterica, compresa tra Astroni e Quarto, nel cui mezzo poi si sono sviluppati i crateri di Campana.

L'azione fumarolica della Solfatara, alterando progressivamente per superficie coniche successive i materiali circostanti al suo camino eruttivo, mostra questi materiali alterati chiaramente sottoposti a quelli di Astroni; senza peraltro poter far decidere, per ora almeno, se essi materiali, oltre che alterati, siano stati anche eruttati dalla Solfatara stessa, in modo che questa verrebbe ad avere un'origine anteriore a quella di Astroni, oppure appartengano alla sottostante cerchia di Agnano, alterata, nell'ambito di quell'area, dai fuochi e dai fumi della posteriore Solfatara.

Al di là della Solfatara il cono semplice di Cigliano e quello multiplo dei crateri di Campana intersecano la periferia di Astroni, sovrapponendo i loro materiali a quelli delle falde del vulcano centrale. Per tali sovrapposizioni e per le intersezioni con la cinta di Agnano e con la protuberanza della Solfatara restano determinate nelle falde coniche esterne degli Astroni cinque principali depressioni (v. fig. 12): una prima compresa tra la cresta che scende da Torre Lupara e la falda libera di Agnano; una seconda tra la medesima cresta e i crateri di Campana; una terza tra la cresta del Pacifico e il cono di Cigliano; una quarta tra Cigliano e la Solfatara; una quinta ad oriente della cresta che scende da Torre Nocera.

Queste depressioni hanno segnato i varî bacini di displuvio alle acque che cadono sul cono e hanno dato quindi le linee prime per la denudazione ed erosione ed il modellamento atmosferico di Astroni. Nella parte settentrionale, meno esposta a diretti venti piovosi e con minore altezza di caduta delle acque correnti, appena appena cominciano ad abbozzarsi dei leggieri valloncelli radiali. Ad essi di poco superiori sono quelli che si trovano nella depressione Cigliano-Pacifico,

12.

1 : 50.000
Schema dei contatti di Astroni con i vulcani limitrofi.

anch'essa poco alterata, perchè protetta dal baluardo di Cigliano. Ma nelle altre tre depressioni, esposte direttamente alle raffiche piovose del ponente, del libeccio e dell'austro, le acque piovane, aprendosi rapidamente le vie nel materiale incoerente e molle e provocando di continuo frane di fette verticali di terreno, hanno già scavato parecchi profondi valloni, con le caratteristiche pareti verticali, a fondo strettissimo: le cosidette cupe.

Il lavoro incessante dell'acqua e dell'aria, nei loro componenti e nelle loro diverse manifestazioni, sia inorganiche che organiche, ha dunque già attaccato il superbo edificio costruito dalle forze eruttive e procede alacremente versa la sua

1.

INNANZI IL LAGO COPERTO DI NINFEE, IN MEZZO IL CONO ERUTTIVO INTERNO DELL'IMPERATRICE, IN FONDO LA GRANDE CERCHIA ESTERNA AD ANFITEATRO.

2.

STRATI DI CENERI, LAPILLI, POMICI E TUFI, CON INCLUSI DI SCORIE E DI BLOCCHI RIGETTATI, COSTITUENTI IL CONO ERUTTIVO INTERNO DELL'IMPERATRICE E INCLINATI LUNGO IL PENDIO DEL CONO STESSO.

(FALDE MERIDIONALI DELL'IMPERATRICE)

finale, quantunque ancora lontana, distruzione. È bene però notare, che il modellamento presente e futuro, dovuto alla denudazione, ha avuto le sue linee prime e fondamentali segnate dalla originaria costruzione eruttiva e dai contatti del nostro cono craterico con gli altri vulcani limitrofi.

IV.

LA GENESI

Ora che abbiamo minutamente osservato e descritto qual'è la natura dei materiali eruttati da Astroni, quale la loro disposizione architettonica e quali le relazioni con i materiali dei vulcani limitrofi, possiamo anche brevemente indagare come e quando s'è formato questo vulcano, di cui ormai c'è già nota la struttura e la forma.

Anzitutto la descrizione della natura e della disposizione dei materiali ci ha già a sufficienza indicato quale può essere stato il suo modo di origine. Infatti le ceneri, i lapilli, le pomici, le scorie e gli altri consimili materiali frammentarî, serbatisi in alcuni punti sciolti o incoerenti, in altri punti più o meno cementati a formare dei tufi, si rivelano tali quali tutti i prodotti dei comuni vulcani nelle loro fasi esplosive, eruttati all'aria aperta e depositatisi alla medesima aria aperta, senza alcun indizio di eruzioni sottomarine. Solamente alle falde estreme, verso l'alveo del lago d'Agnano e verso gli altri piani del nord e dell'ovest si possono riscontrare alcuni strati tufacei (in parte depositatisi direttamente per via aerea e in parte lavati dalle acque di pioggia), i quali si sono evidentemente ammassati nei bassi bacini lacustri, che riempivano quegli antichi crateri o le depressioni tra un cratere e l'altro. Similmente nell'interno di Astroni, nell'atrio che cinge le colline centrali, si hanno simili depositi tufacei, sedimentatisi in piccoli stagni e laghetti, analoghi al piccolo lago, che sul fondo ultimo ancora sussiste. Tali limitati e sottili depositi marginali nulla tolgono al fatto principale, che la grande massa dei materiali di Astroni è interamente costituita da prodotti di eruzioni esplosive subaeree, rapide e quasi ininterrotte, che hanno menato alla formazione di un cono craterico semplice e regolare.

Questa sola circostanza dunque già per sè stessa è valida per ribattere l'assurda ipotesi, applicata agli Astroni, di un'origine per sollevamento di anteriori stati tufacei sottomarini; ma v'ha ancora di più. Tutti i materiali di Astroni, di origine eruttiva subaerea, non solo formano strati inclinanti quaquaversalmente all'esterno del cratere, lungo le falde coniche (come vorrebbe la ipotesi del sollevamento) ma hanno dato altresì luogo ad altri potenti strati, che inclinano egualmente verso l'interno del cratere: cosa inespicabile e impossibile a concepirsi nel caso di un solievamento, mentre è perfettamente conforme alle leggi, secondo le quali si depone intorno a una bocca eruttiva il materiale da questa lanciato, formando un anello a doppia inclinazione, interna ed esterna, più o meno alto o depresso, regolare o irregolare, secondo la violenza e la continuità degli atti eruttivi e il rapporto della forza di projezione con la legge di gravità. Il cono craterico di Astroni corrisponde dunque perfettamente alla definizione dei vulcani data

da Kant nelle sue *Vorlesungen über Physische Geographie*: « Feuerspeiende Berge kann man als Feuerschlünde betrachten, durch deren Mündung eine ihnen angemessene Ladung herausgestossen wird ».

E inoltre ancora. Le prominenze che si trovano sul fondo del cratere d'Astroni e che erano state supposte essere costituite da una grande cupola, da una laccolite trachitica, la quale avrebbe sollevato e squarciato i circostanti tufi, viceversa, esaminate da vicino, si vede che non sono da altro formate che da um modesto cono tufaceo, dal cui cratere slabbrato ad oriente è effluita una piccola corrente di lava scoriacea, raggrumatasi alquanto in una cupoletta massiccia ad una delle estremità. La massa di lava incastonata nel fianco orientale della grande cerchia è indipendente dalla lava del fondo del cratere ed è certamente anteriore alle eruzioni esplosive di Astroni. Vien quindi così a cadere ogni supposta base di un immaginario sollevamento, ed Astroni appare come tipico vulcano subaereo a recinto, costituito da accumulazione di materiali frammentarî, a forma di cono largo e depresso, con ampio, svasato e profondo cratere, nel cui centro si sono avute le ultime manifestazioni eruttive.

Tanto la natura dei materiali rigettati, prevalentemente cinerei, lapillosi e pumicei, quanto la loro disposizione e la forma del cono attestano che le esplosioni, a cui essi debbono la loro origine, dovettero essere grandi, continue e rapide. In virtù di tal genere di esplosioni si è formato l'ampio e regolare cratere, ben diverso dagli imbuti stretti e sinuosi, che si trovano alla cima dei vulcani compositi come il Vesuvio. Tutto porta a credere infatti, che l'area del fondo del cratere di Astroni, al pari di quella di Monte Nuovo, rappresenti la sezione orizzontale, leggermente ellittica, del camino eruttivo, di forma cilindrica, analoga a quella riscontrata nei Maare della Svevia, nei Necks di Scozia e nei pozzi adamantiferi dell' Africa australe. In questo camino eruttivo debbono continuarsi, pendendo sempre verso il centro, gli strati di materiale frammentario, che formano le pareti interne visibili del grande cratere, percorse da un dicco o filone centrale di lava, che rappresenterebbe la continuazione interna degli efflussi lavici versatisi nel fondo del cratere. Così che per induzione noi veniamo a formarci dell'interno del camino eruttivo di Astroni un quadro, che corrisponde esattamente a quello, che visibilmente ora ci mostrano i camini eruttivi dei vulcani permiani di Scozia, specialmente nella Fife orientale, e che mostra addirittura una sorprendente identità con il piano e la sezione naturale di Elie Harbour e di Kincraig, illustrati da sir Archibald Geikie a pag. 80 e 81 e fig. 217-218 del II volume della sua grande opera sugli *Ancient volcanoes of Great Britain*.

Dato ora che il fondo attuale del cratere di Astroni rappresenti press'a poco la sezione superiore del suo camino eruttivo cilindrico, se si fa un ragionamento analogo a quello sviluppato da uno di noi nelle sue *Considerazioni sull'origine superficiale dei vulcani* (Atti di quest'Accademia, serie 2ª, vol. XI, 1902), se cioè si suppone, che tutto il materiale costituente il cono craterico non sia prodotto da magma autogeno, ma rappresenti solo materiale strappato al camino percorso dai gas e vapori eruttivi e rigettato al di fuori, e si calcola, in base al volume del materiale stesso, la probabile profondità da cui sono partite le esplosioni, si ottiene come limite massimo una profondità di poco più di 2500 metri. Che tale pro-

fondità rappresenti un limite massimo, forse mai raggiunto in realtà dalle esplosioni di Astroni, è indicato dal fatto, che tra i materiali rigettati dal nostro vulcano non si trova alcun saggio intatto dei terreni sedimentarî, i quali pur certamente formano il fondo della conca campana a poche centinaia di metri al disotto della superficie. Viceversa tra i materiali rigettati da Astroni sono certo abbondantissime le ceneri, i lapilli e gli altri frammenti eruttivi, strappati dalle esplosioni alla coltre vulcanica attraverso cui dovettero aprirsi il cammino. Di materiale sedimentario profondo ci danno solamente indizio i blocchi a humboldtilite e facellite delle scorie del grande recinto e della lava del fondo, i quali, essendo già in tutto e per tutto completamente metamorfosati, dimostrano, che i calcari, ai quali essi debbono la loro origine, dovettero stare lungo tempo a contatto in profondità col magma, prima che questo erompesse al difuori per formare il cratere di Astroni.

Il fatto poi, che tali blocchi metamorfici di origine calcarea si trovano nelle scorie e nella lava, che rappresentano gli ultimi atti eruttivi di Astroni, dimostra, che il magma, il quale giaceva in profondo, a contatto del bacino calcareo, non traboccò in forma lavica e scoriacea che alla fine quasi di tutta la manifestazione eruttiva (analogamente a quando avvenne al Monte Nuovo), quando già il vapore d'acqua gli aveva violentemente aperto un ampio camino, lanciando al difuori tutti i materiali incontrati nel suo passaggio e anche buona parte del magma stesso, polverizzato e soffiato sotto forma di ceneri e di pomici. A questo bacino magmatico locale, poco profondo, l'acqua d'infiltrazione, forse proveniente dal mare vicino ma più probabilmente derivante dai colli dintorno, dovette lentamente pervenire ed essere assorbita dal magma stesso, finchè per quantità e riscaldamento non raggiunse la tensione, necessaria a vincere la pressione opposta dalla pila di terreni soprastanti: raggiunta la quale, dopo le scosse sussultorie, simili al fremito delle pareti d'una caldaia ad alta tensione, in un attimo il suolo fu squarciato e, con una serie di esplosioni grandiose e rapide, simili a quelle del 1538 del Monte Nuovo, durate appena pochi giorni, in pochissimo tempo intorno alla bocca eruttiva si innalzò il grande anfiteatro craterico. Dopo una breve sosta (tal quale così come al Monte Nuovo), quasi una pausa momentanea nella violenza e rapidità della manifestazione eruttiva, furono lanciate le scorie del recinto e i materiali frammentarî del cono interno e sgorgò dalle ime viscere del vulcano la lava più densa e più scarica di vapor d'acqua, la quale col suo flutto indurato pose il suggello di chiusura all'attività eruttiva di Astroni.

Quest attività di Astroni rappresenta una delle manifestazioni più recenti della storia geologica dei Campi Flegrei. Noi abbiamo già detto, che essa fu del tutto subaerea e fu posteriore di molto alla formazione dei grandi crateri periferici di tufo giallo costituenti Miseno, Porto di Miseno, la piattaforma dell'Averno e del piano di Quarto, il Gauro, i Camaldoli, Capodimonte, il Vomero, Posillipo e Nisida. Abbiamo anche visto, che essa fu posteriore pure al grande cratere di Agnano, all'altro cratere che è indicato dalla cresta Pacifico, e fors'anche alla prima accensione dei fuochi della Solfatara. Così che di crateri certamente posteriori agli Astroni non ci sono che quelli di Campana, Cigliano e Monte Nuovo, a cui forse bisogna aggiungere i piccoli crateri d'esplosione, i quali si trovano

lungo una linea, diretta da nord a sud e passante per Baja, a cominciare da M. Ruscello, per M. Rosso, l'Averno, Baja e il Fondo di Baja, fino a Bacoli. Si può quindi anche dire, che Astroni rappresenta veramente l'ultima grandiosa manifestazione eruttiva dei Campi Flegrei.

Questa manifestazione non solo è stata geologicamente recentissima, ma forse anche essa esce addirittura dagli abissi oscuri delle ère geologiche e si presenta quasi all' ingresso dei tempi storici, là dove per le nostre contrade la preistoria comincia a passare nella vera storia degli uomini.—Infatti, i vulcani costruiti da tufo giallo si trovano ora, per accidenti tettonici, per posteriori eruzioni, per denudazione atmosferica e per abrasione marina, in uno stato sensibile di degradazione e di disfacimento; nessuno dei coni s'è mantenuto intatto, ma ognuno di essi mostra i fianchi squarciati da posteriori esplosioni, il cratere slabbrato dalle frane verticali, le falde solcate dai canali d'erosione e i margini corrosi dalle onde del mare, che batteva fin sotto i Camaldoli e intorno al Gauro, ondeggiando sui piani di Soccavo e della Starza. Eppure tutti questi mutamenti non sono geologicamente molto antichi, perchè la formazione dei crateri di tufo giallo è di parecchio posteriore alle eruzioni dell' Epomeo (le quali si esplicarono tra il chiudersi del pliocene e l'aprirsi del pleistocene e si continuarono in questo) e quindi essa deve appartenere a tempi abbastanza avanzati del quaternario.

Se ora consideriamo l'intervallo di tempo, che ha dovuto trascorrere tra la formazione dei vulcani di tufo giallo e l'origine di Astroni, e guardiamo il fresco e quasi intatto stato di conservazione in cui questo si trova, facilmente ne induciamo, che la formazione del nostro cratere deve essere stata vicinissima a noi. Di ciò tanto più presto ci convinciamo, se teniamo conto della straordinaria alterabilità e friabilità presentata dai materiali incoerenti e leggieri di Astroni e della quale si ha una prova nei fianchi suoi stessi. Infatti, quando dall'anfiteatro di Pozzuoli si sale verso nord-est, passando attraverso le grandiose ruine di edificii romani, in una delle profonde *cupe*, che salgono verso il cratere, si vedono gli avanzi del lastricato poligonale di una via romana, situati all'altezza media di un metro sul fondo della cupa e sormontati da una pila di tufi e di pozzolane di circa cinque o sei metri d'altezza, in cui la cupa stessa è scavata. La posizione di quel lastricato mostra, che la via romana durante il medio evo dovè essere sepellita da prodotti eruttivi, parte lanciati dalla Solfatara e parte forse trasportativi dalle acque, e che posteriormente queste acque stesse, nel corso di pochi secoli, hanno potuto incidere tutto quanto il sovrapposto materiale, fino a raggiungere il sepellito lastricato, erodendo inoltre ancora per un metro circa al disotto di questo: cosa, ripeto, che non deve meravigliare se si riflette quanto siano erodibili le ceneri, le pozzolane, e i banchi di lapilli e di pomici, da cui quei depositi sono costituiti. Ora gli Astroni in sostanza mostrano pochi e limitati effetti della denudazione atmosferica, rappresentati dai pochi valloni centrifughi radiali delle falde esterne orientali e meridionali, e dai tre o quattro canaloni centripeti radiali della parete interna settentrionale del cratere: il resto delle falde coniche esterne e delle pareti dell' interno cratere non mostra segni d'alterazione molto maggiori di quelli che si riscontrano dentro e fuori del Monte Nuovo, dopo poco meno di quattro secoli di esposizione atmosferica.

Ciò dimostra ad evidenza, che la formazione del cratere di Astroni non solo

appartiene agli ultimi momenti del quaternario, ma che essa esce forse addirittura fuor del computo relativo dei tempi geologici e si avanza al limitare dei tempi storici, in modo che già la sua età si può forse contare per secoli. Certamente i rami italici della stirpe ariana, che scesero dalle Alpi orientali nella nostra penisola, a cui diedero il nome, assistettero dagli ultimi contrafforti di quest' Appennino alle sue immani conflagrazioni; le quali poterono forse anche esser viste dai primi coloni greci, che qualche millennio prima dell'èra volgare cercavano dalle isole nel continente e da questo in quelle scampo alle molteplici eruzioni, da cui erano di continuo minacciati sul suolo malfermo. Così le loro vergini menti trassero da queste grandiose visioni nuova materia per le loro concezioni delle lotte tra le forze telluriche e quelle atmosferiche, con la vittoria finale dei numi celesti; e forse nella radice del nome stesso di Astroni ci lasciarono il ricordo dei lampeggiamenti accolti nella prima visione di questo cratere.

CONCLUSIONE

Alla fine dei tempi quaternarî, forse alcuni millennii appena prima dell'èra volgare, quando già dal mare emergeva il modellamento dei Campi Flegrei quasi del tutto completo, specialmente nelle sue parti periferiche, al centro di essi, con fenomeni precursori e concomitanti simili a quelli notici dalla formazione del Monte Nuovo, si aprì nel suolo vasta voragine, dalla quale con esplosioni grandiose, continue e rapide, fu eruttata copia grande di materiali frammentarî (ceneri, lapilli, pomici e scorie), i quali si accumularono intorno alla bocca eruttiva, in modo da formare il grande cono craterico di Astroni. Dopo breve pausa ripigliarono con minore veemenza le eruzioni, le quali innalzarono sul fondo del grande cratere il piccolo cono tufaceo dell' Imperatrice, da cui contemporaneamente sgorgò una piccola corrente di lava, che si allargò nelle prominenze dei Pagliaroni, si raggrumò nel toppo della Rotondella e chiuse il ciclo eruttivo di questo possente vulcano.

I materiali autogeni da esso eruttati, sia sotto forma frammentaria di ceneri, lapilli, pozzolane, tufi, pomici, ossidiane e scorie, che sotto quella continua di lava, scoriacea o massiccia, presentano grande uniformità di composizione chimica e mineralogica e provengono da un magma trachitico-basico, di composizione intermedia tra le trachiti e le andesiti, corrispondente alle vulsiniti della regione vulcanica di Bolsena.

I materiali allogeni, rigettati sotto forma frammentaria, e di natura analoga agli autogeni, o soltato eccezionalmente alquanto più basici, di tipo trachidoleritico, provengono generalmente dai sottostanti depositi eruttivi e in un caso solo (blocchi a humboldtilite trasportati dagli ultimi sbocchi di scorie e di lave) indicano provenienza dal bacino sedimentario calcareo, col quale il magma dovè stare lungamente a contatto prima di fare eruzione. Ciò, insieme ad altri argomenti, prova che le esplosioni, a cui Astroni deve la sua origine, partirono da poca profondità al disotto del suolo.

I materiali eruttati, nel depositarsi, in parte si modellarono sui rilievi preesistenti all'intorno e specialmente coprirono quella parte del lato nord-ovest della

cinta preesistente di Agnano, che era rimasta illesa dalle esplosioni (di cui restano a testimonianza la massa vulsinitica della Caprara e le creste che si trovano a nord e a sud del cono), e in parte si espansero liberamente sul suolo circostante. Nell' un caso e nell' altro assunsero nel complesso la forma caratteristica di un cono largo e depresso, ad ampio e profondo cratere, con strati inclinati centrifugamente all'esterno nelle falde coniche e centripetamente all' interno nelle pareti crateriche. L'aggiunta di un cono eruttivo interno diede poi ad Astroni l'aspetto tipico di un vulcano a recinto; e la posteriore formazione di buona parte, se non di tutta la Solfatara, e degli interi crateri di Cigliano e di Campana gli gittò intorno una corona di coni eruttivi minori.

Le forze eruttive, che avevano creato il grande cono craterico, e i rilievi anteriori, che ne avevano determinato alcune modalità nella architettura interna e nella plastica esterna, avevano contemporaneamente anche segnato le linee fondamentali di attacco alla pioggia edace e alle altre forze distruggitrici dell'atmosfera, che assalirono subito il prostrato, estinto figlio della terra e con la loro opera lenta, assidua e pertinace ne lacerarono, ne rodono e ancor più ne dilanieranno le membra, durante la innumerabile serie degli anni e la fuga dei tempi, fino a compiere l' inesorabile, gigantesca opera di disfacimento e di rivolgimento. Forse l' immane ciclope potrebbe ancora avere qualche parossismo di furore, saliente dai suoi più interni e ancor caldi precordî; ma a noi ora pare che il suo fuoco animatore sia del tutto spento e che il lucido cielo si possa stendere vittorioso sulla grande orbita vuota che non ha più lampi.

***

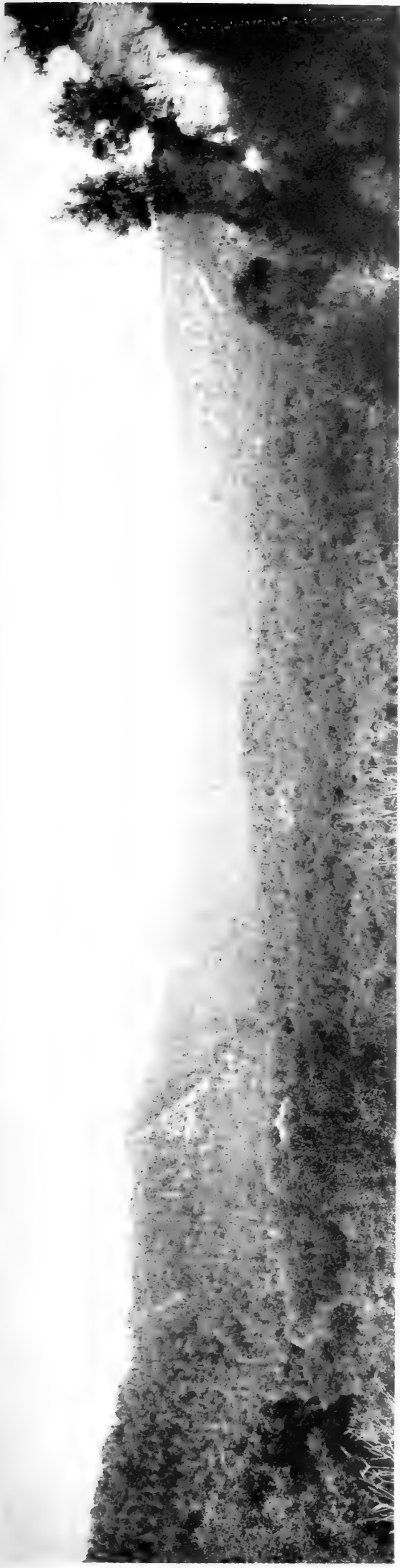
Questo lavoro, intrapreso sotto i più fausti auspicii, compiuto tra le più liete speranze d'una prossima continuazione, è stato durante il corso della sua stampa funestato dalla scomparsa del principale dei suoi autori. Il 3 giugno ultimo scorso Carlo Riva, ascendendo la Grigna settentrionale sul lago di Como, colpito e travolto da una valanga di neve e precipitato dall' alto di una di quelle rupi dolomitiche, tragicamente periva, nel fiore della sua splendida giovinezza, mentre più gagliarde fluivano in lui le forze della vita e intorno al suo capo pensoso girava con volo d' aquila la speranza d'un glorioso avvenire.

Nato il 3 agosto 1872 a Imbersago sull'Adda, aveva nel suo organismo assorbito la forza possente del grande piano ubertoso e nei suoi occhi accolto la visione sublime delle Alpi soprastanti, e quella forza mettendo a servizio di questa visione egli aveva dedicata tutta intera la sua rigogliosa esistenza alla severa e faticosa investigazione scientifica; che però nel suo spirito restò sempre congiunta

al culto assiduo e alla sacra venerazione per tutte le cose belle e per tutte le cose grandi, sia della natura che dell'arte e del pensiero umano: il tutto essendo coronato da un carattere dolce, modesto, gentile e al tempo stesso appassionato e forte, calmo, sicuro, sereno.

In uno speciale volume di *Ricordi*, prossimo a pubblicarsi, ho cercato di esporre i frutti della sua attività intellettuale: i viaggi scientifici da lui compiuti in Russia, nella Siberia, negli Urali, nel Caucaso, nell'Armenia, nei Pirenei, nell'Alvernia, in Germania, nella nostra penisola e nelle nostre isole, di cui gli era nota quasi ogni parte; le sue ardite ascensioni alpine, che lo avevano portato fin sul Grande Ararat; le sue ricerche di cristallografia e di mineralogia fisica e chimica, che lo avevano condotto a risultati interessanti, specialmente sugli indici di rifrazione e la determinazione dei feldspati; e finalmente i suoi lavori di petrografia geologica, che ormai non avevano pari e che avevano illustrato e illustreranno ancora in modo mirabile (nei lasciati manoscritti) le masse granitiche e le rocce filoniane delle Alpi lombarde e della Sardegna, con le loro rispettive zone cristallino-scistose di contatto.

Tale sua sapienza mineralogica e petrografica e il suo amore per i dintorni di Napoli e l'affetto reciproco che ci univa aveano fatto sorgere in noi il pensiero di dare nel corso degli anni una illustrazione geologica, il più che possibile completa, dei Campi Flegrei; e di tale illustrazione finora infatti s'è compiuta la monografia sul cratere di Vivara e questa di Astroni, alla cui comparsa purtroppo Egli più non assiste. Ma ora, che la sua vita e la sua forza s'è infranta, come quella di un grande valido arco troppo teso, e che con la sua morte è svanita anche la sua sapienza, la bella ideata opera si spezza, in attesa che altri dopo di noi vengano a ripigliarla e a risollevarla. L'arte è lunga, anche se la nostra vita è breve; e questa brevità e caducità della nostra vita può anzi, ora come sempre, esserci di conforto nella subìta perdita, assicurandoci, che tra pochi anni, tra mesi, tra giorni, forse, anche noi scenderemo nella terra, al cui grembo l'amico diletto è stato già maternamente accolto.

Finita di stampare il dì 31 Luglio 190?

CRATERE DI ASTRONI, DALL'INGRESSO ORIENTALE

INDICE

INDICE DELLE FIGURE

ELENCO DELLE TAVOLE

St. Lit. A. Serino Napoli

Vol. XI, Serie 2.ª N.° 9.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ALCUNE FORMOLE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI
IN UNO SPAZIO A TRE DIMENSIONI DI CURVATURA COSTANTE

NOTA I.

di DOMENICO DE FRANCESCO

presentata nell'adunanza del dì 7 Giugno 1902

Oggetto di questa Nota è di stabilire con metodo elementare le formole fondamentali della Meccanica dei fluidi in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante.

1. Premettiamo due formole di geometria relative al volume di un parallelepipedo infinitesimo.

Si abbia in uno spazio iperbolico a tre dimensioni *) un parallelepipedo in-

---

*) Solo per fissare le idee noi supponiamo lo spazio iperbolico, ma le formule valgono anche per lo spazio ellittico mediante una piccola variazione nel significato delle notazioni. Ricordiamo infatti che un punto s'intende individuato dalle sue tre distanze ξ, η, ζ da tre piani coordinati ortogonali, o dalle quattro coordinate omogenee x, y, z, u, legate con ξ, η, ζ dalle relazioni:

$$(a) \qquad x = i \operatorname{sen} \frac{\xi}{k} \;,\quad y = i \operatorname{sen} \frac{\eta}{k} \;,\quad z = i \operatorname{sen} \frac{\zeta}{k} \;,\quad u = \cos \frac{\rho}{k} \;,$$

essendo ρ la distanza del punto dall'origine, ed $\frac{1}{k}$ la radice quadrata della curvatura; e siccome, detti α, β, γ gli angoli direttori di ρ, si ha:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma} = i \operatorname{sen} \frac{\rho}{k} \;, \qquad \text{viene :} \quad u^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \;.$$

Nello spazio ellittico noi assumiamo $k = 1$, e nell'iperbolico $k = i$. Nel secondo x, y, z, u sono tutte reali e designano i seni iperbolici $\operatorname{Sen}\xi$, $\operatorname{Sen}\eta$, $\operatorname{Sen}\zeta$ ed il coseno iperbolico $\operatorname{Cos}\rho$; nel primo ad evitare gl'immaginari, giova assumere invece delle (a) le seguenti:

$$(b) \qquad x = \operatorname{sen} \frac{\xi}{k} \;,\quad y = \operatorname{sen} \frac{\eta}{k} \;,\quad z = \operatorname{sen} \frac{\zeta}{k} \;,\quad u = \cos \frac{\rho}{k} \;,$$

ed allora si ha: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$. (La formola (1) vale egualmente).

La $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$ evidentemente è più comoda dell'altra, e quindi anche nello spazio iperbolico giova in certi casi preferire le (b) (come del resto abbiamo fatto talvolta nelle Memorie precedenti). Questa sostituzione delle (b) alle (a) si effettua scrivendo in tutte le formole provenienti dal sistema (a), al posto di x, y, z le quantità ix, iy, iz (Cfr. *Alcuni problemi di Meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante.* Mem. I e II, Atti della R. Acc. delle Scienze di Napoli, 1900).

finitesimo determinato dai tre spigoli concorrenti ds_1, ds_2, ds_3, e siano ordinatamente:

$$\begin{vmatrix} u & x & y & z \\ u+du_1 & x+dx_1 & y+dy_1 & z+dz_1 \\ u+du_2 & x+dx_2 & y+dy_2 & z+dz_2 \\ u+du_3 & x+dx_3 & y+dy_3 & z+dz_3 \end{vmatrix}$$

le coordinate omogenee del vertice comune e degli estremi dei tre spigoli ds_1, ds_2, ds_3 rispetto ad una terna di assi ortogonali: dico che il volume dV di questo parallelepipedo è espresso, in valore assoluto, dal determinante formato dal precedente schema, ossia:

$$(1) \qquad |dV| = \begin{vmatrix} u & x & y & z \\ du_1 & dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ du_2 & dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ du_3 & dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{vmatrix} .$$

Infatti, scriviamo il secondo membro sotto la forma:

$$\frac{1}{i} \begin{vmatrix} iu & x & y & z \\ idu_1 & dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ idu_2 & dx_2 & dy_2 & dz_2 \\ idu_3 & dx_3 & dy_3 & dz_3 \end{vmatrix}$$

ed innalziamo a quadrato (moltiplicando per orizzontali). Tenendo presenti le formole:

$$(2) \quad \begin{cases} u^2-x^2-y^2-z^2=1 \quad , \quad udu-xdx-ydy-zdz=0 \; , \\ -du^2+dx^2+dy^2+dz^2=ds^2 \quad , \quad -du_2du_3+dx_2dx_3+dy_2dy_3+dz_2dz_3=ds_2ds_3\cos(2,3) \; ^{*}), \end{cases}$$

*) Questa formola, che non è stata data nelle Note precedenti, si dimostra nel modo seguente. Chiamando ds_{23} l'elemento che congiunge i punti

$$(x+dx_2, y+dy_2, z+dz_2, u+du_2) \quad , \quad (x+dx_3, y+dy_3, z+dz_3, u+du_3),$$

si ha per la 3ª delle (2):

$$\begin{aligned} ds^2_{23} &= (dx_2-dx_3)^2+(dy_2-dy_3)^2+(dz_2-dz_3)^2-(du_2-du_3)^2 \\ &= ds^2_2+ds^2_3-2(dx_2dx_3+dy_2dy_3+dz_2dz_3-du_2du_3) \; . \end{aligned}$$

Ma si ha pure:

$$ds^2_{23} = ds^2_2+ds^2_3-2ds_2ds_3\cos(2,3) \; ;$$

quindi:

$$ds_2ds_3\cos(2,3) = dx_2dx_3+dy_2dy_3+dz_2dz_3-du_2du_3 \; .$$

otterremo:

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ds_1^2 & ds_1 ds_2 \cos(1,2) & ds_1 ds_3 \cos(1,3) \\ 0 & ds_2 ds_1 \cos(2,1) & ds_2^2 & ds_2 ds_3 \cos(2,3) \\ 0 & ds_3 ds_1 \cos(3,1) & ds_3 ds_2 \cos(3,2) & ds_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(1,2) & \cos(1,3) \\ \cos(2,1) & 1 & \cos(2,3) \\ \cos(3,1) & \cos(3,2) & 1 \end{vmatrix} ds_1^2 ds_2^2 ds_3^2$$

$$= (dV)^2 .$$

c.v.d.

Consideriamo ora due punti infinitamente vicini $M(x, y, z, u)$ ed $M'(x + dx, y + dy, z + dz, u + du)$. Conducendo da essi le tre coppie di superficie equidistanti dai piani coordinati, esse chiuderanno un elemento volumetrico MABC, che dico essere un parallelepipedo.

Infatti, essendo le coordinate dei suoi vertici:

$$\begin{array}{llllll}
M, & x, & y, & z, & u, \\
A, & x+dx, & y, & z, & u+\frac{x}{u}dx, \\
B, & x, & y+dy, & z, & u+\frac{y}{u}dy, \\
C, & x, & y, & z+dz, & u+\frac{z}{u}dz, \\
A', & x, & y+dy, & z+dz, & u+\frac{y}{u}dy+\frac{z}{u}dz, \\
B', & x+dx, & y, & z+dz, & u+\frac{x}{u}dx+\frac{z}{u}dz, \\
C', & x+dx, & y+dy, & z, & u+\frac{x}{u}dx+\frac{y}{u}dy, \\
M', & x+dx, & y+dy, & z+dz, & u+du,
\end{array}$$

dalla terza delle (2) si ricava che i quattro spigoli secondo x, i quattro secondo y ed i quattro secondo z sono eguali; ossia:

$$MA = M'A' = BC' = B'C = dx\sqrt{1 - \frac{x^2}{u^2}} ,$$

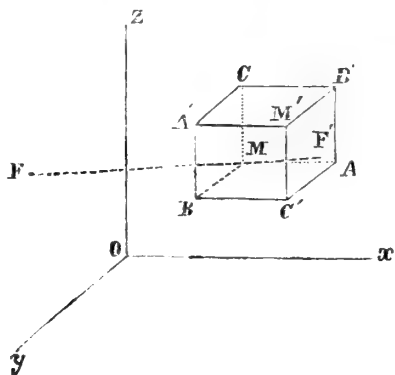
$$MB = M'B' = CA' = C'A = dy\sqrt{1 - \frac{y^2}{u^2}} ,$$

$$MC = M'C' = AB' = A'B = dz\sqrt{1 - \frac{z^2}{u^2}} .$$

Applicando a questo parallelepipedo la (1) si ha:

$$(3) \qquad dV = \begin{vmatrix} u & x & y & z \\ \frac{x}{u}dx & dx & 0 & 0 \\ \frac{y}{u}dy & 0 & dy & 0 \\ \frac{z}{u}dz & 0 & 0 & dz \end{vmatrix} = \frac{dx\,dy\,dz}{u} .$$

Equazioni d' equilibrio.

2. Ci proponiamo ora di trovare le equazioni che rappresentano l' equilibrio di una massa fluida qualunque, ammettendo il principio di **Pascal**. Consideriamo in essa un elemento infinitesimo MABC (fig. 1ª) compreso fra le superficie equidistanti ai tre piani coordinati, condotte per i punti $M(x, y, z, u)$ ed $M'(x+dx, y+dy, z+dz, u+du)$. Questo elemento, $= dV$, è in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne ad esso applicate e delle pressioni normali alle facce, esercitate dalle particelle fluide adiacenti. Siano ρ e p la densità e la pressione unitaria nel punto M; $\rho L_1 dV$, $\rho M_1 dV$, $\rho N_1 dV$ i comomenti secondo gli assi delle forze esterne che agiscono sull'elemento considerato *). Il comomento secondo l'asse x della pressione che si esercita sulla faccia MBC del parallelepipedo è:

$$p \, . \, \mathrm{MBC} \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} \, ,$$

quello della pressione che si esercita sulla faccia opposta è

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) \mathrm{MBC} \frac{u}{\sqrt{1+x^2}} \, .$$

Fig. 1.ª

I comomenti secondo lo stesso asse delle pressioni che si esercitano sulle altre quattro facce sono nulli. Per l'equilibrio dell'elemento fluido dV dovrà essere:

$$-\frac{u}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial p}{\partial x} dx \, . \, \mathrm{MBC} + \rho L_1 dV = 0 \, .$$

Conducendo dal vertice M del parallelepipedo la perpendicolare MF' alla faccia M'B'C', essa sarà il prolungamento della perpendicolare $\mathrm{MF} = \xi$ al piano yz e sarà:

$$\mathrm{MF'} = d\xi = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad , \quad dV = \mathrm{MBC} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \; ; \tag{4}$$

sicchè l'equazione precedente, tolto il fattore comune, diventa:

$$-u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho L_1 = 0 \, ,$$

che scriveremo con le altre due analoghe, così:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\rho}{u} L_1 \; , \; \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\rho}{u} M_1 \; , \; \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{u} N_1 \; . \tag{5}$$

---

*) Ricordiamo che il comomento di una forza R rispetto ad un punto O è un vettore di grandezza R cos iδ (essendo δ la distanza OH del punto da R), posto nel piano OR e perpendicolare in O ad OH. Per brevità chiamiamo comomenti secondo gli assi coordinati le componenti secondo i medesimi del comomento rispetto all' origine.

Da queste si deduce l'equazione:

$$dp = \frac{\rho}{u}\,(L_1dx + M_1dy + N_1dz)\,, \tag{6}$$

onde, affinchè il secondo membro sia un differenziale esatto, $\frac{\rho}{u}$ deve essere un fattore integrante del trinomio in parentesi; per conseguenza le forze esterne debbono soddisfare l'equazione:

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial z} - \frac{\partial N_1}{\partial y}\right)L_1 - \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial z}\right)M_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial x}\right)N_1 = 0\,. \tag{7}$$

3. *Esempi.* Mostreremo qualche caso in cui l'equazione (6) è integrabile.

I. *La forza esterna che sollecita ciascun elemento fluido sia diretta ad un punto fisso e funzione della distanza.*

Prendiamo il punto fisso come origine delle coordinate (fig. 2ª): chiamando F la forza unitaria applicata all'elemento dV, avremo:

$$L_1 = \frac{Fx}{\sqrt{u^2-1}}\,,\quad M_1 = \frac{Fy}{\sqrt{u^2-1}}\,,\quad N_1 = \frac{Fz}{\sqrt{u^2-1}}\,,$$

quindi:

$$L_1dx + M_1dy + N_1dz = \frac{Fu\,du}{\sqrt{u^2-1}}\,.$$

Supponendo ρ funzione di u, dalla (6) avremo:

$$p = \int \rho\,\frac{F du}{\sqrt{u^2-1}} = f(u) + C\,; \tag{8}$$

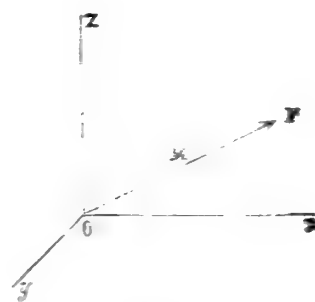



Fig. 2.ª

Le superficie di livello sono quindi sfere concentriche: il centro comune è il punto fisso.

II. *La forza sia perpendicolare ad un piano fisso* (che assumeremo come piano coordinato $\xi\eta$) *e la densità sia funzione della sola z.* Si avrà (fig. 3ª):

$$L_1 = 0\,,\quad M_1 = 0\,,\quad N_1 = \frac{Fu}{\sqrt{1+z^2}}\,,$$

$$L_1dx + M_1dy + N_1dz = \frac{Fu\,dz}{\sqrt{1+z^2}}\,.$$

onde risulta:

$$p = \int^z \rho\,\frac{F dz}{\sqrt{1+z^2}} = f(z) + C \tag{9}$$

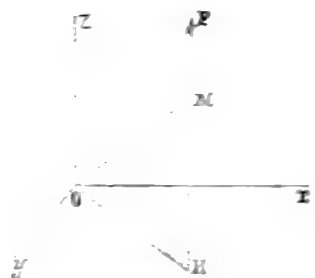



Fig. 3.ª

In questo caso le superficie di egual pressione sono le equidistanti dal piano $z = 0$, il che era da prevedersi, potendosi esso dedurre dal precedente col supporre il centro di forza immaginario. Nello spazio ellittico i due casi considerati coincidono.

III. *La forza sia parallela ad una retta fissa e funzione della distanza da un'orisfera fissa avente il centro sulla retta data.*

Questo è un altro caso d'integrabilità della (6) che trova un'interpretazione geometrica reale soltanto nello spazio pseudosferico.

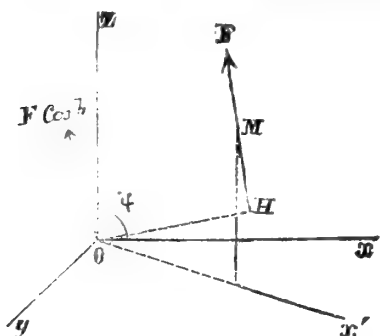
Presa la retta fissa come asse delle z (fig. 4ª) e l'origine O nel punto d'in-

tersezione con l'orisfera fissa, avremo (Mem. I cit., n. 41):

Fig. 4.ª

$$L_1 = - F \operatorname{Cos} h \cos\psi \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = - F \operatorname{Sen} h \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

$$M_1 = - F \operatorname{Cos} h \cos\psi \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = - F \operatorname{Sen} h \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

$$N_1 = \quad F \operatorname{Cos} h \operatorname{Sen} \psi = F ,$$

essendo $OH = h$ la perpendicolare condotta dall'origine sulla linea della forza e ψ l'angolo di parallelismo zOH. Dall'equazione della linea di azione della forza MF nel piano zOx' (Mem. cit., n. 11), cioè:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{Sen} h \,.\, (u-z) \quad , \qquad \text{si ha:} \qquad \operatorname{Sen} h = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{u-z} ,$$

quindi:

$$L_1 = -\frac{Fx}{u-z} \quad , \quad M_1 = -\frac{Fy}{u-z} \quad , \quad N_1 = F ,$$

$$L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz = -\frac{Fu}{u-z} d(u-z) = -Fud \,.\, \log(u-z) ,$$

e poichè l'orisfera passante per $M(x,y,z,u)$ ha per eqaazione (Mem. cit., n. 9):

$$u - z = e^{-\varepsilon} ,$$

dove ε rappresenta il segmento che la detta orisfera taglia sull'asse Oz a partire dall'origine O, od in altri termini la distanza del punto M dall'orisfera passante per O ed avente il centro sull'asse Oz, risulta:

$$L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz = uFd\varepsilon ,$$

per conseguenza, supponendo ρ funzione della sola ε, si ha:

$$(10) \qquad p = \int \rho F d\varepsilon = f(\varepsilon) + C .$$

In questo caso le superficie di livello sono orisfere concentriche.

IV. *Supponiamo finalmente un fluido di densità costante soggetto a forze centrali come nei casi precedenti ed animato da un moto di rotazione intorno ad un asse passante pel centro stesso, ad es. Oz.*

Le equazioni differenziali del suo equilibrio relativo si otterranno aggiungendo ai comomenti L_1, M_1, N_1 delle forze esterne i comomenti L'_1, M'_1, N'_1 della forza centrifuga unitaria proveniente dalla rotazione, forza che è perpendicolare all'asse Oz. Indicando con r il Seno della distanza del punto M dall'asse Oz (fig. 5.ª),

ed ω la velocità angolare, la forza centrifuga unitaria sarà (Mem. II cit., n. 4): $F' = \omega^2 r \sqrt{r^2+1}$, e quindi:

$$L'_1 = F' \cos h \cdot \frac{x}{r} = \omega^2 u x \quad , \quad M'_1 = F' \cos h \cdot \frac{y}{r} = \omega^2 u y \quad , \quad N'_1 = 0 \ ,$$

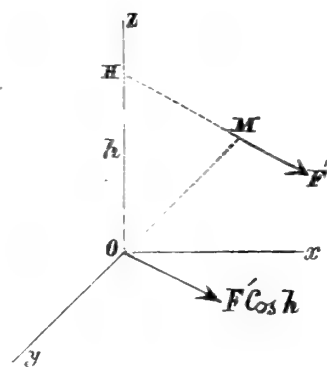
$$L'_1 dx + M'_1 dy + N'_1 dz = \omega^2 u r dr \ .$$

Le equazioni che forniranno la pressione nelle ipotesi I, II, III saranno dunque:

Fig. 5.ª

$$p = \rho \left[\int \frac{F du}{\sqrt{u^2-1}} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right] + C \ ,$$

$$p = \rho \left[\int \frac{F dz}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right] + C \ ,$$

$$p = \rho \left[\int F d\varepsilon + \frac{\omega^2 r^2}{2} \right] + C \ .$$

Equazioni del moto.

4. Consideriamo ora una massa fluida in moto. Per passare dalle equazioni di equilibrio a quelle del moto basta, pel principio di D'Alembert, sostituire nelle (5) ad L_1, M_1, N_1 rispettivamente:

$$L_1 - u\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{d^2u}{dt^2} \quad , \quad M_1 - u\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{d^2u}{dt^2} \quad , \quad N_1 - u\frac{d^2z}{dt^2} + z\frac{d^2u}{dt^2} \ .$$

In tal modo otteniamo le seguenti equazioni:

$$(11) \qquad \begin{cases} u\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2u}{dt^2} = L_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \ , \\ u\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2u}{dt^2} = M_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \ , \\ u\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2u}{dt^2} = N_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \ , \end{cases}$$

alle quali possiamo aggiungere l'equazione caratteristica, che lega la pressione con la densità e con la temperatura, e l'equazione di continuità:

$$(12) \qquad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d \, . \, dV}{dV} = 0 \ .$$

Trasformazioni dell'equazione di continuità.

5. L'equazione (12) si può trasformare in un'altra in cui compariscano le coordinate x, y, z, u della molecola fluida mobile. A tal uopo incominciamo dal trasformare la dilatazione cubica $\frac{d \, . \, dV}{dV}$.

Supponiamo che l'elemento fluido MABC, già considerato, subisca nel tempuscolo dt uno spostamento infinitesimo, per effetto del quale esso passi in $M_1A_1B_1C_1$: indicando le coordinate di M_1 con

$$X = x + x'dt \quad , \quad Y = y + y'dt \quad , \quad Z = z + z'dt \quad , \quad U = u + u'dt \; ,$$

le coordinate dei vertici dell'elemento nella nuova posizione saranno:

$$\begin{array}{lllll}
M_1 & , X & , Y & , Z & , U \;, \\
A_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial x} dx & , Y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx & , Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx & , U + \frac{\partial U}{\partial x} dx \;, \\
B_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial y} dy & , Y + \frac{\partial Y}{\partial y} dy & , Z + \frac{\partial Z}{\partial y} dy & , U + \frac{\partial U}{\partial y} dy \;, \\
C_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial z} dz & , Y + \frac{\partial Y}{\partial z} dz & , Z + \frac{\partial Z}{\partial z} dz & , U + \frac{\partial U}{\partial z} dz \;, \\
A'_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz & , Y + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial z} dz & , Z + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{\partial z} dz & , U + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \;, \\
B'_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial z} dz & , Y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial z} dz & , Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial z} dz & , U + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial z} dz \;, \\
C'_1 & , X + \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy & , Y + \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy & , Z + \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy & , U + \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \;, \\
M'_1 & , X + dX & , Y + dY & , Z + dZ & , U + dU \;,
\end{array}$$

e risulta per la 3.ª delle (2):

$$M_1A_1 = M'_1A'_1 = B_1C'_1 = B'_1C_1 = dx \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2} \;,$$

$$M_1B_1 = M'_1B'_1 = C_1A'_1 = C'_1A_1 = dy \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \;,$$

$$M_1C_1 = M'_1C'_1 = A_1B'_1 = A'_1B_1 = dz \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \;,$$

quindi l'elemento è ancora un parallelepipedo.

Il suo volume sarà per la (1):

$$dV + d\,.\,dV = \begin{vmatrix} U \;, & X \;, & Y \;, & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} \;, & \frac{\partial X}{\partial x} \;, & \frac{\partial Y}{\partial x} \;, & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \;, & \frac{\partial X}{\partial y} \;, & \frac{\partial Y}{\partial y} \;, & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \;, & \frac{\partial X}{\partial z} \;, & \frac{\partial Y}{\partial z} \;, & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} dx\,dy\,dz \,.$$

Togliendo dalla prima verticale, moltiplicata per U, la seconda moltiplicata per X, la terza per Y e la quarta per Z, si trova:

$$dV + d.dV = \begin{vmatrix} 1 & X & Y & Z \\ 0 & \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} \frac{dx\,dy\,dz}{U} = \frac{dV}{1 + \frac{u'}{u}dt} \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial x'}{\partial x}dt & \frac{\partial y'}{\partial x}dt & \frac{\partial z'}{\partial x}dt \\ \frac{\partial x'}{\partial y}dt & 1 + \frac{\partial y'}{\partial y}dt & \frac{\partial z'}{\partial y}dt \\ \frac{\partial x'}{\partial z}dt & \frac{\partial y'}{\partial z}dt & 1 + \frac{\partial z'}{\partial z}dt \end{vmatrix};$$

donde, trascurando gl' infinitesimi d' ordine superiore, si ricava:

$$\frac{d.dV}{dV} = dt\left(\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{u'}{u}\right),$$

e quindi l'equazione di continuità (12) diviene:

$$\frac{d\rho}{\rho dt} + \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{u'}{u} = 0\,. \tag{13}$$

Essendo poi: $uu' = xx' + yy' + zz'$, potremo anche scrivere, eliminando u':

$$\frac{d.dV}{dV} = udt\left\{\frac{\partial \frac{x'}{u}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{y'}{u}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{z'}{u}}{\partial z}\right\},$$

ed osservando che:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}x' + \frac{\partial \rho}{\partial y}y' + \frac{\partial \rho}{\partial z}z',$$

si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho x'}{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho y'}{u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho z'}{u}\right) = 0\,. \tag{14}$$

6. Un' altra trasformazione dell'equazione di continuità si ottiene osservando che una funzione qualunque delle variabili indipendenti x, y, z può sempre considerarsi come funzione omogenea di grado arbitrario delle variabili x, y, z, u.

Infatti la funzione non muta valore, se si sostituisce ad x, y, z rispettivamente

$$\frac{x}{\sqrt{u^2 - x^2 - y^2 - z^2}}\,,\quad \frac{y}{\sqrt{u^2 - x^2 - y^2 - z^2}}\,,\quad \frac{z}{\sqrt{u^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

e si moltiplica poi la funzione stessa per una potenza arbitraria di $\sqrt{u^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Considerando quindi le quantità x', y', z', u' come funzioni omogenee di grado

μ delle variabili x, y, z, u, si può porre l'equazione di continuità sotto una forma diversa. Indicando infatti con una parentesi le derivate rispetto a queste quattro variabili, considerate come indipendenti, si avrà:

$$
(15) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + \frac{x}{u}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right), \\
\frac{\partial y'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) + \frac{x}{u}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right), \\
\frac{\partial z'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) + \frac{x}{u}\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right), \\
\frac{\partial u'}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \frac{x}{u}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Derivando poi rispetto ad x, y e z l'identità:

$$xx' + yy' + zz' - uu' = 0 ,$$

e tenendo presente le (15) e le analoghe, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
x' + x\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) + \frac{x}{u}\left[x\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) - u'\right] &= 0 , \\
y' + x\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) + \frac{y}{u}\left[x\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) - u'\right] &= 0 , \\
z' + x\left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) + \frac{z}{u}\left[x\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) - u'\right] &= 0 .
\end{aligned}
$$

Sommiamo queste equazioni, dopo averle moltiplicate rispettivamente per x, y, z: e dicendo μ il grado comune delle funzioni omogenee x', y', z', u', avremo:

$$
\begin{aligned}
uu' + x\left[\mu x' - u\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)\right] + y\left[\mu y' - u\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)\right] + z\left[\mu z' - u\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)\right] - u\left[\mu u' - u\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)\right] \\
+ \frac{u^2 - 1}{u}\left[x\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) + y\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + z\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) - u\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) - u'\right] = 0 ,
\end{aligned}
$$

ossia riducendo:

$$\frac{x}{u}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) + \frac{y}{u}\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + \frac{z}{u}\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) - \frac{u'}{u} = 0 .$$

Con questa e colle (15), la (13) diviene:

$$\frac{d \,.\, dV}{dV} = dt\left[\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{u'}{u}\right] = dt\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)\right] .$$

e quindi, considerando anche ρ come funzione omogenea delle quattro variabili x, y, z, u, l'equazione di continuità (12) prende la forma:

$$(16) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho x'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \rho y'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \rho z'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \rho u'}{\partial u}\right) = 0 .$$

In questa equazione si suppone che tanto ρ, quanto x', y', z', u' siano funzioni omogenee di x, y, z, u e di più che x', y', z', u' siano di eguale grado.

Trasformazioni dell'equazioni del moto

7. Sommando l'equazioni (11), dopo averle moltiplicate per $\delta x, \delta y, \delta z$, ed osservando che $x\delta x + y\delta y + z\delta z = u\delta u$, si ha:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - \frac{d^2u}{dt^2}\delta u = \frac{L_1}{u}\delta x + \frac{M_1}{u}\delta y + \frac{N_1}{u}\delta z - \frac{\delta\rho}{\rho}.$$

Posto poi:

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2) = T \quad , \quad \frac{L_1}{u}\delta x + \frac{M_1}{u}\delta y + \frac{N_1}{u}\delta z = U' \quad , \quad \int\frac{d\rho}{\rho} = P \,, \tag{17}$$

con un procedimento noto si ricava:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + U' - \delta P)dt = \Big| x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z - u'\delta u \Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{18}$$

od anche, supposto che le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z, \delta u$ siano nulle ai limiti t_0 e t_1,

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + U' - \delta P)dt = 0 \,. \tag{19}$$

Con questa formola è agevole trasformare l'equazioni del moto in altre con coordinate qualunque; ma in questa Nota seguiteremo a servirci delle coordinate x, y, z, u.

8. Alle equazioni (11) se ne possono sostituire altre nelle quali figurino le derivate prime delle x', y', z', u'. A tal uopo sostituiamo in quelle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}x' = \frac{\partial x'}{\partial t} + x'\frac{\partial x'}{\partial x} + y'\frac{\partial x'}{\partial y} + z'\frac{\partial x'}{\partial z}\,,$$

. . . .

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}u' = \frac{\partial u'}{\partial t} + x'\frac{\partial u'}{\partial x} + y'\frac{\partial u'}{\partial y} + z'\frac{\partial u'}{\partial z}\,;$$

ed otterremo:

$$\begin{cases} L_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x} = u\dfrac{\partial x'}{\partial t} - x\dfrac{\partial u'}{\partial t} + x'\left(u\dfrac{\partial x'}{\partial x} - x\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right) + y'\left(u\dfrac{\partial x'}{\partial y} - x\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right) + z'\left(u\dfrac{\partial x'}{\partial z} - x\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right), \\ M_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y} = u\dfrac{\partial y'}{\partial t} - y\dfrac{\partial u'}{\partial t} + x'\left(u\dfrac{\partial y'}{\partial x} - y\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right) + y'\left(u\dfrac{\partial y'}{\partial y} - y\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right) + z'\left(u\dfrac{\partial y'}{\partial z} - y\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right), \\ N_1 - \dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial z} = u\dfrac{\partial z'}{\partial t} - z\dfrac{\partial u'}{\partial t} + x'\left(u\dfrac{\partial z'}{\partial x} - z\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right) + y'\left(u\dfrac{\partial z'}{\partial y} - z\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right) + z'\left(u\dfrac{\partial z'}{\partial z} - z\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right). \end{cases} \tag{20}$$

Poniamo ora:

$$(21)\quad \begin{cases} \left(u\dfrac{\partial z'}{\partial y}-z\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right)-\left(u\dfrac{\partial y'}{\partial z}-y\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right)=2u\mathrm{P}\ , \\ \left(u\dfrac{\partial x'}{\partial z}-x\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right)-\left(u\dfrac{\partial z'}{\partial x}-z\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right)=2u\mathrm{Q}\ , \\ \left(u\dfrac{\partial y'}{\partial x}-y\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right)-\left(u\dfrac{\partial x'}{\partial y}-x\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right)=2u\mathrm{R}\ . \end{cases}$$

La prima delle (20) in virtù delle (21) dà:

$$\mathrm{L}_1-\frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=u\frac{\partial x'}{\partial t}-x\frac{\partial u'}{\partial t}+x'\left(u\frac{\partial x'}{\partial x}-x\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+y'\left(u\frac{\partial y'}{\partial x}-y\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+z'\left(u\frac{\partial z'}{\partial x}-z\frac{\partial u'}{\partial x}\right)$$
$$-2u(\mathrm{R}y'-\mathrm{Q}z')$$
$$=u\frac{\partial x'}{\partial t}-x\frac{\partial u'}{\partial t}+u\left(x'\frac{\partial x'}{\partial x}-y'\frac{\partial y'}{\partial x}+z'\frac{\partial z'}{\partial x}-u'\frac{\partial u'}{\partial x}\right)-2u(\mathrm{R}y'-\mathrm{Q}z')\ ,$$

che si può scrivere insieme con le altre due analoghe:

$$(22)\quad \begin{cases} \mathrm{L}_1-\dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=u\dfrac{\partial x'}{\partial t}-x\dfrac{\partial u'}{\partial t}+u\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}-2u(\mathrm{R}y'-\mathrm{Q}z')\ , \\ \mathrm{M}_1-\dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}=u\dfrac{\partial y'}{\partial t}-y\dfrac{\partial u'}{\partial t}+u\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}-2u(\mathrm{P}z'-\mathrm{R}x')\ , \\ \mathrm{N}_1-\dfrac{u}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}=u\dfrac{\partial z'}{\partial t}-z\dfrac{\partial u'}{\partial t}+u\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}-2u(\mathrm{Q}x'-\mathrm{P}y')\ . \end{cases}$$

9. Nel caso del moto permanente $\frac{\partial x'}{\partial t}=\frac{\partial y'}{\partial t}=\frac{\partial z'}{\partial t}=0$, e le (22), moltiplicate rispettivamente per dx, dy, dz e sommate, danno:

$$\mathrm{L}_1dx+\mathrm{M}_1dy+\mathrm{N}_1dz-\frac{u}{\rho}dp=ud\mathrm{T}-2u\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x' & y' & z' \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix}\ .$$

Questa equazione s'integra quando si verificano queste tre condizioni: 1.° che sussista la funzione delle forze, che chiameremo Φ, ossia che si abbia:

$$d\Phi=\frac{1}{u}\left(\mathrm{L}_1dx+\mathrm{M}_1dy+\mathrm{N}_1dz\right),$$

2.° che ρ sia funzione della sola p, 3.° che l'integrazione si estenda a punti in cui si verifichi:

$$(23)\quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x' & y' & z' \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix}=0\ .$$

Allora si ha:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \mathrm{T} = \Phi + \text{cost.} \tag{24}$$

equazione che corrisponde al teorema di Bernoulli generalizzato.

L' equazione (23) rappresenta una famiglia di superficie, ad ognuna delle quali corrisponde un valore della costante dell' integrale (24).

Appartengono a queste superficie le linee in numero doppiamente infinito rappresentate da:

$$\frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} . \tag{25}$$

e quelle, anche in numero doppiamente infinito, rappresentate da:

$$\frac{dx}{\mathrm{P}} = \frac{dy}{\mathrm{Q}} = \frac{dz}{\mathrm{R}} . \tag{26}$$

Le prime sono le *linee di moto*, cioè le linee che ad un dato istante hanno in ogni punto la direzione della velocità che compete al punto stesso, le altre, come dimostreremo nella Nota II, sono le *linee vorticali*, cioè le linee che ad un dato istante hanno in ogni punto la direzione dell' asse istantaneo di rotazione della molecola corrispondente al punto stesso (*).

Teorema di Helmholtz

10. Ponendo nelle equazioni (22)

$$\mathrm{F} = \Phi - \mathrm{T} - \int \frac{dp}{\rho} , \tag{27}$$

esse diventano:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{x}{u} \frac{\partial u'}{\partial t} + 2(z'\mathrm{Q} - y'\mathrm{R}) &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} . \\
\frac{\partial y'}{\partial t} - \frac{y}{u} \frac{\partial u'}{\partial t} + 2(x'\mathrm{R} - z'\mathrm{P}) &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} . \\
\frac{\partial z'}{\partial t} - \frac{z}{u} \frac{\partial u'}{\partial t} + 2(y'\mathrm{P} - x'\mathrm{Q}) &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} .
\end{aligned} \tag{28}$$

(*) Il **Poincaré**, sebbene non scriva l' equazione analoga alla (23), dimostra come nel moto permanente, tirate da un punto qualunque una linea vorticale e una linea di moto, il luogo geometrico delle linee vorticali che passano per la linea di moto coincida col luogo geometrico delle linee di moto che passano per la vorticale. Queste superficie però, rappresentate generalmente dalla (23), possono essere considerate anche prescindendo dal moto permanente. Esse formano una specialità di quelle che il **Beltrami** chiama *vorticoidi*, e che sono il luogo geometrico delle linee vorticali che passano per i punti di una linea qualsiasi.

Deriviamo la seconda rispetto a z e la terza rispetto ad y; avremo:

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x\,\partial t}-\frac{y}{u}\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial t}+\frac{yz}{u^2}\frac{\partial u'}{\partial t}+2\left(x'\frac{\partial R}{\partial z}+R\frac{\partial x'}{\partial z}-z'\frac{\partial P}{\partial z}-P\frac{\partial z'}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial y\,\partial t}-\frac{z}{u}\frac{\partial^2 u'}{\partial y\,\partial t}+\frac{yz}{u^2}\frac{\partial u'}{\partial t}+2\left(y'\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial y'}{\partial y}-x'\frac{\partial Q}{\partial y}-Q\frac{\partial z'}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,.$$

Sottragghiamo dalla seconda la prima, tenendo presente che:

$$\frac{\partial(2P)}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y\,\partial t}-\frac{z}{u}\frac{\partial^2 u'}{\partial y\,\partial t}\right)-\left(\frac{\partial^2 y'}{\partial z\,\partial t}-\frac{y}{u}\frac{\partial^2 u'}{\partial z\,\partial t}\right),$$

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial x}x'+\frac{\partial P}{\partial y}y'+\frac{\partial P}{\partial z}z'\,,$$

$$0=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,;$$

si trova facilmente:

$$\frac{dP}{dt}+P\left(\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial z'}{\partial z}\right)=P\frac{\partial x'}{\partial x}+Q\frac{\partial x'}{\partial y}+R\frac{\partial x'}{\partial z}\,;$$

ossia, in virtù dell'equazione di continuità (13),

$$\frac{dP}{dt}+P\left(\frac{u'}{u}-\frac{d\rho}{\rho\,dt}\right)=P\frac{\partial x'}{\partial x}+Q\frac{\partial x'}{\partial y}+R\frac{\partial x'}{\partial z}\,.$$

Questa equazione si può anche scrivere:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{uP}{\rho}\right)=\frac{u}{\rho}\left(P\frac{\partial x'}{\partial x}+Q\frac{\partial x'}{\partial y}+R\frac{\partial x'}{\partial z}\right).\tag{29}$$

Ciò premesso, consideriamo due molecole $m\ (x, y, z, u)$ ed $m'\ (x+\xi, y+\eta, z+\zeta, u+\omega)$ infinitamente vicine, poste al tempo t sopra una medesima linea vorticale. Si avrà:

$$\frac{\xi}{P}=\frac{\eta}{Q}=\frac{\zeta}{R}\,;$$

donde, chiamando $\frac{\varepsilon u}{\rho}$ il valore comune dei tre rapporti, si trae:

$$\xi=P\frac{\varepsilon u}{\rho}\,,\quad \eta=Q\frac{\varepsilon u}{\rho}\,,\quad \zeta=R\frac{\varepsilon u}{\rho}\,.\tag{30}$$

Alla fine del tempuscolo dt m passerà in m_1 ed m' in m'_1; le coordinate di m_1, saranno $x+dx$, ecc. e quelle di m'_1 saranno $x+\xi+d(x+\xi)$ ecc. Ma $dx=x'dt$, e siccome passando da m ad m', x' diventa:

$$x'+\frac{\partial x'}{\partial x}\xi+\frac{\partial x'}{\partial y}\eta+\frac{\partial x'}{\partial z}\zeta\,,$$

così:

$$d(x+\xi)=\left(x'+\frac{\partial x'}{\partial x}\xi+\frac{\partial x'}{\partial y}\eta+\frac{\partial x'}{\partial z}\zeta\right)dt\ ,$$

$$d\xi=\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\xi+\frac{\partial x'}{\partial y}\eta+\frac{\partial x'}{\partial z}\zeta\right)dt=\frac{\varepsilon u}{\rho}\left(P\frac{\partial x'}{\partial x}+Q\frac{\partial x'}{\partial y}+R\frac{\partial x'}{\partial z}\right)dt=\varepsilon d\left(\frac{uP}{\rho}\right)\ ,$$

Avremo dunque,

$$\xi+d\xi=\varepsilon\left[\frac{Pu}{\rho}+d\left(\frac{Pu}{\rho}\right)\right]\ ,$$

$$\eta+d\eta=\varepsilon\left[\frac{Qu}{\rho}+d\left(\frac{Qu}{\rho}\right)\right]\ ,$$

$$\zeta+d\zeta=\varepsilon\left[\frac{Ru}{\rho}+d\left(\frac{Ru}{\rho}\right)\right]\ .$$

Queste tre equazioni mostrano che le due molecole considerate alla fine del tempo $t+dt$ trovansi ancora sopra una linea vorticale.

In ciò consiste appunto il teorema di Helmholtz.

Potenziale delle velocità.

11. Supponiamo che il quadrinomio

$$x'dx+y'dy+z'dz-u'du\ ,$$

sia un differenziale esatto, considerando t come una costante, ossia che sussista il potenziale di velocità. In tal caso, detta φ una funzione di x, y, z, essendo:

$$\left(x'-\frac{xu'}{u}\right)dx+\left(y'-\frac{yu'}{u}\right)dy+\left(z'-\frac{zu'}{u}\right)dz=d\varphi\ , \tag{31}$$

le equazioni di condizione si riducono alle (21), postovi $P=0$, $Q=0$, $R=0$. Allora la superficie (23) svanisce, e quindi l'integrale (24) ha luogo per tutti i punti del fluido.

12. Il teorema di Lagrange: « *Se ad un istante qualunque sussiste il potenziale di velocità, esso sussisterà durante tutto il moto* », si può considerare come un corollario del teorema di Helmholtz, giacchè se in un istante qualunque $P=Q=R=0$, per la (29) e le analoghe, le stesse quantità saranno nulle durante tutto il nuovo. Ma può dimostrarsi anche indipendentemente dal teorema di Helmholtz.

Supponendo infatti che al tempo t il quadrinomio:

$$x'dx+y'dy+z'dz-u'du$$

sia un differenziale esatto, poichè alla fine del tempuscolo dt esso diventa:

$$x'dx+y'dy+z'dz-u'du+\left[\frac{\partial x'}{\partial t}dx+\frac{\partial y'}{\partial t}dy+\frac{\partial z'}{\partial t}dz-\frac{\partial u'}{\partial t}du\right]dt\ ,$$

basterà dimostrare che la quantità entro parentesi è un differenziale esatto *).
Ora dalle (22), nelle quali al tempo t, $P=Q=T=0$, si trae:

$$L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz - \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) - u\left(\frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz\right)$$
$$= \left(u\frac{\partial x'}{\partial t} - x\frac{\partial u'}{\partial t}\right)dx + \left(u\frac{\partial y'}{\partial t} - y\frac{\partial u'}{\partial t}\right)dy + \left(u\frac{\partial z'}{\partial t} - z\frac{\partial u'}{\partial t}\right)dz\ ,$$

ossia:

$$d\Phi - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial x'}{\partial t}dx + \frac{\partial y'}{\partial t}dy + \frac{\partial z'}{\partial t}dz - \frac{\partial u'}{\partial t}du;$$

e dovendosi qui riguardare t come costante, il primo membro è un differenziale esatto e tale per conseguenza dovrà essere anche il secondo. c. v. d.

13. Nel caso dei liquidi a temperatura costante $\rho = \text{cost.}$, e l'equazione di continuità (13) si riduce a:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} - \frac{u'}{u} = 0\ . \tag{32}$$

Se sussiste il potenziale φ di velocità, questa equazione può trasformarsi in una altra fra le derivate parziali di φ rispetto alle variabili x, y, z e le variabili stesse.

Per facilitare questa trasformazione porremo prima la (32) sotto una forma diversa. Derivando l'identità

$$xx' + yy' + zz' - uu' = 0$$

rispetto ad x, y e z, abbiamo:

$$x' + x\frac{\partial x'}{\partial x} + y\frac{\partial y'}{\partial x} + z\frac{\partial z'}{\partial x} - u\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{x}{u}u' = 0\ ,$$
$$y' + x\frac{\partial x'}{\partial y} + y\frac{\partial y'}{\partial y} + z\frac{\partial z'}{\partial y} - u\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{y}{u}u' = 0\ ,$$
$$z' + x\frac{\partial x'}{\partial z} + y\frac{\partial y'}{\partial z} + z\frac{\partial z'}{\partial z} - u\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{z}{u}u' = 0\ ,$$

e queste, moltiplicate rispettivamente per x, y, z e sommate, danno:

$$\sum_{xyz}\left\{x^2\frac{\partial x'}{\partial x} + xy\left(\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\right) - xu\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{u'}{u}\right\} = 0\ ,$$

alla quale aggiungendo la (32), si ha:

$$\sum_{xyz}\left\{(1 + x^2)\frac{\partial x'}{\partial x} + xy\left(\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\right) - xu\frac{\partial u'}{\partial x}\right\} = 0\ ,$$

*) Cfr. Poincaré, *Mécanique des fluides*, Paris 1886, p. 95.

e questa in virtù delle (21) (nelle quali si suppone $P=0, Q=0, R=0$), è equivalente a:

$$\sum_{xyz}\left\{(1+x)^2\left(\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{x}{u}\frac{\partial u'}{\partial x}\right)+2xy\left(\frac{\partial x'}{\partial y}-\frac{x}{u}\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right\}=0 . \tag{33}$$

Ciò posto, dalla (31) si ha:

$$\left\{\begin{aligned} x'-\frac{u'}{u}x&=\frac{\partial\varphi}{\partial x} ,\\ y'-\frac{u'}{u}y&=\frac{\partial\varphi}{\partial y} ,\\ z'-\frac{u'}{u}z&=\frac{\partial\varphi}{\partial z} . \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Sommando queste equazioni, dopo averle moltiplicate per x, y, z, troviamo:

$$\frac{u'}{u}=\sum_{xyz}x\frac{\partial\varphi}{\partial x} .$$

Derivando poi la prima delle (34) rispetto ad x e ad y, abbiamo:

$$\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{x}{u}\frac{\partial u'}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{u'}{u^3}(u^2-x^2) ,$$

$$\frac{\partial x'}{\partial y}-\frac{x}{u}\frac{\partial u'}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{u'}{u^3}xy ,$$

e sostituendo questi valori nella (33), si trova finalmente:

$$\sum_{xyz}\left\{(1+x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+3x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}=0 . \tag{35}$$

14. Questa equazione si semplifica molto considerando φ come funzione omogenea di grado μ delle variabili x, y, z, u.

Le (34), che si possono scrivere:

$$\left\{\begin{aligned} x'-\frac{u'}{u}x&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{x}{u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) ,\\ y'-\frac{u'}{u}y&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{y}{u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) ,\\ z'-\frac{u'}{u}z&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+\frac{z}{u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) , \end{aligned}\right. \tag{36}$$

moltiplicate rispettivamente per x, y, z, e sommate, danno:

$$u' = \mu\varphi u - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) .$$

Sostituendo questo valore di u' nelle (32), si ha:

$$x' = \mu\varphi x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \quad ; \quad y' = \mu\varphi y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad ; \quad z' = \mu\varphi z + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),$$

Però queste espressioni di x', y', z, u' non sono omogenee, essendo i primi termini di grado $\mu + 1$ ed i secondi di grado $\mu - 1$; le renderemo omogenee di grado $\mu - 1$, ponendo nei primi φ_1 in luogo di φ, essendo φ_1 la stessa φ divisa per $u^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Avremo dunque:

$$x' = \mu\varphi_1 x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \; y' = \mu\varphi_1 y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \; z' = \mu\varphi_1 z + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \; u' = \mu\varphi_1 u - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right),$$

e derivando:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = \mu\varphi_1 + \mu x \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) = \mu\varphi_1 + \mu y \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) = \mu\varphi_1 + \mu z \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) = \mu\varphi_1 + \mu u \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right).$$

Sostituendo questi valori nell'equazione di continuità (16), che nel caso dei liquidi si riduce a:

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) = 0 ,$$

otteniamo:

$$\mu\varphi(2 + \mu) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right). \tag{37}$$

E poichè, come abbiamo detto innanzi, il grado di φ è arbitrario, supponendo $\mu = 0$ oppure $\mu = -2$, si ha l'equazione più semplice:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right) = 0 . \tag{38}$$

finita di stampare il dì 23 Agosto 1902

Vol. XI, Serie 2.ª N.º 10

ATTI DELLA R. ACCADEMIA

DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

ALCUNE FORMOLE DELLA MECCANICA DEI FLUIDI
IN UNO SPAZIO A TRE DIMENSIONI DI CURVATURA COSTANTE

NOTA II.

di DOMENICO DE FRANCESCO

presentata nell'adunanza del dì 7 Giugno 1902

Oggetto di questa Nota è di stabilire le formole che definiscono analiticamente il moto rotazionale in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante, e di mostrare come talune formule del Beltrami, sebbene stabilite nell'ipotesi dello spazio euclideo, valgano anche per spazi non euclidei.

1. Il Beltrami nella sua Memoria *Sui principi fondamentali dell'Idrodinamica razionale* *) dimostrò che « *considerando due stati qualunque d'una medesima particella fluida in moto, esiste sempre una (ed in generale una sola) terna di direzioni ortogonali nel primo stato della particella, che si trasforma in una terna di direzioni pure ortogonali nel secondo stato della particella medesima.* Questo teorema può estendersi ad uno spazio non euclideo, perchè le formole che lo dimostrano valgono in generale per uno spazio qualunque. considerando che nei limiti d'una particella infinitesima gli spazi di curvatura costante sono coincidenti **).

Da questa proprietà risulta che la terna ortogonale (rette principali), relativa al punto $M(x, y, z, u)$ ed all'istante t, si sposta nel tempuscolo t, come se fosse rigida, e quindi il moto di questa terna rispetto al suo vertice si riduce ad una rotazione istantanea w intorno ad un asse passante pel vertice stesso.

Determineremo, seguendo il metodo del Beltrami, le componenti p, q, r di questa rotazione secondo tre assi ortogonali $M\xi\eta\zeta$, aventi l'origine nel punto

*) Memorie dell'Acc. di Bologna, serie III, vol. I, 1871.

**) Questo teorema, come osservò lo stesso Beltrami, fatta astrazione dall'enunciato, corrisponde nello spazio a tre dimensioni a quello che per le superficie fu enunciato dal Tissot e dimostrato dal Dini. Esso mi pare si possa estendere alle omografie con questo enunciato: *Considerando due punti omologhi qualunque di due spazi omografici, esiste sempre una* (ed in generale una sola) *terna di direzioni ortogonali, tirate da uno dei punti, che è omologa ad una terna di direzioni ortogonali tirate dall'altro punto.*

$M(x, y, z, u)$, e tali che si possano, con una semplice traslazione, portare a coincidere con gli assi fissi $Oxyz$. A tal uopo indichiamo con

$$\begin{array}{cccc} x+\mathbf{x}_1 , & y+\mathbf{y}_1 , & z+\mathbf{z}_1 , & u+\mathbf{u}_1 , \\ x+\mathbf{x}_2 , & y+\mathbf{y}_2 , & z+\mathbf{z}_2 , & u+\mathbf{u}_2 , \\ x+\mathbf{x}_3 , & y+\mathbf{y}_3 , & z+\mathbf{z}_3 , & u+\mathbf{u}_3 , \end{array}$$

le coordinate omogenee, rispetto agli assi coll'origine O, degli estremi degli elementi lineari fluidi r_1, r_2, r_3, situati lungo le rette principali $1, 2, 3$, relative al punto x, y, z, u ed all' istante t; con

$$\begin{array}{cccc} a+\mathrm{a}_1 , & b+\mathrm{b}_1 , & c+\mathrm{c}_1 , & e+\mathrm{e}_1 , \\ a+\mathrm{a}_2 , & b+\mathrm{b}_2 , & c+\mathrm{c}_2 , & e+\mathrm{e}_2 , \\ a+\mathrm{a}_3 , & b+\mathrm{b}_3 , & c+\mathrm{c}_3 , & e+\mathrm{e}_3 , \end{array}$$

le coordinate dei punti che a quelli corrispondono nello stato iniziale; con

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1 \quad ; \quad \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \quad ; \quad \xi_3, \eta_3, \zeta_3 ,$$

le proiezioni di r_1, r_2, r_3 sugli assi $M\xi\eta\zeta$, e finalmente con w_1, w_2, w_3 le componenti della rotazione w secondo le tre direzioni principali.

Le tre quantità ξ, η, ζ, essendo infinitesime, si confondono colle coordinate omogenee rispetto alla stessa terna (la quarta coordinata essendo $=1$), e perciò le relazioni tra ξ_i, η_i, ζ_i ed $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i$ si possono ricavare dalle formole di trasformazione delle coordinate *) sostituendo in esse rispettivamente:

$$\begin{array}{llll} \xi_i \quad , \eta_i \quad , \zeta_i & . & \text{ad} & x', y', z' , \\ x+\mathbf{x}_i , y+\mathbf{y}_i , z+\mathbf{z}_i , u+\mathbf{u}_i & & » & x, y, z, u , \\ x \quad , y \quad , z \quad , u & & » & x_0, y_0, z_0, u_0 . \end{array}$$

Così, osservando che $x\mathbf{x}_i + y\mathbf{y}_i + z\mathbf{z}_i - u\mathbf{u}_i = 0$, si ottiene:

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_i = \mathbf{x}_i - \dfrac{x}{1+u}\,\mathbf{u}_i , \\ \eta_i = \mathbf{y}_i - \dfrac{y}{1+u}\,\mathbf{u}_i , \\ \zeta_i = \mathbf{z}_i - \dfrac{z}{1+u}\,\mathbf{u}_i . \end{cases}$$

Le coordinate x, y, z, u si possono considerare come funzioni delle variabili

---

*) Cfr. *Alcuni problemi di Meccanica in uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante.* Mem. I, Atti della R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol. X, 1900, n. 19.

indipendenti a, b, c (valori iniziali di x, y, z) e del tempo t: supponendo t costante, avremo le formole seguenti:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{x}_i &= \frac{\partial x}{\partial a}\mathrm{a}_i + \frac{\partial x}{\partial b}\mathrm{b}_i + \frac{\partial x}{\partial c}\mathrm{c}_i\,, \\ \mathrm{y}_i &= \frac{\partial y}{\partial a}\mathrm{a}_i + \frac{\partial y}{\partial b}\mathrm{b}_i + \frac{\partial y}{\partial c}\mathrm{c}_i\,, \\ \mathrm{z}_i &= \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{a}_i + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{b}_i + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{c}_i\,, \\ \mathrm{u}_i &= \frac{\partial u}{\partial a}\mathrm{a}_i + \frac{\partial u}{\partial b}\mathrm{b}_i + \frac{\partial u}{\partial c}\mathrm{c}_i\,, \end{aligned}\right.$$

dalle quali, posto per brevità:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 \,,\quad \mathrm{B} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)^2 \,,\quad \mathrm{C} = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)^2 \,, \\ &\mathrm{A}_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} \,,\quad \mathrm{B}_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} \,,\quad \mathrm{C}_1 = \Sigma\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} \,. \end{aligned}\right.$$

(il segno Σ comprende quattro termini, il primo dei quali è quello scritto e gli altri si deducono da esso cambiando x in y, in z e in iu), si deduce:

$$(4)\quad \begin{aligned} \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3 + \mathrm{y}_2\mathrm{y}_3 + \mathrm{z}_2\mathrm{z}_3 - \mathrm{u}_2\mathrm{u}_3 &= \mathrm{A}\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 + \mathrm{B}\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{C}\mathrm{c}_2\mathrm{c}_3 \\ &+ \mathrm{A}_1(\mathrm{b}_2\mathrm{c}_3 + \mathrm{b}_3\mathrm{c}_2) + \mathrm{B}_1(\mathrm{c}_2\mathrm{a}_3 + \mathrm{c}_3\mathrm{a}_2) + \mathrm{C}_1(\mathrm{a}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{a}_3\mathrm{b}_2)\,. \end{aligned}$$

Essendo il primo membro di quest'eguaglianza nullo, per l'ortogonalità di r_2 ed r_3, lo sarà parimenti il secondo; e poichè le direzioni r_2 ed r_3 restano ortogonali alla fine del tempo $t + \mathrm{t}$ (t infinitesimo), si avrà pure:

$$(5)\quad 0 = \mathrm{A}'\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 + \mathrm{B}'\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{C}'\mathrm{c}_2\mathrm{c}_3 + \mathrm{A}'_1(\mathrm{b}_2\mathrm{c}_3 + \mathrm{b}_3\mathrm{c}_2) + \mathrm{B}'_1(\mathrm{c}_2\mathrm{a}_3 + \mathrm{c}_3\mathrm{a}_2) + \mathrm{C}'_1(\mathrm{a}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{a}_3\mathrm{b}_2)\,,$$

essendo $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \ldots$ le derivate rispetto al tempo di $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$ I coseni degli angoli che le direzioni principali formano con gli assi ξ, η, ζ sono dati dalla tabella seguente:

	1	2	3
ξ	$\frac{\xi_1}{r_1}$,	$\frac{\xi_2}{r_2}$,	$\frac{\xi_3}{r_3}$,
η	$\frac{\eta_1}{r_1}$,	$\frac{\eta_2}{r_2}$,	$\frac{\eta_3}{r_3}$,
ζ	$\frac{\zeta_1}{r_1}$,	$\frac{\zeta_2}{r_2}$,	$\frac{\zeta_3}{r_3}$,

e quindi si ha per noti teoremi:

$$\begin{aligned} w_1 r_2 r_3 &= \xi'_2\xi_3 + \eta'_2\eta_3 + \zeta'_2\zeta_3\,, \\ w_2 r_3 r_1 &= \xi'_3\xi_1 + \eta'_3\eta_1 + \zeta'_3\zeta_1\,, \\ w_3 r_1 r_2 &= \xi'_1\xi_2 + \eta'_1\eta_2 + \zeta'_1\zeta_2\,. \end{aligned}$$

Sostituendo in queste equazioni i valori delle ξ, η, ζ forniti dalle (1), si ottiene:

$$w_1 r_2 r_3 = \mathbf{x}'_2 \mathbf{x}_3 + \mathbf{y}'_2 \mathbf{y}_3 + \mathbf{z}'_2 \mathbf{z}_3 - \mathbf{u}'_2 \mathbf{u}_3 ,$$
$$w_2 r_3 r_1 = \mathbf{x}'_3 \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}'_3 \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}'_3 \mathbf{z}_1 - \mathbf{u}'_3 \mathbf{u}_1 ,$$
$$w_3 r_1 r_2 = \mathbf{x}'_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}'_1 \mathbf{y}_2 + \mathbf{z}'_1 \mathbf{z}_2 - \mathbf{u}'_1 \mathbf{u}_2 .$$

Ma, trasformando il secondo membro della prima mediante le equazioni della forma (2), si ha:

$$w_1 r_2 r_3 = \frac{1}{2}(A'\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + B'\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3 + C'\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3) + \mathbf{b}_2\mathbf{c}_3 \sum \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} + b_3 c_2 \sum \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} + \cdots$$

ossia, in virtù della (5),

$$2w_1 r_2 r_3 = (\mathbf{b}_2\mathbf{c}_3 - \mathbf{b}_3\mathbf{c}_2)\sum\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t}\right) + (\mathbf{c}_2\mathbf{a}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{a}_2)\sum\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right)$$
$$+ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2)\sum\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\right),$$

che si può scrivere più brevemente insieme con le altre due analoghe:

$$(6)\quad \begin{cases} w_1 r_2 r_3 = p_0(\mathbf{b}_2\mathbf{c}_3 - \mathbf{b}_3\mathbf{c}_2) + q_0(\mathbf{c}_2\mathbf{a}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{a}_2) + r_0(\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2) , \\ w_2 r_3 r_1 = p_0(\mathbf{b}_3\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1\mathbf{c}_3) + q_0(\mathbf{c}_3\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1\mathbf{a}_3) + r_0(\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3) , \\ w_3 r_1 r_2 = p_0(\mathbf{b}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1) + q_0(\mathbf{c}_1\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{a}_1) + r_0(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1) , \end{cases}$$

avendo posto per brevità:

$$(7)\quad \begin{cases} p_0 = \dfrac{1}{2}\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t}\right), \\ q_0 = \dfrac{1}{2}\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\right), \\ r_0 = \dfrac{1}{2}\sum\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} - \dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\right). \end{cases}$$

Poniamo nella prima delle (2) $i = 1, 2, 3$ e risolviamo il sistema che si ottiene rispetto a $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$; otterremo:

$$(8)\quad \begin{cases} (\mathbf{b}_2\mathbf{c}_3 - \mathbf{b}_3\mathbf{c}_2)\mathbf{x}_1 + (\mathbf{b}_3\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1\mathbf{c}_3)\mathbf{x}_2 + (\mathbf{b}_1\mathbf{c}_2 - \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1)\mathbf{x}_3 = H\dfrac{\partial x}{\partial a} , \\ (\mathbf{c}_2\mathbf{a}_3 - \mathbf{c}_3\mathbf{a}_2)\mathbf{x}_1 + (\mathbf{c}_3\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1\mathbf{a}_3)\mathbf{x}_2 + (\mathbf{c}_1\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{a}_1)\mathbf{x}_3 = H\dfrac{\partial x}{\partial b} , \\ (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3\mathbf{b}_2)\mathbf{x}_1 + (\mathbf{a}_3\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_3)\mathbf{x}_2 + (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1)\mathbf{x}_3 = H\dfrac{\partial x}{\partial c} , \end{cases}$$

essendo:

$$H = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{c}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{z}_3 \end{vmatrix} ;$$

e posto:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} .$$

Ora dalla:

$$HD = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{z}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ 0 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{z}_2 \\ 0 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{z}_3 \end{vmatrix} ,$$

aggiungendo alla prima colonna le altre moltiplicate rispettivamente per x, y, z, e tenendo presente la (1) della Nota I, si ottiene:

$$\text{(9)} \qquad HD = u \begin{vmatrix} u & x & y & z \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{u}_2 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{u}_3 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{z}_3 \end{vmatrix} = u d V = u r_1 r_2 r_3 .$$

Ciò posto, si osservi che le quantità p, q, r sono legate colle w_1, w_2, w_3 mediante le formole:

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} p = w_1 \frac{\xi_1}{r_1} + w_2 \frac{\xi_2}{r_2} + w_3 \frac{\xi_3}{r_3} , \\ q = w_1 \frac{\eta_1}{r_1} + w_2 \frac{\eta_2}{r_2} + w_3 \frac{\eta_3}{r_3} , \\ r = w_1 \frac{\zeta_1}{r_1} + w_2 \frac{\zeta_2}{r_2} + w_3 \frac{\zeta_3}{r_3} , \end{cases}$$

quindi, moltiplicando le equazioni, che si ottengono ponendo nella prima delle (1) $i = 1, 2, 3$, rispettivamente per le (6) e sommando, avuto riguardo alle (8) ed alle analoghe, si ha:

$$r_1 r_2 r_3 p = H \left\{ p_0 \frac{\partial x}{\partial a} + q_0 \frac{\partial x}{\partial b} + r_0 \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{x}{1+u} \left(p_0 \frac{\partial u}{\partial a} + q_0 \frac{\partial u}{\partial b} + r_0 \frac{\partial u}{\partial c} \right) \right\} ,$$

ossia, sostituendo il valore di H dato dalla (9),

$$\text{(11)} \qquad p = \frac{u}{D} \left\{ p_0 \frac{\partial x}{\partial a} + q_0 \frac{\partial x}{\partial b} + r_0 \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{x}{1+u} \left(p_0 \frac{\partial u}{\partial a} + q_0 \frac{\partial u}{\partial b} + r_0 \frac{\partial u}{\partial c} \right) \right\} .$$

Analoghe espressioni si otterranno per q ed r. Per $t = 0$, tutti i termini del determinante D si annullano tranne quelli della diagonale, che divengono eguali all'unità: risulta quindi $D = 1$, e la (11) diventa:

$$\text{(12)} \qquad p = e \left[p_0 \left(1 - \frac{a^2}{e(1+e)} \right) - q_0 \frac{ab}{e(1+e)} - r_0 \frac{ac}{e(1+e)} \right] ;$$

supposto naturalmente che nelle quantità p_0, q_0, r_0, le quali sono in generale funzioni delle coordinate iniziali e del tempo, siasi posto $t=0$, per modo che si abbia:

$$p_0=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial b\,\partial t}-\frac{c}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial b\,\partial t}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 b}{\partial c\,\partial t}-\frac{b}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial c\,\partial t}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c'}{\partial b}-\frac{c}{e}\frac{\partial e'}{\partial b}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b'}{\partial c}-\frac{b}{e}\frac{\partial e'}{\partial c}\right),$$

$$q_0=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial c\,\partial t}-\frac{a}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial c\,\partial t}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial a\,\partial t}-\frac{c}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial a\,\partial t}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'}{\partial c}-\frac{a}{e}\frac{\partial e'}{\partial c}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial c'}{\partial a}-\frac{c}{e}\frac{\partial e'}{\partial a}\right),$$

$$r_0=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 b}{\partial a\,\partial t}-\frac{b}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial a\,\partial t}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial b\,\partial t}-\frac{a}{e}\frac{\partial^2 e}{\partial b\,\partial t}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b'}{\partial a}-\frac{b}{e}\frac{\partial e'}{\partial a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'}{\partial b}-\frac{a}{e}\frac{\partial e'}{\partial b}\right),$$

e sicome ogni istante del moto si può riguardare come iniziale, la (12) manterrà la stessa forma quando si mutino a, b, c, e rispettivamente in x, y, z, u: avremo dunque, tenendo presente le (21) della Nota I:

$$(13)\qquad \begin{cases} p=\mathrm{P}u-\dfrac{x}{u+1}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,,\\[2mm] q=\mathrm{Q}u-\dfrac{y}{u+1}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,,\\[2mm] r=\mathrm{R}u-\dfrac{z}{u+1}(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,. \end{cases}$$

Quando dunque sussiste il potenziale di velocità, cioè quando $\mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{R}=0$, il moto è irrotazionale.

2. Determineremo ora l'intensità della rotazione w ed i suoi comomenti p_1, q_1, r_1 rispetto agli assi $Oxyz$.

Quadrando e sommando le (13) si ha:

$$(14)\qquad w^2=p^2+q^2+r^2=u^2(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2)-(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)^2\,.$$

Osservando poi che, siccome w passa per l'origine M degli assi $\xi\eta\zeta$, le sue componenti p, q, r ne rappresentano anche i comomenti rispetto agli stessi assi mentre i momenti componenti sono nulli, si ha dalle (73) della Mem. I citata.

$$p_1=pu-\frac{x}{u+1}(px+qy+rz)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ossia, sostituendo i valori di p, q, r, dati dalle (13) e riducendo:

$$(15)\qquad \begin{cases} p_1=\mathrm{P}u^2-x(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,,\\ q_1=\mathrm{Q}u^2-y(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,,\\ r_1=\mathrm{R}u^2-z(\mathrm{P}x+\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z)\,. \end{cases}$$

3. Per avere l'equazione di una *linea vorticale*, basta esprimere che i comomenti di un suo elemento ds, attiguo al punto x, y, z, u, sono proporzionali ai

comomenti della rotazione istantanea w, che possiede al tempo t la molecola fluida situata nel punto stesso. In tal modo otteniamo:

$$\frac{u\,dx - x\,du}{Pu^2 - x(Px + Qy + Rz)} = \frac{u\,dy - y\,du}{Qu^2 - y(Px + Qy + Rz)} = \frac{u\,dz - z\,du}{Ru^2 - z(Px + Qy + Rz)} .$$

Moltiplicando rispettivamente il numeratore ed il denominatore di ciascuna frazione per x, y, z, e poi facendo il quoziente della somma dei numeratori e della somma dei denominatori, si ha come valore comune dei tre rapporti $\frac{du}{Px + Qy + Rz}$, il che permette di scrivere le precedenti equazioni sotto la forma più semplice:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{u\,du}{Px + Qy + Rz} . \tag{16}$$

Queste sono le equazioni, date senza dimostrazione, nella Nota I.

Altri metodi per determinare la rotazione d'una particella fluida

4. Alle formole (15) si può giungere più direttamente nel modo seguente. Il **Beltrami**, nella Memoria citata, considerando al § 11 un sistema di coordinate curvilinee qualunque ξ, η, ζ per le quali l'elemento lineare acquista la forma più generale, cioè:

$$ds^2 = L d\xi^2 + M d\eta^2 + N d\zeta^2 + 2L_1 d\eta d\zeta + 2M_1 d\zeta d\xi + 2N_1 d\xi d\eta , \tag{17}$$

dimostrò che le componenti della rotazione istantanea w secondo i tre assi curvilinei sono:

$$p' = \pi\sqrt{L} , \quad q' = \chi\sqrt{M} , \quad r' = \rho\sqrt{N} , \tag{18}$$

mentre il valore di w è dato da:

$$w^2 = L\pi^2 + M\chi^2 + N\rho^2 + 2L_1\chi\rho + 2M_1\rho\pi + 2N_1\pi\chi ,$$

avendo posto:

$$\left\{\begin{aligned} D\pi &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\zeta'}}{\partial\eta} - \frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\eta'}}{\partial\zeta}\right\} , \\ D\chi &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\xi'}}{\partial\zeta} - \frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\zeta'}}{\partial\xi}\right\} , \\ D\rho &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\eta'}}{\partial\xi} - \frac{\partial\frac{\partial T}{\partial\xi'}}{\partial\eta}\right\} , \end{aligned}\right. \tag{19}$$

dove:

$$D = \sqrt{LMN + 2L_1M_1N_1 - LL_1^2 - MM_1^2 - NN_1^2} , \tag{20}$$

$$2T = L\xi'^2 + M\eta'^2 + N\zeta'^2 + 2L_1\eta'\zeta' + 2M_1\zeta'\xi' + 2N_1\xi'\eta' . \tag{21}$$

Queste formole risultano da altre del § 6, dipendenti da coordinate cartesiane, e stabilite nell'ipotesi dello spazio euclideo quando si supponga l'origine delle coordinate cartesiane nella particella infinitesima. Ora le formole che danno le componenti suddette sono indipendenti dall'origine delle coordinate cartesiane, e quindi mi pare che non vi sia difficoltà a concludere senz'altro che le formole citate valgono in generale per spazi in cui l'elemento lineare sia esprimibile con la (17). Si può d'altronde dimostrare direttamente che i segmenti $\pi\sqrt{L}, \chi\sqrt{M}, \rho\sqrt{N}$ rappresentano le componenti della rotazione.

Assumendo come superficie $\xi = \text{cost}$, $\eta = \text{cost}$, $\zeta = \text{cost}$ le tre superficie equidistanti dai tre piani coordinati $Oxyz$, e rappresentate colle nostre notazioni dalle equazioni $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, $z = \text{cost}$, il quadrato dell'elemento lineare avrà la forma:

$$(22) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2 = dx^2\left(1 - \frac{x^2}{u^2}\right) + dy^2\left(1 - \frac{y^2}{u^2}\right) + dz^2\left(1 - \frac{z^2}{u^2}\right)$$
$$- \frac{2yz}{u^2}\, dy\, dz - \frac{2zx}{u^2}\, dz\, dx - \frac{2xy}{u^2}\, dx\, dy \,,$$

e quindi dal confronto con la (17) si deduce:

$$(23) \qquad \begin{cases} L = 1 - \dfrac{x^2}{u^2} \,, & M = 1 - \dfrac{y^2}{u^2} \,, & N = 1 - \dfrac{z^2}{u^2} \,, \\ L_1 = - \dfrac{yz}{u^2} \,, & M_1 = - \dfrac{zx}{u^2} \,, & N_1 = - \dfrac{xy}{u^2} \,. \end{cases}$$

Gli assi curvilinei, che chiameremo ξ', η', ζ' sono le tangenti alle tre linee equidistanti dagli assi $Oxyz$, passanti pel punto M.

Ponendo nella (20) i valori (23), si trova:

$$(24) \qquad D = \frac{1}{u} \,.$$

Si ha poi:

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 - u'^2 = Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 + 2L_1 y'z' + \dots$$

donde risulta:

$$(25) \qquad \frac{\partial T}{\partial x'} = x' - \frac{x}{u}\, u' \,,$$
$$\dots\dots\dots$$

Sostituendo questi valori nelle (19), si trova:

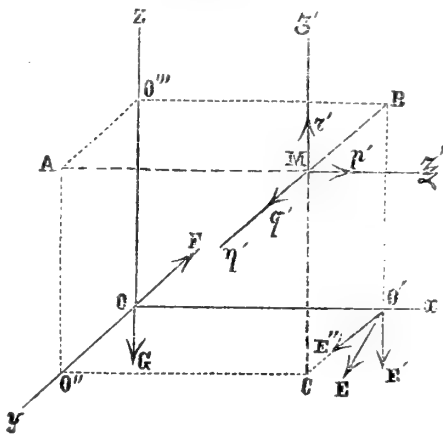
$$\pi = \frac{u}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(z' - \frac{z}{u}\, u'\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y' - \frac{y}{u}\, u'\right)\right] = uP \,,$$

$$\chi = \frac{u}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x' - \frac{x}{u}\, u'\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(z' - \frac{z}{u}\, u'\right)\right] = uQ \,,$$

$$\rho = \frac{u}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y' - \frac{y}{u}\, u'\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x' - \frac{x}{u}\, u'\right)\right] = uR \,;$$

e quindi per le (18):

$$(26)\qquad p' = \sqrt{u^2 - x^2}\,\mathrm{P} \quad , \quad q' = \sqrt{u^2 - y^2}\,\mathrm{Q} \quad , \quad r' = \sqrt{u^2 - z^2}\,\mathrm{R} \; .$$

Determiniamo ora i comomenti p_1, q_1, r_1 rispetto agli assi $Oxyz$. Ricordiamo anzitutto che un segmento w (rotazione o traslazione) è equivalente ad un segmento applicato in un punto qualunque O (comomento di w rispetto a questo punto) e ad una coppia, di momento eguale al momento di w rispetto ad O; e che una coppia di rotazioni è una traslazione, mentre una coppia di traslazioni è una rotazione *). Osserviamo poi che le perpendicolari MA, MB, MC ai tre piani coordinati Oyz, Ozx, Oxy sono normali alle tre superficie equidistanti x=cost, y=cost, z=cost, passanti per M, e quindi ai rispettivi piani tangenti $\eta\zeta'$, $\zeta'\xi$, $\xi\eta'$: da ciò segue, per nota proprietà di Geometria, che gli assi curvilinei ξ, η', ζ' sono perpendicolari alle facce del triedro MABC.

Ciò posto, siano O', O'', O''' i punti d'intersezione delle facce del triedro MABC con gli assi $Oxyz$. Trasportiamo la rotazione p' nel punto O': avremo un comomento $p'\,\mathrm{Cos\,MO'} = \mathrm{P}(u^2 - x^2)$, diretto secondo O$x$, ed un momento (traslazione) $\mathrm{O'E} = p\sqrt{y^2+z^2} = \mathrm{P}\sqrt{u^2-x^2}\sqrt{y^2+z^2}$, diretto secondo la perpendicolare O'E al piano OMO', le cui componenti secondo BO' ed O'C sono rispettivamente:

$$\mathrm{O'E'} = \mathrm{O'E}\cos \mathrm{EO'E'} = \mathrm{O'E}\,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} = \mathrm{P}y\sqrt{u^2-x^2} \; ,$$

$$\mathrm{O'E''} = \mathrm{O'E}\cos \mathrm{EO'E''} = \mathrm{O'E}\,\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} = \mathrm{P}z\sqrt{u^2-x^2} \; .$$

Trasportando in O questi tre vettori, il comomento $\mathrm{P}(u^2 - x^2)$ resta inalterato; ciascuno dei vettori O'E' ed O'E'' dà luogo ad un momento e ad un comomento. Dei comomenti non terremo qui conto perchè rappresentano traslazioni: i momenti saranno:

$$\mathrm{OF} = \mathrm{O'E'}\,\mathrm{Sen\,OO'} = \mathrm{O'E'}\,\frac{x}{\sqrt{u^2-x^2}} = \mathrm{P}yx \qquad \text{secondo} \quad -y$$

$$\mathrm{OG} = \mathrm{O'E''}\,\mathrm{Sen\,OO'} = \mathrm{O'E''}\,\frac{x}{\sqrt{u^2-x^2}} = \mathrm{P}zx \qquad \text{»} \quad -z \; .$$

Operando analogamente per q' ed r', avremo rispettivamente i seguenti comomenti

*) Cfr. *Alcuni problemi ecc.*, Mem. I, n. 35 e 36; Mem. II, n. 13 e 14.

secondo gli assi Ox, Oy, Oz:

	x	y	z
p'	$P(u^2 - x^2)$,	$-Pxy$,	$-Pxz$
q'	$-Qyx$,	$Q(u^2 - y^2)$,	$-Qyz$,
r'	$-Rzx$,	$-Rzy$,	$R(u^2 - z^2)$,

quindi sommando i comomenti secondo Ox, e quelli secondo Oy ed Oz si ha:

$$\begin{aligned} p_1 &= Pu^2 - x(Px + Qy + Rz) , \\ q_1 &= Qu^2 - y(Px + Qy + Rz) , \\ r_1 &= Ru^2 - z(Px + Qy + Rz) . \end{aligned}$$

Queste sono appunto le formole (15).

5. Ma un metodo più semplice dei precedenti per determinare la rotazione di una particella fluida, in uno spazio di curvatura costante, è il seguente: Siano ad un determinato istante $M(x, y, z, u)$ ed $M'(x + \mathbf{x}, y + \mathbf{y}, z + \mathbf{z}, u + \mathbf{u})$ due punti del fluido, infinitamente vicini. Considerando x', y', z', u' come funzioni omogenee di x, y, z, u (Nota I, n. 6), avremo le equazioni:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x' &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\mathbf{y} + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)\mathbf{z} + \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)\mathbf{u} , \\ \delta y' &= \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)\mathbf{y} + \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)\mathbf{z} + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)\mathbf{u} , \\ \delta z' &= \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\mathbf{y} + \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)\mathbf{z} + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)\mathbf{u} , \\ \delta u' &= \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)\mathbf{x} + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\mathbf{y} + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)\mathbf{z} + \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)\mathbf{u} , \end{aligned} \right.$$

alle quali possiamo dare la forma seguente:

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x' &= a_{11}\mathbf{x} + a_{12}\mathbf{y} + a_{13}\mathbf{z} + a_{14}\mathbf{u} + \bar{q}\mathbf{z} - \bar{r}\mathbf{y} + \bar{p}'\mathbf{u} , \\ \delta y' &= a_{21}\mathbf{x} + a_{22}\mathbf{y} + a_{23}\mathbf{z} + a_{24}\mathbf{u} + \bar{r}\mathbf{x} - \bar{p}\mathbf{z} + \bar{q}'\mathbf{u} , \\ \delta z' &= a_{31}\mathbf{x} + a_{32}\mathbf{y} + a_{33}\mathbf{z} + a_{34}\mathbf{u} + \bar{p}\mathbf{y} - \bar{q}\mathbf{x} + \bar{r}'\mathbf{u} , \\ \delta u' &= -a_{41}\mathbf{x} - a_{42}\mathbf{y} - a_{43}\mathbf{z} - a_{44}\mathbf{u} + \bar{p}'\mathbf{x} + \bar{q}'\mathbf{y} + \bar{r}'\mathbf{z} , \end{aligned} \right.$$

ponendo:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = a_{11} , && \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right) = a_{12} - \bar{r} , && \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right) = a_{13} + \bar{q} , && \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) = a_{14} + \bar{p}' , \\ &\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) = a_{21} + \bar{r} , && \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right) = a_{22} , && \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right) = a_{23} - \bar{p} , && \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) = a_{24} + \bar{q}' , \\ &\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = a_{31} - \bar{q} , && \left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = a_{32} + \bar{p} , && \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right) = a_{33} , && \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) = a_{34} + \bar{r}' , \\ &\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) = -a_{41} + \bar{p}' , && \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) = -a_{42} + \bar{q}' , && \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) = -a_{43} + \bar{r}' , && \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right) = -a_{44} . \end{aligned} \right.$$

Da queste deduciamo, supponendo $a_{ii'} = a_{i'i}$,

$$(30) \quad \begin{cases} 2\bar{p} = \left(\dfrac{\partial z'}{\partial y}\right) - \left(\dfrac{\partial y'}{\partial z}\right) \;,\; 2\bar{q} = \left(\dfrac{\partial x'}{\partial z}\right) - \left(\dfrac{\partial z'}{\partial x}\right) \;,\; 2\bar{r} = \left(\dfrac{\partial y'}{\partial x}\right) - \left(\dfrac{\partial x'}{\partial y}\right), \\ 2\bar{p}' = \left(\dfrac{\partial x'}{\partial u}\right) + \left(\dfrac{\partial u'}{\partial x}\right) \;,\; 2\bar{q}' = \left(\dfrac{\partial y'}{\partial u}\right) + \left(\dfrac{\partial u'}{\partial y}\right) \;,\; 2\bar{r}' = \left(\dfrac{\partial z'}{\partial u}\right) + \left(\dfrac{\partial u'}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Supponendo poi ridotte le x', y', z', u' a funzioni omogenee di primo grado delle variabili x, y, z, u, potremo scrivere:

$$(31) \qquad x' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) x + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right) y + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right) z + \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right) u \,,$$

od anche per le (29),

$$(32) \qquad x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}u + \bar{q}z - \bar{r}y + \bar{p}'u \,.$$

In virtù delle (30), la (31) diventa invece:

$$x' = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) x + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) y + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) z - \left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right) u + 2\bar{q}z - 2\bar{r}y + 2\bar{p}'u \,,$$

e poichè i primi quattro termini del secondo membro si riducono a $-x'$ (Nota I, n. 6), avremo, scrivendo anche le altre equazioni analoghe:

$$(33) \quad \begin{cases} x' = \bar{q}z - \bar{r}y + \bar{p}'u \,, \\ y' = \bar{r}x - \bar{p}z + \bar{q}'u \,, \\ z' = \bar{p}y - \bar{q}x + \bar{r}'u \,, \\ u' = \bar{p}'x + \bar{q}'y + \bar{r}'z \,. \end{cases}$$

Sommando membro a membro la (32) e le altre analoghe rispettivamente con le (28), e ponendo:

$$\begin{aligned} X &= x + \mathrm{x} \;,\; Y = y + \mathrm{y} \;,\; Z = z + \mathrm{z} \;,\; U = u + \mathrm{u} \,, \\ X' &= x' + \delta x' \;,\; Y' = y' + \delta y' \;,\; Z' = z' + \delta z' \;,\; U' = u' + \delta u' \,, \end{aligned}$$

otterremo:

$$(34) \quad \begin{cases} X' = (a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}U) + (\bar{q}Z - \bar{r}Y + \bar{p}'U) \,, \\ Y' = (a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}U) + (\bar{r}X - \bar{p}Z + \bar{q}'U) \,, \\ Z' = (a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}U) + (\bar{p}Y - \bar{q}X + \bar{r}'U) \,, \\ -U' = (a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}U) + (\bar{p}'X + \bar{q}'Y + \bar{r}'Z) \,. \end{cases}$$

Queste equazioni mostrano che nei dintorni del punto x, y, z, u i punti del fluido hanno un movimento *dislocatorio semplice* *). I trinomi entro parentesi rappresentano il *moto rigido* (Mem. II, p. 17) **) ed i quadrinomi il moto *simmetrico* o *intestino* della molecola. Le quantità $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$, e $\bar{p}', \bar{q}', \bar{r}'$ sono le componenti di due vettori, applicati all'origine degli assi coordinati, dei quali il primo rappresenta la velocità angolare, ed il secondo la velocità di scorrimento della molecola fluida attigua al punto $M(x, y, z, u)$. Questi vettori sono equivalenti a due altri applicati in M, e le cui componenti rispetto alla terna $M\xi\eta\zeta$ (che si può portare a coincidere con gli assi fissi $Oxyz$ mediante una semplice traslazione), sono:

$$p = u\bar{p} + y\bar{r}' - z\bar{q}' - \frac{x}{u+1}(\bar{p}x + \bar{q}y + \bar{r}z) \;,$$

. . . .

$$p' = u\bar{p}' - y\bar{r} + z\bar{q} - \frac{x}{u+1}(\bar{p}'x + \bar{q}'y + \bar{r}'z) \;,$$

ossia, sostituendo i valori di $p, q, \ldots$ dati dalle (30) e riducendo,

$$(35) \qquad 2p = u\left[\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)\right] + y\left[\left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)\right] - z\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right]$$
$$- \frac{x}{u+1}\left\{\left[\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial y'}{\partial z}\right)\right]x + \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)\right]y + \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)\right]z\right\},$$

. . . .

$$(36) \qquad p' = x' - \frac{xu'}{u+1} \;,$$

. . . .

Le formole (35) e (36) danno le componenti della rotazione e della traslazione della particella fluida rispetto agli assi $M\xi\eta\zeta$. Le prime, in virtù delle (15) e delle (21) della Nota I, coincidono con le (13); le altre coincidono con le espressioni della velocità dell'origine M, che si possono dedurre immediatamente dalle (1) ***).

6, Quanto al moto intestino, osserviamo che il punto M non vi partecipa, poichè le (33) ci dicono che tutto il moto di M è compreso nel moto rigido. Volendo dunque considerare il moto intestino relativo al punto M, basterà porre in M l'origine delle coordinate. Allora X, Y, Z diventano le coordinate cartesiane di M' ed U = 0.

---

*) Cfr. Maggi, *Principii della Teoria matematica del movimento dei corpi*. Milano 1896, p. 49.

**) Le formole (54) della Mem. II si riferiscono ad uno spazio iperbolico intendendo che le coordinate di un punto non siano x, y, z, u, ma ix, iy, iz, iu, e che le componenti dello scorrimento siano rappresentate non da p', q', r', ma da ip', iq', ir'.

***) Le formole (1) restano inalterate se si suppone che $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i, \mathbf{u}_i$ siano gl'incrementi delle coordinate nel tempuscolo *dt*.

Dicendo v_x, v_y, v_z le componenti della velocità nel moto intestino, si ha:

$$\begin{cases} v_x dt = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z \,, \\ v_y dt = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z \,, \\ v_z dt = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z \,, \end{cases}$$

quindi le formole del moto intestino sono le stesse che nello spazio ordinario *), ciò che era da prevedersi, trattandosi di moto che ha luogo nei limiti di una particella infinitesima.

Colle formole stabilite in questa e nella precedente Nota, e seguendo, colle considerazioni fatte al n° 4, gli stessi metodi del Beltrami, mi pare si possano, senza difficoltà, estendere agli spazi di curvatura costante le proprietà dei *vorticoidi*, dei *flussi* e della *circolazione* introdotte nella Meccanica dei fluidi da Helmholtz e da W. Thomson.

finita di stampare il dì 15 Ottobre 1902

*) Cfr. Beltrami, *Mem. cit.*, § 8.